УДК 517.9:532

©2008. **О.А. Дудик**

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Введение. Задачи динамики тел с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, в условиях близких к невесомости, когда требуется принимать во внимание действие капиллярных (поверхностных) сил, привлекли внимание ученых во второй половине XX века. Эти задачи связаны, в частности, с исследованием космического пространства с помощью ракетной техники. Операторный подход к исследованию задач подобного рода подробно описан в [1], [2], [3]. Особенностью этой начально-краевой проблемы является то обстоятельство, что при ее постановке производные по времени от решения входят не только в уравнение (Навье-Стокса), но и в граничное (кинематическое) условие. Кроме того, ввиду действия капиллярных сил порядок дифференциального оператора (Лапласа-Бельтрами) на равновесной поверхности жидкости – такой же, как и в основном уравнении. Эти обстоятельства усложняют исследование задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в состоянии покоя плоский маятник, закрепленный в некоторой точке O, которую будем считать началом неподвижной декартовой системы координат $O\,y_1\,y_2\,y_3$. Маятник расположен в плоскости $O\,y_2\,y_3$ и содержит полость Ω, частично заполненную капиллярной вязкой жидкостью плотности ρ.

Будем считать, что маятник совершает малые движения относительно оси $O\,y_1$. При этом на систему действует однородное гравитационное поле вдоль оси $O\,y_3$: $\vec{g} = -g\,\vec{e}_3\,'$, где $\vec{e}_3\,'$ – единичный вектор оси $O\,y_3$, $g > 0$ – ускорение силы тяжести.

Для описания плоских движений данной гидромеханической системы введем наряду с неподвижной системой координат также подвижную систему $O\,x_1\,x_2\,x_3$, жестко связанную с телом. При этом оси $O\,x_1$ и $O\,y_1$ совпадают. В состоянии покоя центр масс C всей системы расположен на одной вертикали с полюсом и имеет координаты $(y_{2_c}, y_{3_c}) = (0, -l)$, где $l > 0$ – длина вектора OC: $\vec{r}_c = -l\,\vec{e}_3\,'$.

В процессе движения маятника положение подвижной системы $O\,x_1\,x_2\,x_3$ относительно неподвижной системы $O\,y_1\,y_2\,y_3$ будем задавать с помощью вектора углового перемещения маятника $\vec{\delta}(t) = \delta_1(t)\vec{e}_1$, где $\vec{e}_i$ – орты системы $O\,x_1\,x_2\,x_3$ ($\vec{e}_1\,' = \vec{e}_1$). Тогда выполнены соотношения

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\delta}(t)}{dt} = \frac{d\delta_1(t)}{dt}\,\vec{e}_1 =: \omega_1\,\vec{e}_1,\ \vec{\varepsilon}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \varepsilon_1\,\vec{e}_1, \qquad (1)$$

где $\vec{\omega}(t)$ – угловая скорость, а $\vec{\varepsilon}(t)$ – угловое ускорение маятника.

Для искомого поля $\vec{u}(t,x)$, описывающего движения жидкости в системе координат $O\,x_1\,x_2\,x_3$, жестко связанной с телом, и динамического давления $p(t,x)$ имеем следующую систему линеаризованных уравнений Навье-Стокса (см. [1], с.336):

$$\rho\,\frac{\partial\,\vec{u}}{\partial t}+\rho\left(\frac{d\,\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\nabla p=\rho\,\nu\triangle\vec{u}+\rho\,\vec{f},\qquad \mathrm{div}\vec{u}=0\quad(\text{в}\,\Omega),\tag{2}$$

где $\nu>0$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости, а $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле. Обозначим через S твердую стенку сосуда Ω, контактирующую с жидкостью в состоянии относительного равновесия. Тогда граница $\partial\,\Omega$ состоит из (замыкания) S и Γ, а на S для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$\vec{u}=\vec{0}\quad(\text{на}\,S).\tag{3}$$

Кинематические и динамические условия на Γ удобно записать в криволинейной ортогональной системе координат $\widetilde{O}\,\xi^2\,\xi^3$, в которой уравнение Γ принимает вид $\xi^3=0$, коэффициент Ламе $H_3|_\Gamma\,\equiv\,1$, а нормаль $\vec{n}$ направлена вне Ω. Тогда, считая, что свободная движущаяся поверхность $\widetilde{\Gamma}(t)$ имеет уравнение

$$\xi^3=\zeta\left(t,\xi^2\right),\tag{4}$$

приходим к кинематическому условию

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}\quad(\text{на}\,\Gamma).\tag{5}$$

