УДК 517.5

©2008. **В.В. Волчков, Вит.В. Волчков**

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Получены критерии существования четной целой функции экспоненциального типа не выше σ, принимающей заданные значения в точках заданной последовательности плотности большей σ. В качестве последовательностей выбираются нули бесселевых и гипергеометрических функций.

В данной статье получены критерии существования четной целой функции экспоненциального типа не выше σ, принимающей заданные значения в точках заданной последовательности плотности большей σ. Такие интерполяционные задачи естественно называть переопределенными. В качестве последовательностей выбираются нули бесселевых и гипергеометрических функций. Оказалось, что указанные вопросы тесно связаны с некоторыми аспектами периодических в среднем функций на евклидовых и двухточечно-однородных пространствах.

Обозначим Z_σ – множество всех четных целых функций $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа не выше σ, растущих не быстрее многочлена на вещественной оси, т.е., удовлетворяющих оценке $|w(\lambda)| \leq \gamma(1+|\lambda|)^m e^{\sigma|\mathrm{Im}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, для некоторых констант $\gamma > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Пусть $\tau > \sigma > 0$ и $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}(\tau z)$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Пусть также $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w \in Z_\sigma$ такая, что $w(\nu_l) = \mu_l$ для всех l.

(ii) Ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\nu_l^{n/2+1}\mu_l}{J_{n/2+1}^2(\tau\nu_l)} J_{n/2-1}(t\nu_l)$$

сходится к нулю на $(\sigma, 2\tau - \sigma)$ в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\sigma, 2\tau - \sigma)$.

Отметим, что из (ii) следует, что $\mu_l = O(l^\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$ (см. [1, часть 3, лемма 2.7]).

Доказательство. (i)⇒(ii) Пусть $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ – множество радиальных распределений с компактными носителями в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, B_r – открытый шар радиуса r с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$, χ_r – индикатор B_r. Обозначим через σ_r поверхностную дельта-функцию, сосредоточенную на границе B_r.

По теореме Винера-Пэли (см. [1, часть 1, теорема 6.5]) существует распределение $u \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$w(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda) = \left\langle u, \frac{J_{n/2-1}(\lambda|x|)}{(\lambda|x|)^{n/2-1}} \right\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

и $\operatorname{supp} u \subset B_\sigma$. Введем распределение

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\nu_l^n\mu_l}{J_{n/2+1}^2(\tau\nu_l)}\frac{J_{n/2-1}(\nu_l|x|)}{(\nu_l|x|)^{n/2-1}}. \tag{1}$$

По условию

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\nu_l^n\widetilde{u}(\nu_l)}{J_{n/2+1}^2(\tau\nu_l)}\frac{J_{n/2-1}(\nu_l|x|)}{(\nu_l|x|)^{n/2-1}}. \tag{2}$$

Учитывая, что преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье и применяя [2, теорема 1.23 (ii)], имеем $f*\chi_\tau = f*\sigma_\tau=0$ в $B_{\tau-\sigma}$. Теперь из [1, часть 2, теорема 1.9] стандартным приемом сглаживания получаем требуемое.

(ii)$\Rightarrow$(i) Пусть f определено равенством (1). Из условия и теоремы о среднем для уравнения Гельмгольца [1, часть 1, раздел 7.2] видим, что $f*\chi_\tau = f*\sigma_\tau=0$ в $B_{\tau-\sigma}$. Снова применяя [2, теорема 1.23 (ii)], имеем равенство (2) в шаре $B_{2\tau-\sigma}$ для некоторого $u\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ с носителем в B_σ. Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\nu_l^n(\mu_l-\widetilde{u}(\nu_l))}{J_{n/2+1}^2(\tau\nu_l)}\frac{J_{n/2-1}(\nu_l|x|)}{(\nu_l|x|)^{n/2-1}}=0$$

в $B_{2\tau-\sigma}$. Поскольку $2\tau-\sigma>\tau$, последнее соотношение дает $\mu_l=\widetilde{u}(\nu_l)$ для всех l (см. [1, часть 3, лемма 2.9]. Полагая $w=\widetilde{u}$, мы завершаем доказательство. $\square$

Положим

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)=F\big((\alpha+\beta+1+i\lambda)/2,(\alpha+\beta+1-i\lambda)/2;\alpha+1;-\operatorname{sh}^2 r\big),$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса. Доказательство следующей леммы содержится в [3].

Лемма 1. *Для фиксированных $\alpha\geqslant 0$, $-\frac{1}{2}\leqslant\beta\leqslant\alpha$, $r>0$ справедливы следующие утверждения.*

(i) Функция $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ имеет бесконечно много нулей. Все нули $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda=0$. Кроме того, $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)>0$ при $i\lambda\in\mathbb{R}^1$.

