УДК 519.21

©2008. **Б.В. Бондарев, С.М. Козырь**

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрена обратная задача Коши уравнения с периодическими быстро осцилирующими коэффициентами. Используя вероятностное представление решения, найдена скорость сходимости решения исходной задачи к решению соответствующей усредненной задачи.

Введение. В работе [1] приведены достаточные условия для того, чтобы семейство мартингалов μ_t^ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$ было "близко" к винеровскому семейству $\sigma W_\varepsilon(t), t \in [0,T]$ в смысле метрики $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} M\left|\mu_t^\varepsilon - \sigma W_\varepsilon(t)\right|^2 \leqslant \gamma_\varepsilon$, где функция $\gamma_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ выписана в явном виде, а именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\left\{\mu_t, \Im_0^t, t \geqslant 0\right\}$ *– непрерывный локальный мартингал, такой что* $\lim\limits_{t\to+\infty} [\mu,\mu]_t = +\infty$, *а* $\tau_t = \inf\left\{s > 0 : [\mu,\mu]_s \geqslant \sigma^2 t\right\}$ *конечный марковский момент для каждого* $t > 0$. *Тогда найдётся стандартный винеровский процесс* W_t, *такой, что выполняется неравенство*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} M\left|\varepsilon\mu_{t/\varepsilon^2} - \sigma\varepsilon W_{t/\varepsilon^2}\right|^2 \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} M\left|\varepsilon^2\left\langle\mu,\mu\right\rangle_{t/\varepsilon^2} - \sigma^2 t\right|. \tag{1}$$

В настоящей работе рассматривается решение однородного по времени стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, именно решение уравнения

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \alpha(\xi(s))ds + \int_0^t \beta(\xi(s))dW(s), \tag{2}$$

где $W(s)$ – стандартный винеровский процесс, $\xi(0)$ – неслучайное начальное условие, периодические с периодом 1 коэффициенты, такие, что

$$\begin{aligned} &\alpha(x) = \alpha(x+1), \quad \beta(x) = \beta(x+1), \quad |\alpha(x)| \leqslant K < +\infty, \\ &0 < \lambda \leqslant \beta^2(x) \leqslant K < +\infty, \\ &|\alpha(x) - \alpha(y)| + |\beta(x) - \beta(y)| \leqslant L\,|x-y|\,. \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве μ_t^ε будет взят процесс

$$\mu_t^\varepsilon = \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi(s))dW(s). \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке гранта ДФФД Ф25 (для ВНЗ)

Используя вероятностное представление решения, будет найдена оценка скорости сходимости в обратной задаче Коши с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами.

1. Вспомогательные результаты. Оценка скорости сближения нормированных интегралов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами с семейством непрерывных мартингалов. Пусть $\rho(x)$ – решение периодической задачи

$$\begin{cases} L^*\rho = \frac{1}{2}\frac{d^2(\rho(x)\beta^2(x))}{dx^2} - \frac{d(\rho(x)\alpha(x))}{dx} = 0, \\ \rho(x) = \rho(x+1), \end{cases} \tag{5}$$

однозначно определённое условием нормировки

$$\int\limits_0^1 \rho(x)dx = 1. \tag{6}$$

Для заданных $a(x), \beta(x)$ введём также и линейный оператор (см., например, [2])

$$LU = \frac{1}{2}\beta^2(x)\frac{d^2U}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dU}{dx}. \tag{7}$$

Имеет место следующее утверждение: пусть $\alpha(x), \beta(x)$ удовлетворяют условиям (3), тогда для произвольной 1-периодической функции $f(x)$ существует и единственная постоянная $\bar{f}$, такая, что периодическая задача

$$\begin{cases} LU = f - \bar{f}, \\ U(x+1) = U(x), \frac{dU}{dx}(x+1) = \frac{dU}{dx}(x) \end{cases} \tag{8}$$