Динамические условия на Γ состоят в равенстве нулю касательного напряжения и в равенстве нормального напряжения скачку давлений, возникающего вследствие действия гравитационных и центробежных сил, и выглядят следующим образом

$$\rho\,\nu\,(u_{2,3}+u_{3,2})=0\quad(\text{на}\,\Gamma),\tag{6}$$

$$-p+2\rho\,\nu\,u_{3,3}=-\mathrm{L}_\sigma\zeta-\rho g\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]:=\sigma\,\triangle_\Gamma\zeta-a_\Gamma\zeta-\rho g\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\;(\text{на}\,\Gamma),\tag{7}$$

$$a_\Gamma:=-\sigma k_1^2+\rho g\cos\left(\vec{n},\vec{e}_3\right),\tag{8}$$

через $u_{i,k}$ обозначены ковариантные производные ковариантного вектора u_i по переменной ξ^k, $\triangle_\Gamma$ – оператор Лапласа-Бельтрами, определенный на функциях, заданных на Γ, σ – коэффициент поверхностного натяжения, k_1 – главная кривизна поверхности Γ.

Так как на твердой стенке S не только скорости, но и перемещения частиц жидкости равны нулю, то будем считать по непрерывности, что на $\partial\Gamma$, то есть на концах отрезка кривой Γ, выполнено условие

$$\zeta=0\quad(\text{на}\quad\partial\Gamma),\tag{9}$$

Это условие является предположением.

Кроме того, функция ζ должна удовлетворять условию сохранения объема при колебаниях. Это условие имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0. \tag{10}$$

Для постановки начально-краевой задачи о малых движениях плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, следует еще добавить уравнение кинематического момента данной гидромеханической системы

$$\rho \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} (\vec{r} \times \vec{u}) \, d\Omega + J \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha \vec{\omega} + mgl\vec{\delta} - \rho g \int\limits_{\Gamma} (\vec{e}_3 \times \vec{r}) \, \zeta \, d\Gamma = \overrightarrow{M}(t), \tag{11}$$

где $J > 0$ – компонента тензора инерции системы относительно оси $O\,x_1$, m – масса всей системы, $l > 0$ – расстояние от O до центра масс C всей системы, $\alpha > 0$ – коэффициент трения на оси, $\overrightarrow{M}(t)$ – главный момент внешних сил гидросистемы.

Наконец, при $t = 0$ следует добавить начальные условия

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^{\,0}(x), \quad \zeta(0, \hat{\xi}) = \zeta^0(\hat{\xi}), \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0}. \tag{12}$$

Таким образом, искомые функции $\vec{u}(t, x)$, $p(t, x)\, \zeta(t, \hat{\xi})$, $\vec{\omega}(t)$ должны являться решениями уравнений (2) и (11), краевых условий (3), (5)–(9), интегральной связи (10) и начальных условий (12). При этом физические параметры системы и функция a_Γ из (8) считаются заданными, так же, как и функции $\vec{f}(t, x)$, $\vec{u}^{\,0}$, $\zeta^{\,0}(\hat{\xi})$ и $\vec{\omega}^{\,0}$. Эта задача рассматривается в области $\Omega \in \mathbf{R}$ с границей $\partial\,\Omega$, состоящей из двух частей: равновесной поверхности Γ, которую можно считать достаточно гладкой (бесконечно дифференцируемой), а также твердой стенки S, которую будем считать липшицевой. Кроме того, полагаем, что двугранный угол δ между Γ и S постоянен и удовлетворяет условиям

$$0 < \delta < \pi. \tag{13}$$

Следовательно, в целом граница $\partial\,\Omega$ области $\Omega \in \mathbf{R}$ является липшицевой. Отметим еще, что функция a_Γ из (8) непрерывна в замкнутой области $\overline{\Gamma}$, так как Γ достаточно гладкая.

2. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений. Исследование сформулированной проблемы будем проводить методами функционального анализа и теории уравнений в частных производных. В связи с этим введем необходимые для дальнейшего функциональные гильбертовы пространства (см. [1], параграфы 2.1, 2.2.).

Нам понадобится ортогональное разложение $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$ в форме

$$\overrightarrow{L}_2(\Omega) = \overrightarrow{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega), \tag{14}$$

$$\overrightarrow{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \left\{ \vec{w} \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) \, : \, \vec{w} = \nabla\varphi, \, \varphi = 0 \quad (\text{на}\, \Gamma) \right\}, \tag{15}$$

$$\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega) := \left\{ \vec{v} \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) \,:\, \mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на}\,S) \right\}. \tag{16}$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений) (см. [1], с.100-102).

Совокупность векторных соленоидальных полей, удовлетворяющих условиям прилипания на твердой стенке S и конечной скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, то есть множество

$$\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega) := \left\{ \vec{u} \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) : E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k,j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right|^2 \right) d\Omega < \infty, \right.$$

$$\left. \mathrm{div}\vec{u} = 0\,(\text{в}\,\Omega), \vec{u} = \vec{0}\,(\text{на}\,S) \right\} \tag{17}$$

образует подпространство в пространстве $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, где каждая компонента $u_i(x)$ – элемент из $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$. Отметим, что подпространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$. Более того, $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ компактно вложено в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$, то есть оператор вложения из $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$ компактен.

