УДК 517.946

©2008. **О.М. Болдовская**

СУЩЕСТВОВАНИЕ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕКОМПАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ. СЛУЧАЙ МЕДЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача Неймана для уравнения:

$$u_t = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p,$$

с начальной функцией – мерой. Доказывается существование и несуществование слабого решения задачи в зависимости от ограничений на показатели, а также при дополнительных условиях на геометрию области.

1. Введение. Пусть $\Omega \in R^N$, $N > 1$, – неограниченная область с достаточно гладкой некомпактной границей $\partial\Omega$ и $|\Omega|_N = mes_N \Omega = \infty$. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат принадлежит Ω.

Мы рассматриваем следующую начально-краевую задачу Неймана в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$:

$$u_t = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p, \qquad \text{в } Q_T, \tag{1.1}$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \mu, \qquad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $m + \lambda - 2 > 0$, $\lambda > 0$, $p > 1$ и μ – неотрицательная конечная мера Радона, ν – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Основная цель этой работы касается существования и несуществования слабого решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) в Q_T при дополнительных условиях на геометрию области.

В [1] более 20 лет назад была рассмотрена задача Коши для полулинейного диффузионного уравнения с абсорбцией, с начальной мерой – $\delta(x)$ функцией Дирака:

$$u_t = \triangle u - |u|^{p-1}u, \qquad \text{в } Q = R^N \times R_+, \tag{1.4}$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \qquad \text{в } R^N, \tag{1.5}$$

где $p > 0$ – фиксированный параметр. Был установлен критический показатель $p_0 = 1 + \frac{2}{N}$ такой, что:

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А.Ф.Тедееву за постановку задачи и руководство работой.

(i) при $p < p_0$ существует единственное решение $u \in C^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$, удовлетворяющее уравнению (1.4) в смысле распределения, а начальному условию (1.5) так, что:

$$ess \lim_{t \to 0} \int u(x,t)\ \varphi(x)\, dx = \varphi(0), \qquad \forall \varphi(x) \in C_0(R^N); \tag{1.6}$$

(ii) для $p \geq p_0$ задача Коши не имеет решения $u \in L^p_{loc}(Q)$, удовлетворяющего (1.4), (1.6). Более того, если рассмотреть любую подходящую регулярную аппроксимацию $u_j(x,t)$ – классические ограниченные решения (1), с ограниченными начальными функциями $u_{0j} \to \delta(x)$, то $u_j(x,t) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ равномерно на $R^N \times [\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon > 0$. Другими словами, факт (ii) можно трактовать, что решение $u(x,t)$ задачи (1.4), (1.5) имеет устранимую особенность в точке (0,0). Подобный результат об устранимой особенности для уравнения

$$u_t = div(|\nabla u|^{\lambda-1} \nabla u) - |u|^{p-1} u,$$

где $\lambda > 1$, был получен в [2] при условии $p \geq \lambda + \frac{\lambda+1}{N}$. Вопросы устранимости особенностей для параболического уравнения с абсорбцией более общего вида (с измеримыми коэффициентами) изучались в работе [3] при тех же ограничениях на критический показатель. Этот результат удалось распространить и на уравнения высокого порядка [4].

Данная работа близка по духу к работе [5], где изучена соответствующая (1.1)–(1.3) задача Коши. В [5] получены результаты существования и несуществования решения при точных ограничениях на p. Там же рассмотрен и случай быстрой диффузии, то есть при $m + \lambda - 2 < 0$ и $\lambda > 0$.

Касаясь исследования начально-краевых задач в областях с некомпактными границами, отметим работы [6] (случай задачи Неймана), [7] (случай третьей краевой задачи) и [8] (случай задачи Дирихле). В этих работах изучался вопрос о качественном поведении решений в зависимости от геометрии области.

В дальнейшем мы будем предполагать, что Ω удовлетворяет условиям изопериметрического типа, которые необходимы для теорем вложения [9]. Перейдем к точному описанию класса областей, удовлетворяющих условиям изопериметрического типа. Введем функцию:

$$l(v) = \inf\{|\partial G \cap \Omega|_{N-1} : G \subset \Omega, |G| = v, \partial G \text{ липшицева}\}.$$

Пусть $g(v)$, $v \in (0, \infty)$ – положительная непрерывная функция, и такая, что

$$\frac{v^{(N-1)/N}}{g(v)} \text{ не убывает для всех } v > 0. \tag{1.7}$$

Определение 1. Пусть $\Omega \subset R^N$, $N \geq 2$ – неограниченная область с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$, и $|\Omega|_N = \infty$. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{B}(g)$ ($\Omega \in \mathcal{B}(g)$), если для всех $v > 0$

$$l(v) \geq g(v), \tag{1.8}$$

где $g(v) > 0$ удовлетворяет условию (1.7). Классы $\mathcal{B}(g)$ и близкие к ним были введены в работах [10], а также [6]. Геометрически области из класса $\mathcal{B}(g)$ характеризуются тем, что не сужаются на бесконечности. Типичным примером областей класса Ω является область типа бесконечного параболоида [6]:

Пусть $0 \le h \le 1$ – фиксированное число. Определим

$$\Omega = \{x \in R^N |\ |x'| < x_N^h\}, \qquad x' = (x_1, \dots, x_{N-1}).$$

Из результатов [9], глава 4, следует, что $\Omega \in \mathcal{B}(g)$ с

$$g(v) = \gamma \min(v^{(N-1)N}, v^\eta),\ v > 0;\ \eta = \frac{h(N-1)}{1+h(N-1)} \le \frac{N-1}{N}.$$

При $N = 2$ различные примеры рассмотрены в [10].