имеет [3] единственное решение, принадлежащее пространству Соболева $W^{2,p}[0,1)$ при каждом $p \in [1, +\infty)$, причём постоянная $\bar{f}$ подсчитывается по формуле $\bar{f} = \int\limits_0^1 f(x)\rho(dx)$. Займёмся решением задачи (5). Пусть (см. [2])

$$\vartheta(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x \frac{2\alpha(y)}{\beta^2(y)}dy\right\}. \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0,1]$ для $\vartheta(x)$ справедливы оценки

$$0 < \exp\left\{-\frac{2K}{\lambda}\right\} = C^{-1} \leqslant \vartheta(x) \leqslant C = \exp\left\{\frac{2K}{\lambda}\right\} < +\infty. \tag{10}$$

Рассмотрим (см. [2]) функцию

$$G_0(x) = \frac{2}{(1+\vartheta(1))\beta^2(x)\vartheta(x)}\left[\vartheta(1)\int\limits_0^x \vartheta(y)dy + \int\limits_x^1 \vartheta(y)dy\right]. \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что введенная функция $G_0(x)$ периодическая с периодом 1 функция. Таким образом,

$$\rho(x) = G_0(x)\left[\int\limits_0^1 G_0(y)dy\right]^{-1} \tag{12}$$

является решением задачи (5) и удовлетворяет (6). Хорошо известно, что (см. [4], стр.373) справедлива оценка

$$\sup_x \left|Mf(\xi_x(t)) - \bar{f}\right| \leqslant c\sup_x |f(x)| \exp\left\{-\gamma t\right\}, \tag{13}$$

где постоянные $c > 0$, $\gamma > 0$ определяются через коэффициенты уравнения (2). Обозначим через $\psi(x) = \frac{dU}{dx}$, тогда (8) перепишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} + \frac{2\alpha(x)}{\beta^2(x)}\psi(x) = \frac{2\left[f(x)-\bar{f}\right]}{\beta^2(x)}, \\ \psi(x+1) = \psi(x). \end{cases} \tag{14}$$

Нетрудно убедиться в том, что решением задачи (14) будет функция

$$\psi(x) = -\vartheta^{-1}(x)\left[\int\limits_x^1 \vartheta(y)\frac{2\left[f(y)-\bar{f}\right]}{\beta^2(y)}dy\right]. \tag{15}$$

В силу периодичности замечаем, что решение задачи (14) ограничено:

$$|\psi(x)| \leqslant \frac{4C^2}{\lambda}K = D_\psi. \tag{16}$$

Нетрудно убедиться также и в том, что решением уравнения (8) будет функция

$$U(x) = -\int\limits_0^{+\infty} M\left[f(\xi_x(t)) - \bar{f}\right]dt, \tag{17}$$

где $\xi_x(t) = x + \int\limits_0^t \alpha(\xi_x(s))ds + \int\limits_0^t \beta(\xi_x(s))dW(s)$. Покажем периодичность функции $U(x)$. Пусть $x \in [k, k+1)$, $k \in Z, Z$ – множество целых чисел, а

$$\xi_x(t) = x + \int\limits_0^t \alpha(\xi_x(s))ds + \int\limits_0^t \beta(\xi_x(s))dW(s). \tag{18}$$

Наряду с (18) рассмотрим уравнение

$$\xi_{x+1}(t) = x + 1 + \int\limits_0^t \alpha(\xi_{x+1}(s))ds + \int\limits_0^t \beta(\xi_{x+1}(s))dW(s).$$

В силу периодичности коэффициентов $\alpha(x), \beta(x)$ имеем

$$\xi_{x+1}(t) - 1 = x + \int\limits_0^t \alpha(\xi_{x+1}(s) - 1 + 1)ds + \int\limits_0^t \beta(\xi_{x+1}(s) - 1 + 1)dW(s),$$

откуда

$$\eta(t) = x + \int\limits_0^t \alpha(\eta(s))ds + \int\limits_0^t \beta(\eta(s))dW(s), \tag{19}$$