(ii) Пусть $\lambda_l=\lambda_l(\alpha,\beta,r)$, $l=1,2,\ldots,$ – последовательность всех положительных нулей $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$, занумерованная в порядке возрастания, и предположим $0<r_1\leqslant r\leqslant r_2$. Тогда

$$r\lambda_l=\pi\left(\frac{2\alpha+3}{4}+l+q(r,\alpha,\beta)\right)+$$
$$+\frac{(1/4-\alpha^2)(\cosh r)^2+(1/4-\beta^2)(\sinh r)^2}{\lambda_l\sinh 2r}+O\left(\frac{1}{\lambda_l^3}\right),$$

где $q(r,\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}$ не зависит от l и постоянная в знаке O зависит только от α,β,r_1,r_2.

Обозначим через Π_1 множество пар вида $\left(\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1\right)$, $(n-1,0)$, $(2n-1,1)$, $(7,3)$, где $n = 2,3,\ldots$

Теорема 2. *Пусть* $(\alpha,\beta)\in\Pi_1$, $\tau>\sigma>0$, $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *– последовательность всех положительных нулей* λ *функции* $\varphi_\lambda^{(\alpha+1,\beta+1)}(\tau)$ *и* $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *– последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w\in Z_\sigma$ *такая, что* $w(\nu_l)=\mu_l$ *для всех* l.

(ii) Ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\nu_l\mu_l\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda^{(\alpha+1,\beta+1)}(\tau)\right)\Big|_{\lambda=\nu_l}\varphi_{\nu_l}^{(\alpha,\beta)}(\tau)\right)^{-1}\varphi_{\nu_l}^{(\alpha,\beta)}(t)$$

сходится к нулю на $(\sigma,2\tau-\sigma)$ *в пространстве распределений* $\mathcal{D}'(\sigma,2\tau-\sigma)$.

Доказательство. Используя локальную теорему об одном радиусе (см. [4], [5]), теорему 2.21 (ii) в [2] и повторяя рассуждения из доказательства предыдущего результата, получаем требуемое утверждение. □

Положим

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)=F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2},\frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2};\alpha+1;\sin^2 r\right).$$

При фиксированном $\alpha\in(-1/2;+\infty)$, $\beta\in\mathbb{R}^1$ и $r\in(0,\pi/2)$ свойства нулей λ функции $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)$ аналогичны свойствам нулей λ функции $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ (см. [6]).

Обозначим через Π_2 множество пар вида $\left(\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1\right)$, $\left(\frac{n}{2}-1,-\frac{1}{2}\right)$, $(n-1,0)$, $(2n-1,1)$, $(7,3)$, где $n=2,3,\ldots$

Теорема 3. *Пусть* $(\alpha,\beta)\in\Pi_2$, $0<\sigma<\tau\le\pi/4$, $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *– последовательность всех положительных нулей* λ *функции* $\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta+1}(\tau)$ *и* $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *– последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w\in Z_\sigma$ *такая, что* $w(\nu_l)=\mu_l$ *для всех* l.

(ii) Ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\nu_l\mu_l\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta+1}(\tau)\right)\Big|_{\lambda=\nu_l}\varphi_{\nu_l,\alpha,\beta}(\tau)\right)^{-1}\varphi_{\nu_l,\alpha,\beta}(t)$$

сходится к нулю на $(\sigma,2\tau-\sigma)$ *в пространстве распределений* $\mathcal{D}'(\sigma,2\tau-\sigma)$.

Доказательство. Получается тем же способом, что и теорема 2 (см. теорему 3.11 (iii) в [2]). □

1. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454pp.
2. *Volchkov V.V, Volchkov Vit.V.* Uniqueness theorems and description of solutions for convolution equations on symmetric spaces and for the twisted convolution equations on $\mathbb{C}^n$. – Донецк: Издательство ДонНУ, 2005. – 82с.
3. *Волчков В.В.* Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах // Мат. сборник. – 2007. – Т.198. – №11. – С.21-46.

4. *Волчков В.В.* Шаровые средние на симметрических пространствах // Доповіді НАН України. – 2002. – № 3. – С.15–19.
5. *Волчков Вит.В.* Локальная теорема об одном радиусе на двухточечно-однородных пространствах // Межд. науч. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 10-летию механико-математического факультета ТулГУ. Материалы конференции. – Тула. – 2006. – С.32-33.
6. *Волчков Вит.В.* О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах // Мат. сборник. – 2007. – Т.198. – №4. – С.21-46.

Донецкий национальный ун-т
`volchkov@univ.donetsk.ua`

Получено 24.03.08