Вернемся к начально-краевой задаче (2)–(12) и получим систему дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, ассоциированную с этой задачей.

Прежде всего, из (10) следует, что $\zeta \in L_{2,\Gamma}$ при любом

$$t \geq 0 \; (L_{2,\Gamma} := \{\varphi \in L_{2,\Gamma} \,:\, (\varphi, 1_\Gamma)_0 = 0\}).$$

Поэтому $\theta\zeta = \zeta$, где $\theta : L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$ – ортопроектор на $L_{2,\Gamma}$,

$$\theta\varphi := \varphi - |\Gamma|^{-1} \int\limits_{\Gamma} \varphi\, d\Gamma, \quad \forall \varphi \in L_2(\Gamma). \tag{18}$$

Введем еще оператор B_σ по закону

$$B_\sigma \zeta := \theta L_\sigma \theta \zeta, \quad \zeta \in D(B_\sigma) = H^2_0(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{19}$$

где дифференциальное выражение L_σ определено в (7), (8), а граничное условие (9) учтено выбором $D(B_\sigma)$.

Лемма 1. *(см. [1], с. 163-164). Оператор $B_\sigma : D(B_\sigma) \subset L_{2,\Gamma} \to L_{2,\Gamma}$ неограничен, самосопряжен и ограничен снизу. Его квадратичная форма имеет вид*

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 = \int\limits_{\Gamma} \left[|\nabla_\Gamma \zeta|^2 + a_\Gamma\, |\zeta|^2 \right] d\Gamma, \quad \zeta \in D(B_\sigma), \tag{20}$$

где $\nabla_\Gamma \zeta$ – градиент функции ζ, заданной на Γ.

Доказательство. Если B_σ положительно определен в $L_{2,\Gamma}$, то (20) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Gamma)$, а также норме

$$\|\zeta\|_\nabla^2 := \int\limits_\Gamma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 \, dt, \quad \zeta \in H_0^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}. \tag{21}$$

Оператор B_σ имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой на $+\infty$, а система его собственных элементов $\{\zeta_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис в $L_{2,\Gamma}$. $\square$

Определение 1. Будем говорить, что состояние относительного равновесия маятника с полостью, заполненной капиллярной вязкой жидкостью, статически устойчиво по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определен в $L_{2,\Gamma}$, то есть

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 \geq c\,\|\zeta\|_0^2, \quad c > 0, \quad \zeta \in D(B_\sigma). \tag{22}$$

Так как квадратичная форма $(B_\sigma \zeta, \zeta)_0$ (см. (20)) равна удвоенной потенциальной энергии для данной гидросистемы, то предположение (22) о положительной определенности оператора потенциальной энергии B_σ равносильно тому, что в состоянии относительного равновесия потенциальная энергия системы имеет грубый минимум. Отметим, что в предположении (22) оператор B_σ имеет обратный оператор B_σ^{-1}, который является положительным и компактным, а все собственные значения $\lambda_k(B_\sigma)$ оператора B_σ положительны.

Используя введенный в (19) оператор B_σ, перепишем краевое условие (7). Отметим при этом, что давление $p(t,x)$ можно определить с точностью до произвольной функции t, так как внутренние силы в жидкости определяются градиентами давления ∇p . Поэтому можно дополнительно считать, что выполнено условие нормировки

$$\int\limits_\Gamma p \, d\Gamma = 0. \tag{23}$$

Тогда, действуя ортопроектором θ на обе части (7) и используя соотношение

$$\int\limits_\Gamma u_{3,3} \, d\Gamma = 0 \tag{24}$$

(для горизонтальной Γ оно доказано в [1], с.115, а здесь доказывается аналогично), приходим вместо (7) к краевому условию

$$-p + 2\rho\nu\, u_{3,3} = -B_\sigma \zeta - \rho\, g\, \theta \left[(\vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3 \right] \quad (\text{на}\, \Gamma). \tag{25}$$

Цель дальнейших преобразований – получить из (2)–(12) систему дифференциальных соотношений, а затем из них – задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве.

Будем считать, что в уравнении (2) все слагаемые являются функциями переменной t со значениями в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$. Точнее говоря, $\vec{u}(t,x)$ – функция переменной t со значениями в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$, $\nabla\rho(t,x)$ – функция переменной t со значениями в $\overrightarrow{G}(\Omega) := \overrightarrow{G}_{h,\,S}(\Omega) \oplus \overrightarrow{G}_{0,\,\Gamma}(\Omega)$. Тогда, действуя на обе части (2) ортопроекторами $P_{0,\,\Gamma}$ и $P_{0,\,S}$ на подпространства $\overrightarrow{G}_{0,\,\Gamma}(\Omega)$ и $\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega)$, приходим к соотношениям

$$\nabla\varphi = \rho\nu P_{0,\,\Gamma}\triangle\vec{u} - \rho P_{0,\,\Gamma}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \rho P_{0,\,\Gamma}\vec{f}, \quad \nabla\varphi := P_{0,\,\Gamma}\nabla p, \tag{26}$$

$$\rho\,\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla\tilde{p} = \rho\nu P_{0,\,S}\triangle\vec{u} - \rho P_{0,\,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \rho P_{0,\,S}\vec{f}, \quad \nabla\tilde{p} := P_{0,\,S}\nabla p. \tag{27}$$