где $\eta(t) = \xi_{x+1}(t) - 1$. В силу единственности решения (19) следует $\eta(t) = \xi_x(t)$, $\xi_{x+1}(t) = 1 + \xi_x(t)$, а в силу периодичности $f(x)$ имеем $f(\xi_{x+1}(t)) = f(\xi_x(t))$, откуда в силу представления (17) следует периодичность $U(x)$. Таким образом, представление решения задачи (8) в виде (17) доказано. Из (17) с учётом (13) следует ограниченность решения (8). Действительно

$$|U(x)| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \left|M\left[f(\xi_x(t)) - \bar{f}\right]\right| dt \leqslant Kc \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-\gamma t\}\, dt = \frac{Kc}{\gamma} = D_u. \tag{20}$$

Пусть $U(x)$ – решение задачи (8), тогда, применяя формулу Ито к процессу $U(\xi(t))$, получим

$$d_t U(\xi(t)) = LU(\xi(t))dt + \beta(\xi(t))\psi(\xi(t))dW(t).$$

Из последнего в силу (8) следует

$$d_t U(\xi(t)) = \left[f(\xi(t)) - \bar{f}\right] dt + \beta(\xi(t))\psi(\xi(t))dW(t).$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от 0 до $t/_{\varepsilon^2}$, имеем

$$\varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \left[f(\xi(s)) - \bar{f}\right] ds = -\varepsilon^2 [U(\xi(t/\varepsilon)) - U(\xi(0))] - \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi(s))\psi(\xi(s))dW(s). \tag{21}$$

Резюмируя выкладки, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Пусть диффузионный процесс задан как решение уравнения (2), выполнены условия (3), тогда для любой 1-периодической функции$f(x)$ ($|f(x)| \leqslant K < +\infty$) с вероятностью единица, справедлива оценка*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \left[f(\xi(s)) - \bar{f}\right] ds + \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi(s))\psi(\xi(s))dW(s) \right| \leqslant \varepsilon^2 2\frac{Kc}{\gamma}, \tag{22}$$

где постоянные $c > 0, \gamma > 0$ из оценки (13), функция $\psi(x)$ задаётся формулой (15), а $\rho(x)$ задаётся формулой (12), где $G_0(x)$ задано в (11).

Следствие 1.

$$M \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} f(\xi(s))ds - \bar{f}t \right| \leqslant \varepsilon^2 2D_u +$$
$$+\varepsilon M \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi(s))\psi(\xi(s))dW(s) \right| \leqslant \varepsilon^2 \frac{2Kc}{\gamma} + \varepsilon\sqrt{T}\frac{8C^2}{\lambda}K\sqrt{K}. \tag{23}$$

Следствие 2.

$$M \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta^2\left(\xi(s)\right)ds - t\bar{\beta}^2 \right| \leqslant \varepsilon^2 \frac{2Kc}{\gamma} + \varepsilon\sqrt{T}\frac{8C^2}{\lambda}K\sqrt{K}, \tag{24}$$

где

$$\bar{\beta}^2 = \int\limits_0^1 \beta^2(x)\rho(x)dx. \tag{25}$$

Лемма 2. *Из (25) и (1) в условиях леммы 1 следует оценка*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} M \left| \varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi(s))dW(s) - \bar{\beta}\tilde{W}_\varepsilon(t) \right|^2 \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} M \left| \varepsilon^2 \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \beta^2(\xi(s))ds - \bar{\beta}^2 t \right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \frac{2Kc}{\gamma} + \varepsilon\sqrt{T}\frac{8C^2}{\lambda}K\sqrt{K}. \tag{26}$$

Действительно, в силу оценки (24) $\langle \mu, \mu \rangle_t \to +\infty$ с вероятностью1и моменты $\tau_t = \inf\left\{ s : \langle \mu, \mu \rangle_s \geqslant \bar{\beta}^2 t \right\}$ для любого $t > 0$ с вероятностью1 конечны, т.е. имеет место (1), в силу чего имеем (27).

