УДК 539.3

©2008. **К.М. Довбня, М.М. Гордієнко**

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачу про напружено-деформований стан пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), де праві частини – функції, що мають розрив першого роду. Побудовано алгоритм аналітико-числового розв'язання одержаних систем СІР сумісно з умовами пластичності для ортотропних оболонок. Досліджено вплив ортотропії матеріалу, геометричних параметрів оболонки і тріщини на її розкриття.

Під час експлуатації в оболонкових конструкціях часто виникають дефекти, які можна моделювати лише внутрішньою тріщиною. Виникнення пластичних деформацій в околі дефектів у конструкціях, які знаходяться під дією статичного навантаження, підтверджується низкою експериментальних досліджень. Тому при розрахунку на міцність оболонкових конструкцій з таким типом дефектів використовують наближені методи, які враховують наявність зон пластичних деформацій на подовжені, над і під фронтом внутрішньої тріщини.

Найчастіше застосовують аналог δ_c – моделі, за допомогою якого було розглянуто ряд задач про напружено-деформований стан циліндричних і сферичних ізотропних і ортотропних оболонок з внутрішніми тріщинами [4–5, 7]. Подальший свій розвиток модель набула в роботах [2, 3] при дослідженні ізотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною. Робота присвячена дослідженню впливу ортотропії матеріалу на напружено-деформований стан оболонок довільної кривини з таким типом тріщин.

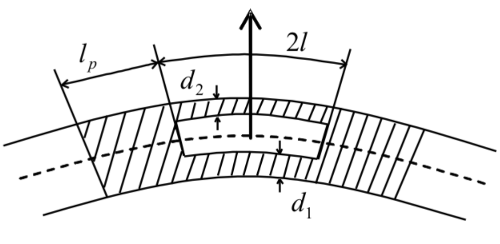

Рис. 1. Повздовжній розріз внутрішньої тріщини в пружно-пластичній оболонці

1. Постановка задачі. Розглянемо тонку оболонку сталої товщини h, виготовлену з ортотропного матеріалу так, що в кожній її точці лінії головних кривин серединної поверхні збігаються з головними напрямками пружності матеріалу. Система ортогональних координат $Oxyz$ обрана таким чином, що осі x, y орієнтовані вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки, а вісь z спрямована по нормалі до неї. Оболонка послаблена внутрішньою тріщиною довжини $2l$ уздовж осі x і знаходиться під дією симетричного зовнішнього навантаження. Глибина тріщини стала і дорівнює $D = h - d_1 - d_2$.

2. Розв'язок задачі. Задачу будемо розв'язувати в двовимірній постановці. Напруження, які діють у прошарку матеріалу над і під фронтом внутрішньої тріщини сталі і дорівнюють границі текучості матеріалу σ_τ. Статично еквівалентні їм зусилля і момент визначаються за формулами $T^l = \sigma_\tau(d_1+d_2)$, $M^l = \sigma_\tau(h-d_1-d_2)(d_2-d_1)/2$. Невідомі зусилля T і згинальний момент M, які діють на подовжені тріщини, задовольняють умові пластичності Треска, для ортотропних матеріалів [6]. При діючому навантаженні, оскільки $\sigma_{yy} = \frac{T}{h} + \gamma\frac{12M}{h^3}$, а $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$, умова пластичності буде мати вигляд:

$$\sigma_{yy}^2 = \sigma_\tau^2,$$

або

$$\frac{T}{h\sigma_\tau} + \frac{6|M|}{h^2\sigma_\tau} = 1. \tag{1}$$

Також можливе використання умови пластичності у вигляді пластичного шарніру:

$$\left(\frac{T}{h\sigma_\tau}\right)^2 + \frac{4|M|}{h^2\sigma_\tau} = 1. \tag{2}$$

Тоді можна ввести нову фіктивну наскрізну тріщину довжини $l_1 = l + l_p$, l_p – довжина пластичної зони, на берегах якої граничні умови набудуть вигляду:

$$T_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} T^l - T_2^*, \quad |x| \le l \\ T - T_2^*, \quad l \le |x| \le l + l_p \end{array} \right. ;$$

$$M_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} M^l - M_2^*, \quad |x| \le l \\ M - M_2^*, \quad l \le |x| \le l + l_p \end{array} \right. , \tag{3}$$

де T_2^*, M_2^* – характеристики зовнішнього навантаження.