Из (26) следует, что $\nabla\varphi$ непосредственно вычисляется по известному полю $\vec{f}$ и найденному из (27) полю $\vec{u}$. В то же время φ не входит в (27), а также в краевые и начальные условия (3)-(12). В самом деле, так как в силу (23), (26), (27) и (15)

$$p = \tilde{p} + \varphi, \quad \varphi\,|_{\Gamma} = 0, \tag{28}$$

то $p\,|_{\Gamma} = \tilde{p}\,|_{\Gamma}$ и потому условие (25) принимает вид

$$-\tilde{p} + 2\rho\,\nu\,u_{3,3} = -B_{\sigma}\zeta - \rho\,g\,\theta\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] \quad (\text{на}\,\Gamma). \tag{29}$$

С учетом проведенных преобразований приходим к выводу, что задача (2)–(12) сводится к соотношениям (26), (11), а также к задаче Стокса:

$$-\rho\nu P_{0,\,S}\triangle\vec{u} + \nabla\tilde{p} =: \vec{f}_u = -\rho\frac{d\vec{u}}{dt} - \rho P_{0,\,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \rho P_{0,\,S}\vec{f}, \tag{30}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на}\,S), \tag{31}$$

$$-\tilde{p} + 2\rho\,\nu\,u_{3,3} = -B_{\sigma}\zeta - \rho\,g\,\theta\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] \quad (\text{на}\,\Gamma), \tag{32}$$

$$\rho\,\nu\,(u_{2,3} + u_{3,2}) = 0 \quad (\text{на}\,\Gamma), \tag{33}$$

$$\triangle\tilde{p} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad \int\limits_{\Gamma}\tilde{p}d\Gamma = 0. \tag{34}$$

Будем искать решение задачи (30)–(34) в виде

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}, \quad \nabla\tilde{p} = \nabla p_v + \nabla p_w. \tag{35}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$\vec{f}_u \in \left(J^1_{0,\,S}(\Omega)\right)^*, \quad \psi \in (G_+)^*, \tag{36}$$

то задача (30)–(34) имеет единственное решение $\vec{u} \in \overrightarrow{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)$, *представимое в виде (35), где функция* $\vec{v}$ *является слабым решением первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна:*

$$A\vec{v} := -P_{0,S}\triangle\vec{v} + \nabla p_v = \vec{f}_u, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \tag{37}$$

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на}\,S), \quad \rho\,\nu\,(v_{2,3} + v_{3,2}) = 0 \quad (\text{на}\,\Gamma), \tag{38}$$

$$-p_v + 2\rho\,\nu\,v_{3,3} = 0 \quad (\text{на}\,\Gamma), \tag{39}$$

$$\triangle p_v = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad \int\limits_{\Gamma} p_v\,d\Gamma = 0, \tag{40}$$

а функция $\vec{w}$ *является слабым решением второй вспомогательной задачи С.Г.Крейна:*

$$-P_{0,S}\triangle\vec{w} + \nabla p_w = 0, \quad \mathrm{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{на}\,S) \tag{41}$$

$$\rho v\,(w_{2,3} + w_{3,2}) = 0\ (\text{на}\,\Gamma), -p_w + 2\rho\,\nu\,w_{3,3} = \psi := -B_\sigma\zeta - \rho g\theta\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\ (\text{на}\,\Gamma), \tag{42}$$

$$\triangle p_w = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad \int\limits_{\Gamma} p_w\,d\Gamma = 0. \tag{43}$$

Обратно, любое поле $\vec{u} \in \overrightarrow{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)$ *представимо в виде суммы (35), где* $\vec{u} = A^{-1}\vec{f}$ $\vec{w} = V\,\psi$ *– слабые решения задач (37)–(40) и (41)–(43) при условиях (36) (см. [4], теорема 5).*

Из вышесказанного следует, что исходная задача (2)–(12) равносильна соотношению (26) и системе уравнений и начальных условий

$$\rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \rho\,\frac{d\vec{w}}{dt} + \rho P_{0,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \rho\nu A\vec{v} = \rho P_{0,S}\vec{f}, \tag{44}$$

$$\rho\,\frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{1}{\nu}\,V\,B_\sigma\,\gamma_n\,(\vec{v}+\vec{w}) + \frac{\rho g}{\nu}\,V\theta\,\left[(\vec{w}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] = \vec{0}, \tag{45}$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\,[\vec{r}\times(\vec{v}+\vec{w})]\,d\Omega + J\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha\vec{\omega} + mgl\vec{\delta} - \rho g\int\limits_{\Gamma}\,(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta\,d\Gamma = \overrightarrow{M}(t), \tag{46}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n\,(\vec{v}+\vec{w}) = 0, \tag{47}$$