2. Оценка скорости: сближения решений. Наряду с (2) рассмотрим случайный процесс

$$\varsigma^\varepsilon_{t,x/\varepsilon}(s) = \frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon \int\limits_t^s \alpha\left(\varsigma^\varepsilon_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau + \int\limits_t^s \beta\left(\varsigma^\varepsilon_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau), \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T. \tag{27}$$

Введём в (28) "быстрое" время и умножим обе части уравнения на $\varepsilon > 0$, получим

$$\varepsilon\varsigma^\varepsilon_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right) = x + \varepsilon^2 \int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2} \alpha\left(\varsigma^\varepsilon_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau + \varepsilon \int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2} \beta\left(\varsigma^\varepsilon_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau), \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T. \tag{28}$$

Наряду с (29) рассмотрим процесс

$$\tilde{\eta}^{\varepsilon}_{t,x}(s) = x + \int\limits_t^s \bar{\alpha} d\tau + \int\limits_t^s \bar{\beta} d\tilde{W}_{\varepsilon}(\tau), \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T, \tag{29}$$

где

$$\bar{\alpha} = \int\limits_0^1 \alpha(x)\rho(x)dx, \quad \bar{\beta}^2 = \int\limits_0^1 \beta^2(x)\rho(x)dx, \rho(x) = \frac{1}{\beta^2(x)} \left[\int\limits_0^1 \frac{dy}{\beta^2(y)} \right]^{-1}. \tag{30}$$

Теорема 2. *В условиях (3) справедлива оценка*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T} M \left| \varepsilon \varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right) - \tilde{\eta}^{\varepsilon}_{t,x}(s) \right| \leqslant \varepsilon^2 \frac{4Kc}{\gamma} + \varepsilon T \frac{16 C_{\varepsilon}^2}{\lambda} K\sqrt{K} +$$
$$+ \varepsilon \left(4\frac{K^4}{\lambda^3} + \frac{K^3}{\lambda^2} \right) \exp\left\{10\varepsilon K/\lambda\right\} \left(T + \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}} \right) + \left(\varepsilon^2 \frac{4Kc}{\gamma} + \varepsilon T \frac{16 C_{\varepsilon}^2}{\lambda} K\sqrt{K} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

здесь и далее

$$C_{\varepsilon} = \exp\left\{ \frac{2\varepsilon K}{\lambda} \right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s) = x + \int\limits_t^s \bar{\alpha}_{\varepsilon} d\tau + \int\limits_t^s \bar{\beta}_{\phi} d\tilde{W}_{\varepsilon}(\tau), \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T, \tag{32}$$

где

$$\bar{\alpha}_{\varepsilon} = \int\limits_0^1 \alpha(x)\rho_{\varepsilon}(x)dx, \bar{\beta}^2_{\varepsilon} = \int\limits_0^1 \beta^2(x)\rho_{\varepsilon}(x)dx,$$

здесь

$$\vartheta_{\varepsilon}(x) = \exp\left\{ 2\varepsilon \int\limits_0^x \frac{\alpha(y)dy}{\beta^2(y)} \right\},$$
$$G^{\varepsilon}_0(x) = \frac{2}{(1 + \vartheta_{\varepsilon}(1))\beta^2(x)\vartheta_{\varepsilon}(x)} \left[\vartheta_{\varepsilon}(1) \int\limits_0^x \vartheta_{\varepsilon}(y)dy + \int\limits_x^1 \vartheta_{\varepsilon}(y)dy \right], \tag{33}$$
$$\rho_{\varepsilon}(x) = G^{\varepsilon}_0(x) \left[\int\limits_0^1 G^{\varepsilon}_0(y)dy \right]^{-1}.$$

Вычитая (33) из (29), получим

$$\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)-\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s)=\varepsilon^2\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau-\int\limits_t^s\bar{\alpha}_\varepsilon d\tau+$$
$$+\varepsilon\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau)-\int\limits_t^s\bar{\beta}_\varepsilon d\tilde{W}_\varepsilon(\tau),\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T. \tag{34}$$

