УДК 531.38

©2008. **В.В. Кириченко, А.М. Ковалев**

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОПОСТОЯННОЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для систем общего вида при отсутствии жордановой клетки, соответствующей нулевому собственному значению, построены функции, вторая производная которых в силу системы является положительнопостоянной. Для построения использован способ диагонализации линейных автономных динамических систем [1]. Построенная таким способом функция V является существенно нелинейной. Отдельно рассмотрен случай существования квадратичной функции V.

Метод функций Ляпунова показывает важность функций, производная которых в силу системы дифференциальных уравнений является знакопостоянной. При этом все больший интерес привлекают случаи рассмотрения производных высших порядков. Простой пример системы линейных автономных дифференциальных уравнений диагонального вида с действительными коэффициентами показывает, что для функции $V = \|x\|^2$ вторая производная в силу системы будет положительнопостоянной. Для системы в нормальной жордановой форме ситуация более сложная.

В данной работе предложены два способа построения функции V, вторая производная которой в силу системы является положительнопостоянной, для систем имеющих жорданову нормальную форму. К такому виду может быть приведена любая линейная автономная ситема дифференциальных уравнений с помощью линейного преобразования. Первый способ заключается в приведении рассматриваемой системы, с помощью нелинейного преобразования к диагональному виду. Однако построенная таким образом функция является существенно нелинейной. Поэтому второй способ предлагает способ построения функции V, когда она имеет квадратичный вид.

1. Приведение системы к диагональному виду. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = M\boldsymbol{Y}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{Y}$ – вектор размерности n функций $y_k(t)$, $k = \overline{1,n}$; M – матрица коэффициентов размерности $n \times n$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – набор собственных значений матрицы M. Произведем в (1) замену

$$\boldsymbol{Y} = T\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

где T – некоторая постоянная невырожденная матрица. Тогда с учетом замены (2) система (1) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{X}} = T^{-1}MT\boldsymbol{X} = N\boldsymbol{X}. \tag{3}$$

Если в качестве матрицы T взять матрицу, у которой столбцы являются соответствующими собственными векторами матрицы M (предполагается, что их число равно n), то матрица N будет иметь диагональный вид. Причем по диагонали будут стоять соответствующие собственные числа матрицы M.

В случае, когда система собственных векторов матрицы M не является полной, приведение (1) к диагональному виду невозможно. В этом случае можно преобразовать систему (1) к жордановой форме [2].

Таким образом, задача построения функции Ляпунова для системы (1) сводится к задаче построения функции Ляпунова для системы (3), у которой матрица N имеет либо диагональный вид, либо приведена к жордановой форме.

Для диагональной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n, \end{cases} \tag{4}$$

с вещественными собственными числами λ_k рассмотрим функцию

$$V = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

и вычислим ее первую и вторую производные в силу уравнения (4):

$$\dot{V} = 2\sum_{i=k}^{n} \lambda_k x_k^2, \qquad \ddot{V} = 4\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2. \tag{5}$$

Следовательно, вторая производная функции V является положительнопостоянной.

В случае комплексных собственных чисел $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, система (4) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_k = \alpha_k \xi_k - \beta_k \eta_k, \\ &\dot{\eta}_k = \beta_k \xi_k + \alpha_k \eta_k \qquad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для системы (6) рассмотрим функцию

$$V = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^2 + \eta_k^2).$$

Тогда

$$\dot{V} = 2\sum_{i=k}^{n} \alpha_k (\xi_k^2 + \eta_k^2), \qquad \ddot{V} = 4\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (\xi_k^2 + \eta_k^2). \tag{7}$$

Вторая производная функции V является положительнопостоянной.

В случае, когда система собственных векторов матрицы M не является полной, система (1) может быть приведена к виду [2]

$$\dot{\boldsymbol{X}} = J\boldsymbol{X}, \tag{8}$$

где J – жорданова матрица. При этом действительным характеристическим числам λ матрицы M соответствует обычная жорданова клетка J_λ, а паре комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$ соответствует жорданова клетка J_α:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Система (8) называется жордановой нормальной формой системы (1) и является блочно-диагональной формой, поскольку наряду с диагональной частью в ней присутствуют матричные блоки, соответствующие жордановым клеткам.

Рассмотрим систему размерности n, соответствующую жордановой клетке J_λ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_1, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \lambda x_n + x_{n-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) преобразованием [1]

$$z_k = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln |x_1|}{\lambda} \right)^s x_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n, \qquad \lambda \neq 0 \tag{10}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$x_k = \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln |z_1|}{\lambda} \right)^s \frac{z_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n, \qquad \lambda \neq 0.$$

В новых переменных функция V и ее производные $\dot{V}, \ddot{V}$ имеют вид

$$V = \sum_{k=1}^{n} z_k^2, \qquad \dot{V} = 2 \sum_{i=k}^{n} \lambda_k z_k^2, \qquad \ddot{V} = 4 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 z_k^2.$$

Запишем систему размерности n, соответствующую жордановой клетке J_α:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = \beta\xi_1 + \alpha\eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = \alpha\xi_2 - \beta\eta_2 + \xi_1, \\ \dot{\eta}_2 = \beta\xi_2 + \alpha\eta_2 + \eta_1, \\ \dots \\ \dot{\xi}_n = \alpha\xi_n - \beta\eta_n + \xi_{n-1}, \\ \dot{\eta}_n = \beta\xi_n + \alpha\eta_n + \eta_{n-1}. \end{cases} \tag{11}$$