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} - \vec{\omega} = \vec{0}, \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\vec{w}(0) = \vec{w}^0, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}^0 \\ \vec{v}(0) = \vec{u}^0 - \vec{w}^0, \quad \vec{w}^0 = -\nu^{-1}\,V\,B_\sigma\,\zeta^0 - \rho g\nu^{-1}\,V\,\theta\left[(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right], \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0.\end{gathered} \tag{49}$$

Здесь символом d/dt обозначена производная по t от функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве, а

$$\gamma_n\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{n})_\Gamma\,, \quad \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{u} \in J^1_{0,\,S}(\Omega). \tag{50}$$

После замен

$$\vec{v} = A^{-1/2}\,\vec{\xi}, \quad \vec{w} = A^{-1/2}\,\vec{\eta} \tag{51}$$

и формального применения оператора $A^{1/2}$ к обеим частям уравнений (44)–(45), получим из (44)–(49) задачу Коши

$$\begin{aligned}&\rho\,\frac{d\vec{\xi}}{dt} + \rho\,A^{1/2}\,P_{0,\,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \rho\nu A\vec{\xi} - \nu^{-1}\,B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) -\\ &-\frac{\rho g}{\nu}A^{1/2}\,V\,\theta\,[(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3] = \rho A^{1/2}P_{0,\,S}\vec{f},\end{aligned} \tag{52}$$

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} + \nu^{-1}\,B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) + \frac{\rho g}{\nu}A^{1/2}\,V\,\theta\,[(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3] = \vec{0}, \tag{53}$$

$$\vec{\eta}(0) = -\nu^{-1}\,Q^*\,B_\sigma\,\zeta^0 - \rho g\nu^{-1}\,Q^*\left[\theta(\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right], \quad \vec{\xi}(0) = A^{1/2}\vec{u}^0 - \vec{\eta}(0), \tag{54}$$

$$B := Q^*\,B_\sigma\,Q, \quad Q := \gamma_n A^{-1/2}, \quad Q^* = A^{1/2}\,V. \tag{55}$$

Задачи (44)–(49) и (52)–(55) являются исходным пунктом исследования проблемы разрешимости начально-краевой задачи (2)–(12) о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Определим предварительные свойства операторных коэффициентов в этих системах дифференциальных уравнений.

Лемма 2. *Пространство $J^1_{0,\,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение*

$$\overrightarrow{J}{}^1_{0,\,S}(\Omega) = \overrightarrow{N}_1(\Omega)\oplus\overrightarrow{M}_1(\Omega), \tag{56}$$

где

$$\overrightarrow{N}_1(\Omega) := \left\{\vec{v}\in\overrightarrow{J}{}^1_{0,\,S}(\Omega)\,:\,\gamma_n\vec{v} = 0 \quad (\text{на}\,\Gamma)\right\}, \tag{57}$$

а $\overrightarrow{M}_1(\Omega)$ – подпространство слабых решений задачи (41)-(43) при любых $\vec{\psi} = (0;0;\psi_3)$, $\psi_3 = \psi_n = \left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*$. Соответственно пространство $\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega) = A^{1/2}\;\overrightarrow{J}{}^1_{0,\,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение

$$\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega) := \overrightarrow{N}_0(\Omega)\oplus\overrightarrow{M}_0(\Omega) := A^{1/2}\,\overrightarrow{N}_1(\Omega)\oplus A^{1/2}\,\overrightarrow{M}_1(\Omega). \tag{58}$$

Доказательство. См. [1], параграфы 1.3, 2.2, а также с.310. □

Лемма 3. *Операторы*

$$Q = \gamma_n\,A^{-1/2} : \overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega)\to L_{2,\,\Gamma}, \quad Q^* = A^{1/2}\,V : L_{2,\,\Gamma}\to\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega) \tag{59}$$

взаимно сопряжены и компактны. При этом Q ограниченно действует из $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\left(H_\Gamma^{1/2}\right)$, а Q^*, после расширения, ограниченно действует из $\left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*$ в $\overrightarrow{M}_0(\Omega) \subset \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$.