Откуда,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}M\left|\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)-\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}M\left|\varepsilon^2\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau-\int\limits_t^s\bar{\alpha}_\varepsilon d\tau\right|+$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}M\left|\varepsilon\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau)-\int\limits_t^s\bar{\beta}_\varepsilon d\tilde{W}_\varepsilon(\tau)\right|\leqslant \tag{35}$$
$$\leqslant\varepsilon^2\frac{4Kc}{\gamma}+\varepsilon\sqrt{T}\frac{16C_\varepsilon^2}{\lambda}K\sqrt{K}+\left(\varepsilon^2\frac{4Kc}{\gamma}+\varepsilon T\frac{16C_\varepsilon^2}{\lambda}K\sqrt{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введём обозначения. Пусть

$$c_\varepsilon=\int\limits_0^1G_0^\varepsilon(x)dx\geqslant\int\limits_0^1\frac{2}{(1+\vartheta_\varepsilon(1))\beta^2(x)\vartheta_\varepsilon(x)}\left[\vartheta_\varepsilon(1)\int\limits_0^x\vartheta_\varepsilon(y)dy+\int\limits_x^1\vartheta_\varepsilon(y)dy\right]dx\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2\exp\left\{-6\varepsilon K/\lambda\right\}}{K},\quad c_0=\int\limits_0^1\frac{2dy}{\beta^2(y)}\geqslant\frac{2}{K}.$$

Нетрудно заметить, что

$$|c_\varepsilon-c_0|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1\left|\frac{2}{(1+\vartheta_\varepsilon(1))\vartheta_\varepsilon(y)}\left[\vartheta_\varepsilon(1)\int\limits_0^y\vartheta_\varepsilon(z)dz+\int\limits_y^1\vartheta_\varepsilon(z)dz\right]-2\right|dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\lambda}\left|\frac{1}{(1+\vartheta_\varepsilon(1))\exp\left\{-2\varepsilon K/\lambda\right\}}\left[\vartheta_\varepsilon(1)\int\limits_0^1\vartheta_\varepsilon(z)dz+\int\limits_0^1\vartheta_\varepsilon(z)dz\right]-1\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\lambda}\left|\frac{\exp\left\{2\varepsilon K/\lambda\right\}}{\exp\left\{-2\varepsilon K/\lambda\right\}}-1\right|\leqslant\frac{2}{\lambda}\left|\exp\left\{4\varepsilon K/\lambda\right\}-1\right|\leqslant\frac{8\varepsilon K}{\lambda^2}\exp\left\{4\varepsilon K/\lambda\right\}.$$

Нетрудно также заметить, что

$$
\begin{aligned}
&|\rho_\varepsilon(x)-\rho(x)| = \left|\frac{G_0^\varepsilon(x)}{c_\varepsilon} - \frac{2}{c_0\beta^2(x)}\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\frac{2}{c_\varepsilon(1+\vartheta_\varepsilon(1))\vartheta_\varepsilon(x)\beta^2(x)}\left[\vartheta_\varepsilon(1)\int\limits_0^x \vartheta_\varepsilon(z)dz + \int\limits_x^1 \vartheta_\varepsilon(z)dz\right] - \frac{2}{c_0\beta^2(x)}\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{K^2}{2\lambda}\exp\{6\varepsilon K/\lambda\}|c_\varepsilon - c_0| + \varepsilon\frac{K^2\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}}{\lambda^2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{K^2}{2\lambda}\exp\{6\varepsilon K/\lambda\}\frac{8\varepsilon K}{\lambda^2}\exp\{4\varepsilon K/\lambda\} + \varepsilon\frac{K^2\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}}{\lambda^2} \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\left(4\frac{K^3}{\lambda^3} + \frac{K^2}{\lambda^2}\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
|\rho_\varepsilon(x)-\rho(x)| \leqslant \varepsilon\left(4\frac{K^3}{\lambda^3} + \frac{K^2}{\lambda^2}\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}, \tag{36}
$$