Для одержання системи СІР поставленої задачі, необхідне використання системи СІР, що описує напружений стан пружної ортотропної оболонки з наскрізною тріщиною [8].

$$\int_{-1}^{1} \sum_{j=1,3} K_{ij}(s-x)\psi_j(s)ds = \pi\Phi_i(x), \quad i = 1,3, \tag{4}$$

де

$$K_{11}(s-x) = \frac{1}{s-x} - 2\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\frac{\beta^2}{\chi^2}(s-x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(\beta|s-x|\chi^{-1}),$$

$$a_n^{(1)}(\beta|s-x|\chi^{-1}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |d^2|l_2^{-2}\cos^3\theta\cos(2n-1)\theta ImG_{n,n-1}(\beta|s-x|\chi^{-1}|d|\sqrt{i})d\theta,$$

$$\beta = cl, \quad c^2 = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{R_2h}, \quad d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu}}{a}\frac{\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta}{l_1l_2}, \quad \lambda = R_2/R_1,$$

$$l_1^2 = 1 - 4\tilde{\mu}(1+\nu)cos^2 2\theta, \quad l_2^2 = 1 + 4\tilde{\mu}(1-\nu)cos^2 2\theta, \quad 4\tilde{\mu} = \mu/2a,$$

$$\mu = 1 - 2(1+v)G_{12}/E, \quad 2a = 2 - \mu + \mu v,$$

$$\chi^2 = \sqrt{E_1/E_2}, \quad E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad v = \sqrt{v_1 v_2},$$

де E_1, E_2 – модулі Юнга; v_1, v_2 – коефіцієнти Пуассона; G_{12} – модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки.

Решта ядер наведені в роботі [1]. Невідомі функції мають вигляд:

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4l\chi^2}\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\frac{d[\vartheta]}{ds}; \quad \psi_3 = \frac{D(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}{4l\chi^2}R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{ds},$$

а $\Phi_1(x) = T_2(x)$ і $\Phi_2(x) = M_2(x)$ – праві частини системи (4).

Система (4) із граничними умовами (3) є розв'язувальною системою. Використанню методу механічних квадратур для її чисельного розв'язання перешкоджає те, що праві частини системи (4) мають розрив першого роду. Тому представимо невідомі функції у вигляді:

$$\psi_1(s) = g_1(s) + (T - \sigma_\tau(d_1+d_2))h(s),$$

$$\psi_3(s) = g_3(s) + c^2 R_2(M - \sigma_\tau(h - d_1 - d_2)(d_2 - d_1)/2)h(s). \tag{5}$$

Функція $h(s)$ є аналітичним роз'язком рівняння:

$$\int_{-1}^{1} \frac{h(s)}{s-x} = \pi f(x), \tag{6}$$

де $f(x) = \begin{cases} -a, & |s| \le \tau^* \\ -a+1, & \tau^* \le |s| \le 1 \end{cases}, \qquad \tau^* = l/l_1.$

Вигляд $h(s)$ такий:

$$h(s) = \frac{1}{\pi} ln\left|\frac{(\tau^*-s)(1+s\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2})(1-s^2)}{(\tau^*+s)(1-s\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2})(1-s^2)}\right|.$$

Підставимо невідомі функції (5) в систему (4):

$$\int_{-1}^{1}\sum_{j=1,3} K_{1j}(x-s)g_j(s)ds + (T-\sigma_\tau(d_1+d_2))\left(\int_{-1}^{1} K_{11}^r(x-s)h(s)ds + \pi a\right) +$$

$$+c^2 R_2(M - \sigma_\tau(h-d_1-d_2)(d_2-d_1)/2)\int_{-1}^{1} K_{13}(x-s)h(s)ds = \pi(T_2^* - \sigma_\tau(d_1+d_2)),$$

$$\int_{-1}^{1}\sum_{j=1,3} K_{3j}(x-s)g_j(s)ds + (T-\sigma_\tau(d_1+d_2))\int_{-1}^{1} K_{31}(x-s)h(s)ds +$$

$$+c^2R_2(M-\sigma_\tau(h-d_1-d_2)(d_2-d_1)/2)\left(\int\limits_{-1}^{1}K_{33}^{\tau}(x-s)h(s)ds+\pi a\right)=$$

$$-\pi c^2R_2\sigma_\tau(h-d_1-d_2)(d_2-d_1)/2, \qquad (7)$$

де стала a визначається із умови існування розв'язку рівняння (6):

$$a=\frac{2}{\pi}\arccos(\tau^*).$$

Праві частини системи (7) є неперервними функціями, що дозволяє розв'язувати систему СІР методом механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях відрізка інтегрування.

