УДК 517.5

©2008. **А.Н. Миненкова**

О ХАРАКТЕРЕ НЕИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

В этой статье изучается характер неинтегрируемости продолжения решения уравнения свертки для определенного типа свертывателя. Получена нижняя оценка для интеграла функции, которая является решением уравнения свертки, в окрестности любой точки, лежащей вне наименьшего отрезка, содержащего носитель свертывателя. Использован метод исследования, аналогичный методу доказательства Теоремы 3.20 в [1].

Введение. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, где $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ – пространство распределений с компактными носителями. $r(T)$ – длина наименьшего отрезка, содержащего носитель T. Предположим, что

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, b - a > 2r(T).$$

Положим

$$(a,b)_T = \{t \in \mathbb{R}^1 : t - \mathrm{supp}T \subset (a,b)\}.$$

Обозначим $C_T(a,b)$ – класс непрерывных функций f, которые являются решением уравнения свертки

$$(f * T)(t) = 0, \quad t \in (a,b)_T. \tag{1}$$

Пусть $\widehat{T} = \langle T, e^{-izt} \rangle$ – преобразование Фурье T, $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ – множество всех нулей $\widehat{T}$. Для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$ обозначим

$$m(\lambda, T) = n_\lambda(\widehat{T}) - 1,$$

где $n_\lambda(\widehat{T})$ – кратность нуля λ функции $\widehat{T}$.

Появлению этой работы предшествует изучение вопроса о неинтегрируемых продолжениях решений уравнений свертки. В связи с этим в [1,стр.86] получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ и предположим, что*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{m(\lambda, T)}{1 + |\mathrm{Im}\lambda|} = \infty. \tag{2}$$

Тогда для каждого $R > r(T)$ существует функция $f \in C_T(-R,R)$ такая, что $f|_{(0,R)} \notin L^1(0,R)$ и $f|_{(-R,0)} \notin L^1(-R,0)$. В частности, функция f не допускает непрерывного продолжения на [-R,R].

1. Некоторые вспомогательные утверждения. Для доказательства основного результата статьи понадобятся некоторые дополнительные утверждения.

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ – пространство распределений. Обозначим $\mathcal{D}'_T(a,b)$ – множество всех распределений f, которые удовлетворяют (5).

Для $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$e^{z,m}(t) = (it)^m e^{izt}.$$

Пусть $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – ненулевая целая функция, n_λ – кратность ее нуля λ. Определим последовательность $\{a_j^{\lambda,\eta}\}(g)$, $j = 0, ..., n_\lambda - 1$ так:

$$a_j^{\lambda,\eta}(g) = \begin{cases} 0, & j < \eta, \\ \frac{n_\lambda!}{\eta! g^{(n_\lambda)}(\lambda)}, & j = \eta. \end{cases}$$

Для дальнейшего понадобится такая целая функция

$$a^{\lambda,\eta}(g,z) = \sum_{j=0}^{n_\lambda - 1} a_j^{\lambda,\eta}(g) \frac{g(z)}{(z-\lambda)^{n_\lambda - j}}.$$

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, ..., m(\lambda, T)\}$ и $f \in \mathcal{D}'_T(a,b)$. Можно показать, что для некоторых $c_{\lambda,\eta}(T,f) \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$f * T_{\lambda,0} = \sum_{\eta=0}^{m(\lambda,T)} c_{\lambda,\eta}(T,f) e^{\lambda,\eta},$$

где свертка рассматривается в $(a+r(T), b-r(T))$, а $T_{\lambda,0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ определяется таким образом

$$r(T_{\lambda,0}) = r(T)$$

и

$$\widehat{T}_{\lambda,0}(z) = a^{\lambda,0}(\widehat{T}, z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$ и $f \in \mathcal{D}'(a,b)$ и предположим, что*

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda,T)} \gamma_{\lambda,\eta} e^{\lambda,\eta},$$

где $\gamma_{\lambda,\eta} \in \mathbb{C}$, и ряд сходится в $\mathcal{D}'(a,b)$. Тогда $f \in \mathcal{D}'_T(a,b)$ и $\gamma_{\lambda,\eta} = c_{\lambda,\eta}(T,f)$.

Доказательство этой теоремы приводится в [1, гл.3].

Для облегчения вычислений докажем следующую лемму.

Лемма 2.

$$\int_a^b t^k e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!} (e^{-\alpha a}(\alpha a)^n - e^{-\alpha b}(\alpha b)^n).$$

Доказательство леммы. Найдем исходный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int_a^b t^k e^{-\alpha t}dt = \frac{b^k e^{-\alpha b}}{-\alpha} - \frac{a^k e^{-\alpha a}}{-\alpha} + \frac{k}{\alpha}\int_a^b t^{k-1}e^{-\alpha t}dt = \frac{b^k e^{-\alpha b}}{-\alpha} - \frac{a^k e^{-\alpha a}}{-\alpha} + \frac{kb^{k-1}e^{-\alpha b}}{-\alpha^2} -$$

$$-\frac{ka^{k-1}e^{-\alpha a}}{-\alpha^2} + \frac{k(k-1)}{\alpha^2}\int_a^b t^{k-2}e^{-\alpha t}dt = \frac{b^k e^{-\alpha b}}{-\alpha} - \frac{a^k e^{-\alpha a}}{-\alpha} + \frac{kb^{k-1}e^{-\alpha b}}{-\alpha^2} -$$

$$-\frac{ka^{k-1}e^{-\alpha a}}{-\alpha^2} + \frac{k(k-1)b^{k-2}e^{-\alpha b}}{-\alpha^3} - \frac{k(k-1)a^{k-2}e^{-\alpha a}}{-\alpha^3} +$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)}{\alpha^3}\int_a^b t^{k-3}e^{-\alpha t}dt = \ldots = \frac{1}{\alpha^{k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!}(e^{-\alpha a}(\alpha a)^n - e^{-\alpha b}(\alpha b)^n).$$