а

$$
\begin{aligned}
&|\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha| \leqslant \int\limits_0^1 |\alpha(x)|\,|\rho_\varepsilon(x)-\rho(x)|\,dx \leqslant \varepsilon\left(4\frac{K^4}{\lambda^3} + \frac{K^3}{\lambda^2}\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}, \\
&\left|\bar\beta_\varepsilon^2 - \bar\beta^2\right| \leqslant \int\limits_0^1 \beta^2(x)\,|\rho_\varepsilon(x)-\rho(x)|\,dx \leqslant \varepsilon\left(4\frac{K^4}{\lambda^3} + \frac{K^3}{\lambda^2}\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Так как $\left|\eta_{t,x}^\varepsilon(s) - \tilde\eta_{t,x}^\varepsilon(s)\right| = [\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha](s-t) + \left[\bar\beta_\varepsilon - \bar\beta\right]\left(\tilde W_\varepsilon(s) - \tilde W_\varepsilon(t)\right), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T,$ то

$$
\begin{aligned}
&M\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}\left|\eta_{t,x}^\varepsilon(s) - \tilde\eta_{t,x}^\varepsilon(s)\right| \leqslant |\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha|\,T + \left|\bar\beta_\varepsilon - \bar\beta\right| M\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}\left|\tilde W_\varepsilon(s) - \tilde W_\varepsilon(t)\right| \leqslant \\
&\leqslant |\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha|\,T + 2\frac{\left|\bar\beta_\varepsilon^2 - \bar\beta^2\right|}{\left|\bar\beta_\varepsilon\right| + \left|\bar\beta\right|} M\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\tilde W_\varepsilon(t)\right| \leqslant |\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha|\,T + \\
&+ \frac{\left|\bar\beta_\varepsilon^2 - \bar\beta^2\right|}{\sqrt\lambda}\left[M\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\tilde W_\varepsilon(t)\right|^2\right]^{1/2} \leqslant |\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha|\,T + 2\frac{\left|\bar\beta_\varepsilon^2 - \bar\beta^2\right|}{\sqrt\lambda}\left[M\left|\tilde W_\varepsilon(T)\right|^2\right]^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant |\bar\alpha_\varepsilon - \bar\alpha|\,T + 2\frac{\left|\bar\beta_\varepsilon^2 - \bar\beta^2\right|}{\sqrt\lambda}\sqrt{T},
\end{aligned}
$$

то с учётом (37) имеем оценку

$$
M\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T}\left|\eta_{t,x}^\varepsilon(s) - \tilde\eta_{t,x}^\varepsilon(s)\right| \leqslant \varepsilon\left(4\frac{K^4}{\lambda^3} + \frac{K^3}{\lambda^2}\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}\left(T + \frac{2\sqrt T}{\sqrt\lambda}\right). \tag{38}
$$

Из (36) и (38) следует оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant T} M\left|\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)-\tilde{\eta}^{\varepsilon}_{t,x}(s)\right|\leqslant \varepsilon^2\frac{4Kc}{\gamma}+\varepsilon\sqrt{T}\frac{16C^2_{\varepsilon}}{\lambda}K\sqrt{K}+$$
$$+\varepsilon\left(4\frac{K^4}{\lambda^3}+\frac{K^3}{\lambda^2}\right)\exp\left\{10\varepsilon K/\lambda\right\}\left(T+\frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}\right)+\left(\varepsilon^2\frac{4Kc}{\gamma}+\varepsilon T\frac{16C^2_{\varepsilon}}{\lambda}K\sqrt{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2 доказана. □

Рассмотрим одно интересное приложение полученных результатов.

4. Обратная задача Коши для уравнения с правой частью. Рассмотрим ([5], стр.167) решение уравнения

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial x}=$$
$$=f(t,x),\quad u^{\varepsilon}(T,x)=\varphi(x),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{39}$$

функции $f(t,x),\varphi(x)$ ограничены $|f(t,x)|\leqslant K<+\infty, |\varphi(x)|\leqslant K<+\infty$ и липшицевы по x. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi^{\varepsilon}_{t,x}(s)=x+\int\limits_t^s\alpha\left(\frac{\xi^{\varepsilon}_{t,x}(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau+\int\limits_t^s\beta\left(\frac{\xi^{\varepsilon}_{t,x}(\tau)}{\varepsilon}\right)dW(\tau),\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T. \tag{40}$$