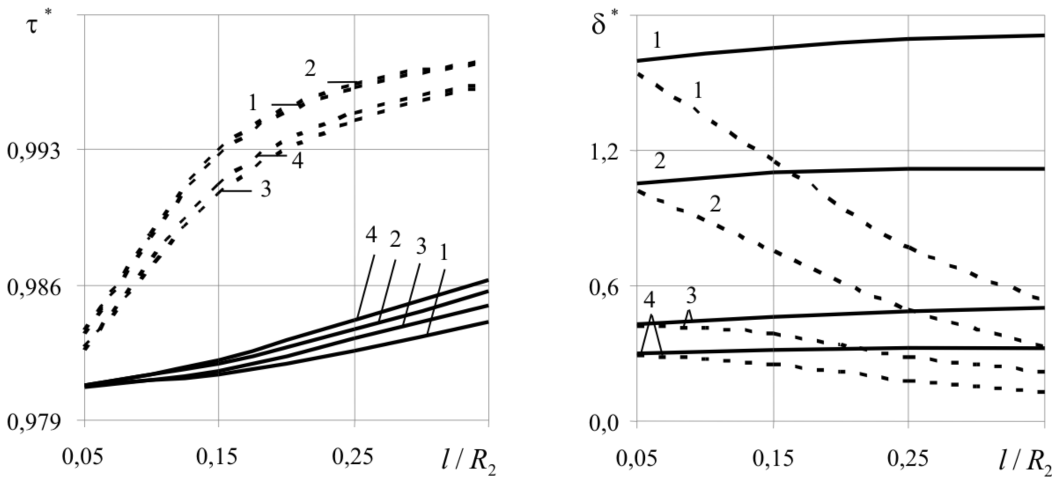

Рис. 2. Залежність τ^* і δ^* від l/R_2 $(d_1=0,25,\ d_2=0,15)$

3. Результати. Числовий аналіз було проведено для ортотропної оболонки довільної кривини з повздовжньою внутрішньою тріщиною. При розв'язанні системи (7) використовувалася умова пластичності (3).

Відносне розкриття тріщини обчислювалося за формулою:

$$\delta^*=\frac{4l}{l_1}\frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau}\chi^2\left(\sqrt{\frac{a}{1-\mu}}\int\limits_{-1}^{0}\psi_1(s)ds+\left(\frac{1}{2}-\frac{d_2}{h}\right)\frac{\sqrt{12(1-v^2}}{(1-v)(3+v-2\mu)}\int\limits_{-1}^{0}\psi_3(s)ds\right),$$

де $\sigma_2^*=T_2^*/h$.

На рис.2–рис.3 суцільні лінії відповідають циліндричній оболонці, а пунктирні лінії – сферичній. При цьому відносне навантаження вважалося рівним $\sigma_2^*/\sigma_\tau=0,4$.

Криві 1–4 відповідають ортотропним матеріалам I–IV:

I - $E_1=14,9*10^6$ Па, $E_2=0,6*10^6$ Па, $G_{12}=0,4*10^6$ Па, $v=0,31$;

II - $E_1=40*10^6$ Па, $E_2=4*10^6$ Па, $G_{12}=1,5*10^6$ Па, $v=0,31$;