Доказательство. (См. [4], лемма 4.) □

Рассмотрим теперь свойства оператора , определенного формулой (55). Заметим сначала, что этот оператор неограничен и действует в пространстве $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом элементы из $\overrightarrow{N}_0(\Omega) \subset \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$ он аннулирует и потому $\dim\ker B = \infty$. Кроме того, область его значений $\Re(B)$ принадлежит, в силу определения оператора V, подпространству $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$. Далее, если оператор B_σ имеет ограниченный обратный, то можно считать, что после сужения на $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ оператор действует в $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ и имеет ограниченный обратный, так как тогда все сомножители в определении (см. (55)) ограниченно обратимы как операторы, действующие из одного пространства в другое. В частности, как показано в [1], с.118, сужение оператора γ_n на $\overrightarrow{M}_1(\Omega)$ также является ограниченно обратимым оператором. В этих условиях можно считать, что

$$D(B) = \Re(B^{-1}) \subset \overrightarrow{M}_0(\Omega) \subset \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega), \tag{60}$$

где $D(B)$ – некоторое плотное множество в $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$.

Далее этот оператор можно продолжить нулем на $\overrightarrow{N}_0(\Omega)$ и считать его заданным, если это нужно, на плотном в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$ множестве, которое снова обозначим через $D(B)$.

Если состояние равновесия статически устойчиво по линейному приближению, то есть $B_\sigma \gg 0$ (см. (22)), то оператор неотрицателен, так как по лемме 3 операторы Q и Q^* взаимно сопряжены. В этом случае он имеет самосопряженное расширение (по Фридрихсу), которое снова обозначим через B, а его область определения – через $D(B)$. Отметим, наконец, что оператор B неограничен и его ненулевые собственные значения $\lambda_k(B)$ имеют степенную асимптотику при $k \to \infty$ (см. [5]).

3. Переход к задаче Коши для параболического уравнения в гильбертовом пространстве. Из определения (55) оператора следует, что оператор из $V\, B_\sigma\, \gamma_n$ (45) может быть представлен в виде

$$B_1 := V\, B_\sigma\, \gamma_n = A^{-1/2}\, B\, A^{1/2}. \tag{61}$$

Так как оператор действует в $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ (см. (55)), а подпространства $\overrightarrow{M}_1(\Omega)$ и $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ связаны соотношением (58), то есть

$$\overrightarrow{M}_0(\Omega) = A^{1/2}\, \overrightarrow{M}_1(\Omega), \quad \overrightarrow{M}_1(\Omega) = A^{-1/2}\, \overrightarrow{M}_0(\Omega), \tag{62}$$

то формулой (61) определен оператор B_1, подобный оператору и заданный на множестве $D(V\, B_\sigma\, \gamma_n) \subset \overrightarrow{M}_1(\Omega)$, такой, что

$$\Re(B_1) = \Re(V\, B_\sigma\, \gamma_n) = \overrightarrow{M}_1(\Omega). \tag{63}$$

Отсюда следует, что $B_1 = V\, B_\sigma\, \gamma_n$ – положительно определенный оператор, действующий в $\overrightarrow{M}_1(\Omega)$ и имеющий те же общие свойства и спектр, что и оператор B : $D(B) \subset \overrightarrow{M}_0(\Omega) \to \overrightarrow{M}_0(\Omega)$.

Введем в рассмотрение операторы

$$R := B^{1/2}\, P\, A^{-1/2} : \overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega) \to \overrightarrow{M}_0(\Omega), \quad R^+ := A^{-1/2}\, P\, B^{1/2}, \tag{64}$$

$$D(R^+) := D(B^{1/2}) \subset \overrightarrow{M}_0(\Omega),$$

где $P : \overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega) \to \overrightarrow{M}_0(\Omega)$ ортопроектор на подпространство $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$. (В (64) можно писать либо не писать оператор , так как $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ инвариантно для B и $B^{1/2}$ и потому $B^{1/2} = B^{1/2}\, P = P\, B^{1/2} = P\, B^{1/2}\, P$.)

Выясним общие свойства операторов R и R^+.

Лемма 4. *Для операторов R и R^+ выполнены соотношения*

$$R \in \wp_\infty(\overrightarrow{M}_0(\Omega)), R^+ = R^* \mid D(B^{1/2}), \quad \overline{R^+} = R^* \in \sigma_\infty(\overrightarrow{M}_0(\Omega)). \tag{65}$$

Доказательство. См. [5]. □

С помощью операторов R, R^+, R^* проведем в задаче (44)–(49) следующие формальные преобразования, позволяющие перейти от нее к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения. С этой целью осуществим в (44)–(49) замену

$$\vec{w} = \nu^{-1}\, R^+\, \vec{z} \tag{66}$$

и подействуем на обе части (45) оператором $\nu(R^+)^{-1} = \nu B^{-1/2}\, P\, A^{1/2}$, ограниченно действующим, в силу (62), из $\overrightarrow{M}_1(\Omega)$ в $D(B^{-1/2}) \subset \overrightarrow{M}_0(\Omega)$. Если $d\vec{z}/dt$ непрерывна по t, то в силу леммы 4 справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}(R^+\, \vec{z}) = R^*\, \frac{d\vec{z}}{dt}. \tag{67}$$