В случае $\beta \neq 0$ система (11) преобразованием [1]

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \right)^s \frac{\xi_{k-s}}{s!}, \\ v_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \right)^s \frac{\eta_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n, \end{aligned} \tag{12}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \right)^s u_{k-s}, \\ \eta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{1}{\beta} \arcsin \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \right)^s v_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

В случае $\alpha \neq 0$ система (11) преобразованием [1]

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{2\alpha} \right)^s \xi_{k-s}, \\ v_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{2\alpha} \right)^s \eta_{k-s}, \qquad k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{13}$$

приводится к диагональному виду. Обратное преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s \frac{u_{k-s}}{s!}, \\ \eta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s \frac{v_{k-s}}{s!}, \qquad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

В новых переменных функция V и ее производные $\dot{V}, \ddot{V}$ имеют вид

$$V = \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + v_k^2), \qquad \dot{V} = 2 \sum_{i=k}^{n} \alpha_k (u_k^2 + v_k^2), \qquad \ddot{V} = 4 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (u^2 + v_k^2).$$

2. Случай, когда функция V имеет квадратичный вид. Функция V, построенная способом, предложенным в предыдущем пункте, является существенно нелинейной. Поэтому целесообразно построить квадратичную функцию V для систем (9), (11). Ограничимся случаем системы (11) при $\alpha \neq 0$.

Возьмем функцию V следующего вида

$$V = a_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + a_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots + a_n(\xi_n^2 + \eta_n^2). \tag{14}$$

Заметим, что если положить $\eta_k = 0,\ k = \overline{1,n}$, то система (11) сведется к системе (9). Посчитаем первую и вторую производные в силу системы (11):

$$\dot V = 2a_1\alpha(\xi_1^2+\eta_1^2) + 2a_2\alpha(\xi_2^2+\eta_2^2) + \ldots + 2a_n\alpha(\xi_n^2+\eta_n^2) + \\ + 2a_2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + 2a_3(\xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3) + \ldots + 2a_n(\xi_{n-1}\xi_n+\eta_{n-1}\eta_n),$$

$$\ddot V = 2\big[(2a_1\alpha^2+a_2)(\xi_1^2+\eta_1^2) + (2a_2\alpha^2+a_3)(\xi_2^2+\eta_2^2) + \ldots + \\ + (2a_{n-1}\alpha^2+a_n)(\xi_{n-1}^2+\eta_{n-1}^2) + 2a_n\alpha^2(\xi_n^2+\eta_n^2) + \\ + 4a_2\alpha(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + 4a_3\alpha(\xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3) + \ldots + 4a_n\alpha(\xi_{n-1}\xi_n+\eta_{n-1}\eta_n) + \\ + a_3(\xi_1\xi_3+\eta_1\eta_3) + a_4(\xi_2\xi_4+\eta_2\eta_4) + \ldots + a_n(\xi_{n-2}\xi_n+\eta_{n-2}\eta_n)\big]. \tag{15}$$

Матрица квадратичной формы (15) будет состоять из двух одинаковых матриц, стоящих на диагонали следующего вида:

$$\begin{pmatrix}
2a_n\alpha^2 & 2a_n\alpha & \frac{a_n}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
2a_n\alpha & 2a_{n-1}\alpha^2+a_n & 2a_{n-1}\alpha & \frac{a_{n-1}}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{a_n}{2} & 2a_{n-1}\alpha & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \frac{a_{n-1}}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{a_5}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 2a_4\alpha & \frac{a_4}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a_3\alpha^2+a_4 & 2a_3\alpha & \frac{a_3}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2a_3\alpha & 2a_2\alpha^2+a_3 & 2a_2\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_3}{2} & 2a_2\alpha & 2a_1\alpha^2+a_2
\end{pmatrix}$$

Выпишем миноры этой матрицы:

$$A_1 = 2a_n\alpha,$$
$$A_2 = 2\alpha^2 a_n(2\alpha^2 a_{n-1} - a_n),$$
$$A_3 = a_n[8a_{n-2}a_{n-1}\alpha^6 - 4\alpha^4(a_{n-1}^2 + a_{n-2}a_n) + \frac{3}{2}a_{n-1}a_n\alpha^2 - \frac{a_n^2}{4}],$$

$$A_k = (2a_{n-(k-1)}\alpha^2 + a_{n-(k-2)})A_{k-1} - 2a_{n-(k-2)}\alpha D_{k-1} + \frac{a_{n-(k-3)}}{2}D_{k-2},$$

где D_{k-i} – определитель получаемый путем вычеркивания k-ой строки и $(k-i)$-ого столбца из определителя A_k.

Теперь, используя критерий Сильвестра и свойство самосопряженности комплексных корней, найдем условия на коэффициенты, при которых $\ddot V$ будет знакоопределенной.

$$A_k > 0, \qquad (-1)^k A_k > 0, \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{16}$$

Заметим, что коэффициент a_i входит в определитель A_{n-i+1} линейно $(i = 1,\ldots,n)$. Поэтому все неравенства (16) разрешаются последовательно относительно коэффициентов a_i, начиная с первого, и система (16) имеет решение.

1. *Ковалев А.М.* Диагонализация линейных автономных динамических систем. // Доповіді НАНУ. – 2007, №1. – С.7-11.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 29.10.08