□

2. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема 3. *Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, и предположим, что T удовлетворяет (6). Тогда для каждого $R > r(T)$ существует $f \in C_T(-R,R)$ такая, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$*

$$\int_{R-2\varepsilon}^{R-\varepsilon} |f(t)|dt \geq e^{c\varepsilon^{-4/3}}, \tag{3}$$

где $c > 0$ не зависит от ε.

Доказательство. Пусть $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность нулей $\widehat{T}$. Согласно условию теоремы эта последовательность обладает такими свойствами:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = \infty$, где $q_k = l_k(1 + |\mathrm{Im}\zeta_k|)^{-1}$ и $l_k = m(\zeta_k, T)$;

2) $q_{k+1} > q_k^3 > 1$ и $q_{k+1} > l_k^3/q_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Для $R > r(T)$ определим

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{i\zeta_k t}, \quad t \in (-R,R), \tag{4}$$

где $\gamma_k = e^{l_k q_k^{-1/3}}$. Из 1), (6) и Теоремы 1 следует, что $f \in C_T(-R,R)$.

Пусть $s \in \mathbb{N}, s \geq 2, q_s^{-1/2} + q_s^{-1} < R$, и $t \in E_s = (R - q_s^{-1/2} - q_s^{-1}, R - q_s^{-1/2} + q_s^{-1})$. Очевидно из (4), что

$$\sum_{k=1}^{s-1}\gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{R|\mathrm{Im}\zeta_k|} \leq \exp(c_1 l_{s-1} q_{s-1}^{-1/3}), \tag{5}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от s. Согласно 2)

$$\sum_{k=s+1}^{\infty}\gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{R|\mathrm{Im}\zeta_k|} \leq c_2, \tag{6}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s и t. Тогда из неравенств (5) и (6) получаем

$$|f(t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{i\zeta_k t}\right| = \left|\gamma_s \left(\frac{t}{R}\right)^{l_s} e^{i\zeta_s t} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{s\}}\gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{i\zeta_k t}\right| >$$

$$> \frac{1}{2}\left|\gamma_s \left(\frac{t}{R}\right)^{l_s} e^{it\zeta_s}\right| > \frac{1}{2}\gamma_s \left(\frac{t}{R}\right)^{l_s} e^{-t(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)}.$$

Отсюда

$$\int_{E_s} |f(t)|dt \geq \frac{1}{2}\int_{E_s} \left(\frac{t}{R}\right)^{l_s} e^{l_s q_s^{-1/3} - t(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)}dt. \tag{7}$$

По Лемме 2 при достаточно больших s

$$\int_{E_s} \left(\frac{t}{R}\right)^{l_s} e^{l_s q_s^{-1/3} - t(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)}dt = \frac{e^{l_s q_s^{-1/3}}}{R^{l_s}(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)^{l_s+1}}\sum_{n=0}^{l_s}\frac{l_s!}{n!}\times$$

$$\times(e^{-(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}-q_s^{-1})}((|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}-q_s^{-1}))^n -$$

$$-e^{-(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}+q_s^{-1})}((|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}+q_s^{-1}))^n) >$$

$$> \frac{e^{l_s q_s^{-1/3} - (|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}-q_s^{-1})}}{(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (7), получим

$$\int_{E_s} |f(t)|dt \geq \frac{e^{l_s q_s^{-1/3} - (|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)(R-q_s^{-1/2}-q_s^{-1})}}{2(|\mathrm{Im}\zeta_s|+1)}. \tag{8}$$

Учитывая 1) и (8), можем сказать, что

$$\int_{E_s} |f(t)|dt \geq e^{c_3 q_s^{2/3}}, \tag{9}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от s.

Положим $\varepsilon = \frac{3q_s^{-1/2} - q_s^{-1}}{4}$, тогда при достаточно больших s:

$$R - \varepsilon > R - q_s^{-1/2} + q_s^{-1} \quad \text{и} \quad R - 2\varepsilon < R - q_s^{-1/2} - q_s^{-1}.$$

Очевидно, что используя (9), получим

$$\int_{R-2\varepsilon}^{R-\varepsilon} |f(t)|dt \geq e^{c\varepsilon^{-4/3}},$$

где $c > 0$ не зависит от ε. То есть получена оценка (3). Теорема доказана. □

1. *Volchkov V.V. , Volchkov Vit.V.* Mean periodic function. – Donetsk: Donetsk National University Press., 2008. – 194c.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
a.minenkova@gmail.com

Получено 19.05.08