В итоге приходим к системе уравнений

$$\rho\, \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\nu} R^*\, \frac{d\vec{z}}{dt}\right) + \rho P_{0,\,S}\, \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) + \rho\nu A\vec{v} = \rho P_{0,\,S} \vec{f}, \tag{68}$$

$$\rho\, \frac{d\vec{z}}{dt} + B^{1/2}\, A^{1/2}\, \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}\, A^{-1/2}\, B^{1/2} \vec{z}\right) + \rho g\, B^{-1/2}\, P\, Q^*\, \left[\theta\, (\vec{w} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right] = \vec{0}, \tag{69}$$

$$\rho\, \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \left[\vec{r} \times (\vec{v}\ + \frac{1}{\nu}\, R^+ \vec{z})\right]\, d\Omega + J\, \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha\vec{\omega} + mgl\vec{\delta} - \rho g \int\limits_\Gamma\, (\vec{e}_3 \times \vec{r})\, \zeta\, d\Gamma = \overrightarrow{M}(t), \tag{70}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n\, \left(\vec{v} + \frac{1}{\nu}\, R^+ \vec{z}\right) = 0, \tag{71}$$

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} - \vec{\omega} = \vec{0}, \tag{72}$$

которую можно записать в виде задачи Коши для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами:

$$\widetilde{A}\,\frac{dx}{dt} + \widetilde{B}\,x = \tilde{f}(t), \quad x(0) = x^0, \quad x = (\vec{v};\, \vec{z};\, \vec{\omega};\, \zeta;\, \vec{\delta})^t. \tag{73}$$

Операторные матрицы в задаче (73) имеют вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & B_{35} \\ B_{41} & B_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{74}$$

где

$$\begin{gathered} A_{11}\,\vec{v} = \rho\,\vec{v}, \quad A_{12}\,\vec{z} = \rho/\nu\,R^*\,\vec{z}, \quad A_{13}\,\vec{\omega} = \rho\,P_{0,\,S}(\vec{\omega}\times\vec{r}), \quad A_{22}\,\vec{z} = \rho\vec{z}, \\ A_{31}\,\vec{v} = \rho\int\limits_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{v})\,d\Omega, \quad A_{32}\,\vec{z} = \rho\int\limits_{\Omega}\left[\vec{r}\times(\nu^{-1}\,R^+\,\vec{z})\right]\,d\Omega, \quad A_{33}\,\vec{\omega} = J\,\vec{\omega}. \end{gathered} \tag{75}$$

$$\begin{gathered} B_{11}\,\vec{v} = \rho\,\nu\,A\,\vec{v},\, B_{21}\,\vec{v} = B^{1/2}\,A^{1/2}\,\vec{v},\, B_{22}\,\vec{z} = \frac{1}{\nu}\,B\,\vec{z}, \\ B_{23}\vec{\omega} = \rho\,g\,B^{-1/2}\,P\,Q^*\left[\theta(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right],\, B_{33}\,\vec{\omega} = \alpha\vec{\omega},\, B_{34}\,\zeta = -\rho g\int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\zeta\,d\Gamma, \\ B_{35}\,\vec{\delta} = mgl\vec{\delta}, B_{41}\,\vec{v} = -\gamma_n\vec{v},\, B_{42}\,\vec{z} = -\frac{1}{\nu}\gamma_n\,R^+\,\vec{z},\, B_{53}\vec{\omega} = -\vec{\omega}. \end{gathered} \tag{76}$$

Лемма 5. *Оператор $\widetilde{A}$ является обратимым и*

$$\widetilde{A} = A_0 + R_1, \quad A_0 = diag(\rho I;\, \rho I;\, J;\, I;\, I), \quad R_1 \in \sigma_\infty. \tag{77}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть однородную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho\vec{v} + \rho/\nu\,R^*\,\vec{z} + A_{13}\vec{w} &= \vec{0} \\ \rho\,\vec{z} &= \vec{0} \\ A_{31}\vec{v} + \nu^{-1}\,A_{32}\,R^+\,\vec{z} + J\,\vec{w} &= \vec{0} \end{aligned} \right. ,$$

отсюда

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{z} &= \vec{0} \\ \rho\,\vec{v} + A_{13}\vec{w} &= \vec{0} \\ A_{31}\vec{v} + J\,\vec{w} &= \vec{0} \end{aligned} \right. .$$

Найдем квадратичную форму

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}\right) = (A_{11}\,\vec{v} + A_{13}\,\vec{w}, \vec{v}) + (A_{31}\,\vec{v} + A_{33}\,\vec{w}, \vec{w}) =$$

$$= \rho|\vec{v}|^2 + \rho\,(P_{0,\,S}\,(\vec{w}\times\vec{r}),\,\vec{v}) + \rho\int\limits_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{v})\;d\Omega\,\cdot\vec{w} + J\,|\vec{w}|^2 = \tag{78}$$

$$= \rho|\vec{v}|^2 + 2\rho\int\limits_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{v})\;d\Omega\,\cdot\vec{w} + (J_m + J_{\text{ж}})\;|\vec{w}|^2 = J_m\,|\vec{w}|^{\,2} + \rho\int\limits_{\Omega}|\vec{w}\times\vec{r}+\vec{v}|^2\;d\Omega,$$