Справедливо представление (см. [5] , стр.167). решения (69) в виде

$$u^{\varepsilon}(t,x)=M\varphi\left(\xi^{\varepsilon}_{t,x}(T)\right)-M\int\limits_t^T f(s,\xi^{\varepsilon}_{t,x}(s))ds. \tag{41}$$

Наряду с (41) рассмотрим случайный процесс

$$\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(s)=\frac{x}{\varepsilon}+\varepsilon\int\limits_t^s\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau+\int\limits_t^s\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau),\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T. \tag{42}$$

Введём в (42) "быстрое" время и умножим обе части уравнения на $\varepsilon>0$, получим

$$\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)=x+\varepsilon^2\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau+\varepsilon\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau),\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T. \tag{43}$$

Из (43) следует

$$\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t,x}\left(s/\varepsilon^2\right)=x+\int\limits_t^s\alpha\left(\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau/\varepsilon^2)/\varepsilon\right)d\tau+\int\limits_t^s\beta\left(\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau/\varepsilon^2)/\varepsilon\right)d\varepsilon W(\tau/\varepsilon^2), \tag{44}$$
$$0\leqslant t\leqslant s\leqslant T.$$

В силу того, что $\varepsilon W(\tau/\varepsilon^2)$ – стандартный винеровский процесс, то можно утверждать, что меры, порождённые в пространстве $C[0,T]$ процессом $\xi^{\varepsilon}_{t,x}(s)$ и процессом $\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x/\varepsilon}\left(s/\varepsilon^2\right)$, будут совпадать, а поэтому справедливо представление

$$u^{\varepsilon}(t,x)=M\varphi\left(\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x/\varepsilon}(T/\varepsilon^2)\right)-M\int\limits_t^T f(s,\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x/\varepsilon}\left(s/\varepsilon^2\right))ds. \tag{45}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (3) и к тому же* $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L\,|x-y|\,,\ |\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant L\,|x-y|$, *тогда справедлива оценка*

$$|u^{\varepsilon}(t,x)-u(t,x)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}C(\varepsilon,T), \tag{46}$$

где

$$C(\varepsilon,T)=L(1+T)\left[\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\frac{4Kc}{\gamma}+\sqrt{T}\frac{16C_{\varepsilon}^2}{\lambda}K\sqrt{K}\sqrt{\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\left(4\frac{K^4}{\lambda^3}+\frac{K^3}{\lambda^2}\right)\exp\left\{10\varepsilon K/\lambda\right\}\left(T+\frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}\right)\sqrt{\varepsilon}+\left(\varepsilon\frac{4Kc}{\gamma}+T\frac{16C_{\varepsilon}^2}{\lambda}K\sqrt{K}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Доказательство очевидно в силу липшицевости коэффициентов $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L\,|x-y|\,,|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant L\,|x-y|$ и оценки (32).

Выводы. Уравнения вида (40) возникают во многих приложениях и привлекали внимание многих известных исследователей: достаточно назвать имена Ж.Лионса, А.Бенсусана, Н.С.Бахвалова, Г.П.Панасенко, О.А.Олейник, В.В. Жикова, С.М.Козлова, М.И.Фрейдлина, В.В.Юринского и др. Усреднённое уравнение является значительно более простым, его решение можно выписать в явном виде, поэтому вопросы о точности аппроксимации решения исходной задачи решением усреднённой, весьма актуальны как с теоретической, так и с практической точек зрения.

1. *Бондарев Б.В., Ковтун Е.Е.* Оценка скорости сходимости в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Укр. мат. журн. – 2005. – т.57, №4 – С.435-457.
2. *Сафонова О.А.* Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – т.44 – С.245-252.
3. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 351с.
4. *Bensoussan A., Lions J.-L, Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – North-Holland Publishing Company, 1978, 700p.
5. *Скороход А.В.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ. – Т.43. – 1989. – 274с.

Донецкий национальный ун-т
bvbondarev@cable.netlux.org

Получено 06.12.08