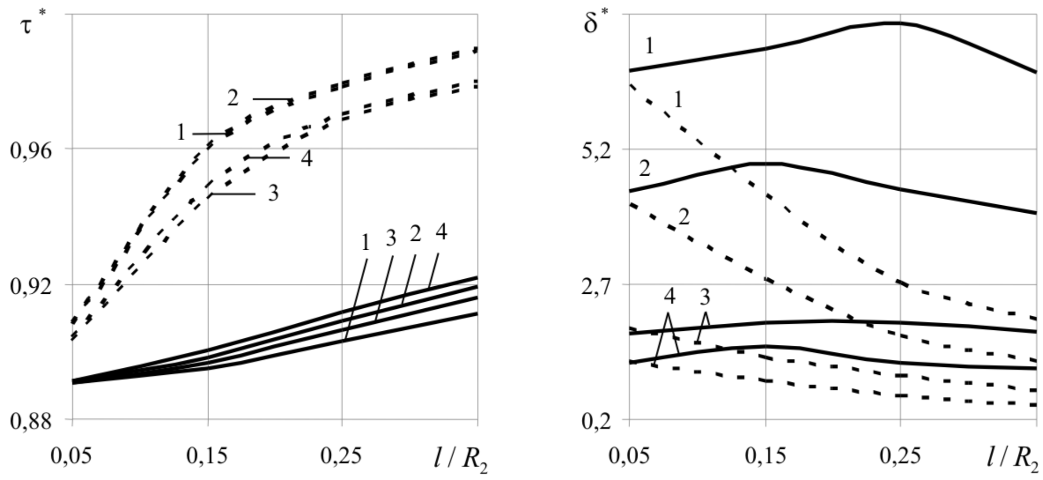

Рис. 3. Залежність τ^* і δ^* від l/R_2 $(d_1 = 0,35,\ d_2 = 0,05)$

III - $E_1 = 6,25 * 10^6$ Па, $E_2 = 2,12 * 10^6$ Па, $G_{12} = 0,9 * 10^6$ Па, $v = 0,25$;

IV - $E_1 = 2,1 * 10^6$ Па, $E_2 = 1,6 * 10^6$ Па, $G_{12} = 0,41 * 10^6$ Па, $v = 0,07$.

4. Висновки. На основі проведених числових розрахунків можна зробити наступні висновки:

– при збільшенні довжини тріщини l/R_2, відносне розкриття тріщини δ^* в сферичних і псевдосферичних оболонках зменшується, а в циліндричних – збільшується, а відносний розмір пластичної зони $1 - \tau^*$ монотонно зменшується для оболонок будь-якої кривини і матеріалу;

– якщо внутрішню тріщину наближувати до будь-якої із зовнішніх поверхонь, то обидві характеристики δ^* і τ^* збільшуються. Найменшого значення δ^* і τ^* досягають, коли внутрішня тріщина розташована симетрично відносно зовнішніх поверхонь;

– зі збільшенням параметру χ обидві характеристики δ^* і τ^* збільшуються.

1. *Довбня Е.Н., Гордиенко Н.Н.* Моделирование напряженного состояния упруго-пластической ортотропной оболочки произвольной кривизны со сквозной трещиной // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007. – Вып.2 (28). – С.109-113.
2. *Довбня Е.Н., Гордиенко Н.Н., Яртемик В.В.* Внутренняя трещина в упругой и упруго-пластической оболочке произвольной кривизны // Материалы XVIII Международной научной школы им. академика С.А.Христиановича "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках". – Алушта, 22-28 сентября 2008. – С.79-81.
3. *Довбня К.М., Корохіна О.А.* Залежність розміру пластичних зон, що передують внутрішній тріщині у пружно-пластичній оболонці, від глибини тріщини та кривини оболонки // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ. – 2005. – №7 – С.14-20.
4. *Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320с.
5. *Кушнір Р.М., Николишин М.М., Ростун М.Й.* Напружений стан і гранична рівновага скінченної

циліндричної оболонки з регулярною системою внутрішніх тріщин // Машинознавство. – 2005. – №1. – С.3-7.

6. *Композиционные материалы.* Под ред. Браутман Л., Крок Р., Т.2. – Механика композиционных материалов. Под ред. Сендецки Дж. – М.: Мир, 1978. – 564с.
7. *Осадчук В.А., Николишин Т.М.* Математична модель внутрішньої тріщини в пружнопластичній циліндричній оболонці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, №2. – С.111-116.
8. *Шевченко В.П., Довбня Е.Н., Цванг В.А.* Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Концентрация напряжений / Под ред. Гузя А.Н., Космодамианского А.С., Шевченко В.П. – К: А.С.К., 1998. – 387с. – (Механика композитов: в 12т.; Т.7). – С.212-249.

Донецький національний ун-т
dovbnya@matfak.dongu.donetsk.ua

Получено 15.11.08