здесь использовалось $J = J_m + J_{\text{ж}}$, $\quad J_{\text{ж}}\,|\vec{w}|^{\,2} = \rho\int\limits_{\Omega}|\vec{w}\times\vec{r}|^2\;d\Omega.$

Так как $J_m > 0$, то из (78) следует, что оператор $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix}$ неотрицателен. Если же квадратичная форма

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}\right) = \vec{0},$$

то $\vec{w} = \vec{0}$ и тогда из (77) получаем, что $\vec{v} = \vec{0}$. Значит оператор $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix}$ положительный в $\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega)\oplus\overrightarrow{M}_0(\Omega)$. Поскольку согласно определению (74), (75) оператор $\widetilde{A} = A_0 + R_1$, $\quad A_0 = diag(\rho I;\,\rho I;\,J;\,I;\,I)$, $\quad R_1\in\sigma_\infty$, где оператор A_0 является положительным, то $\widetilde{A}$ обратим. $\square$

Заметим, что оператор $\widetilde{B}$ можно представить в виде:

$$\widetilde{B} = (I+R_2)\,\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1, \quad \widetilde{B}_0 = diag(\rho\,\nu\,A,\,\nu^{-1}\,B,\,\alpha,\,I,\,I), \quad R_2\in\sigma_\infty, \tag{79}$$

где $\widetilde{B}_1$ – ограниченный оператор.

С учетом (77), (79) приходим к задаче

$$(A_0 + R_1)\;\frac{dx}{dt} + (I+R_2)\,\widetilde{B}_0\,x + \widetilde{B}_1\,x = \tilde{f}(t), \quad x(0) = x^0, \tag{80}$$

$$x(t) = (\vec{v};\,\vec{z};\,\vec{\omega};\,\zeta;\,\vec{\delta})^t \in D(A)\oplus D(B)\oplus\mathbf{R}\oplus L_{2,\,\Gamma}\oplus\mathbf{R} := \mathcal{H} \tag{81}$$

Задача (80)–(81) приводится к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Теорема 2. *Пусть в задаче (2)–(12) выполнены условия*

$$\overrightarrow{M}(t) - \textit{непрерывная функция из}\,\mathbf{R} \tag{82}$$

$$f(t,x)\in C^\alpha([0,T];\,H), \quad \vec{u}^0\in\overrightarrow{J}_{0,\,S}(\Omega), \quad \vec{u}^0 = \vec{v}^0 + \vec{w}^0, \tag{83}$$

$$\vec{v}^0\in D(A)\subset\overrightarrow{J}^{\,1}_{0,\,S}(\Omega), \quad \vec{w}^0\in\overrightarrow{M}_1(\Omega)\subset\overrightarrow{J}^{\,1}_{0,\,S}(\Omega), \quad \gamma_n\,\vec{w}^0\in D\left(B_\sigma^{1/2}\right). \tag{84}$$

Тогда ассоциированная задача Коши (80)–(81) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$

Заключение. В данной работе рассмотрена плоская задача о малых колебаниях маятника с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью, причем система находится в условиях, близких к невесомости, когда наряду с гравитационными следует учитывать капиллярные (поверхностные силы). Сначала приведены некоторые вспомогательные утверждения, взятые из монографии [1], относительно разложения гильбертова пространства на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми в данной работе векторными полями скоростей, смещений и градиентов давлений. Затем путем проектирования совокупности уравнений движения на эти ортогональные подпространства и последующих преобразований, основанных на рассмотрении вспомогательных краевых задач С.Г.Крейна и отвечающих им операторов, исходная начально-краевая задача приведена к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в некотором гильбертовом пространстве. Развиваемые здесь методы позволяют исследовать и пространственную задачу (сферический маятник), а также рассмотреть соответствующие спектральные задачи, и это будет сделано впоследствии.

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М: Наука, 1989. – 41с.
2. *Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. – Vol.1 : Self - adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2001, pp.384 (Operator Theory: Advances and Applications, Vol.128.)
3. *Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. – Vol.2: Nonselfself - adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2003, pp.444 (Operator Theory: Advances and Applications, Vol.146.)
4. *Копачевский Н.Д.* К проблеме малых движений и нормальных колебаний капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся сосуде // Современная математика. Фундаментальные направления, 2007 (в печати).
5. *Суслина Т. А.*Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей. Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. 1985. – Т.147. – С.179-183. Den. В ВИНИТИ 21.11.85, № 8058-В.

Таврический национальный ун-т им. Вернадского
kopachevsky@tnu.crimea.ua

Получено 15.03.07