Определение 2. $u(x,t)$ – слабое решение задачи (1.1)–(1.3), если $u(x,t) \ge 0$ и

$$u(x,t) \in C(0,T; L^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}(\overline{\Omega} \times (\tau,T)),\ |Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}| \in L^{\lambda+1}_{loc}(\overline{\Omega} \times (\tau,T));$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u\xi_t + u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\xi + u^p\ \xi)\, dx\, dt = 0, \qquad \forall \xi \in C_0^1(R^N \times (\tau,T));$$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_\Omega u(x,t)\ X(x)\, dx = \int\limits_\Omega X(x)\, d\mu, \qquad \forall X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

Основным результатом данной работы являются

Теорема 1. *Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, μ – неотрицательная конечная мера Радона. Если $p < m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$, тогда существует слабое решение задачи (1.1)–(1.3).*

Теорема 2. *Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, $\mu = \delta(x)$. Если $p > m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$, тогда задача (1.1)–(1.3) не имеет решения .*

Основным инструментом доказательства являются комбинации локальных подходов работ [5], [6].

2. Мультипликативное неравенство.

Лемма 2.1. *[11] Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, $v \in L^\beta(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $Dv \in (L^p(\Omega))^N$, с $p > 1$, $q \ge 1$, $q > \beta > 0$. Тогда*

$$E_q^{\frac{p}{q}} \le \gamma G_{p,q}(E_\beta^{\frac{q}{q-\beta}} E_q^{-\frac{\beta}{q-\beta}}) J_p\ , \tag{2.1}$$

где $E_q = \int\limits_\Omega v^q\, dx$, $J_p = \int\limits_\Omega |Dv|^p\, dx$, $G_{p,q}(z) = (\frac{z}{g(z)})^p z^{\frac{p}{q}-1}$ *и* $\gamma = \gamma(q,p,N,\beta)$.

Лемма 2.2. *[6] Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, $v \in L^\infty((0,T); L^r(\Omega)), Dv \in (L^p(\Omega))^N$, с $p > 1$, $r \ge 1$, и предполагаем, что $\sup\limits_{(0,T)} |supp\ v(\cdot,t)| < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |v|^{p+\frac{pr}{N}}\, dx\, dt$$

$$\le \gamma \sup_{0<t<T} \left[\omega(|supp\ v(\cdot,t)|)^p \left(\int\limits_\Omega |v(x,t)|^r\, dx \right)^{\frac{p}{N}} \right] \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |Dv|^p\, dx\, dt, \qquad (2.2)$$

где $\gamma = \gamma(p,r,N)$, $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *– неубывающая функция:* $\omega(z) = z^{1-1/N}/g(z)$.

Для неограниченных областей Ω, типа бесконечного конуса либо всего пространства, то есть $\Omega = R^N$, функция $\omega = const$.

Всюду в дальнейшем через γ, γ_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим $\Omega_\rho = \Omega\ \cap \{|x| < \rho\}$, $\rho > 0$. Рассмотрим последовательность решений $u_n \ge 0$, $n \ge 1$ следующих задач:

$$u_{nt} = div(u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}Du_n) - u_n^p, \qquad \text{в } \Omega_n \times (0,T), \qquad (3.1')$$

$$u_n = 0 \qquad \text{в } \Omega \cap \partial\Omega_n, \qquad (3.2')$$

$$u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}\frac{\partial u_n}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega \cap \partial\Omega_n, \qquad (3.3')$$

$$u_n(x,0) = u_{0n}, \qquad x \in \Omega_n. \qquad (3.4')$$

Здесь $u_{0n} \in C^\infty(\overline{\Omega_n})$, $u_{0n} \to u_0$ в $L^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ (полагаем $u_n = 0$ вне Ω_n, то есть u_n определены всюду на $\Omega \times (0,T)$). Из [12] следует, что вышеописанная задача Дирихле-Неймана имеет глобальное решение u_n (при любом фиксированном n). Пользуясь компактностью семейства решений u_n, мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ также как в [12–14]. Предельная функция будет решением следующей задачи Неймана:

$$u_t = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p, \qquad \text{в } \Omega \times (0,T), \qquad (3.1'')$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega, \qquad (3.2'')$$

$$u(x,0) = u_0, \qquad x \in \Omega, \qquad (3.3'')$$

где $u_0 \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$. Далее рассмотрим последовательность решений $u^{(n)}$ предыдущей задачи

$$(u^{(n)})_t = div((u^{(n)})^{m-1}|Du^{(n)}|^{\lambda-1}Du^{(n)}) - (u^{(n)})^p, \qquad \text{в } \Omega \times (0,T), \qquad (3.1)$$

$$(u^{(n)})^{m-1}|Du^{(n)}|^{\lambda-1}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega, \qquad (3.2)$$

$$u^{(n)}(x,0) = u_0^{(n)}, \qquad x \in \Omega, \qquad (3.3)$$

с $u_0^{(n)} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u(x,t)\ X(x)\, dx = \int\limits_\Omega X(x)\, d\mu, \qquad \forall X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

Из [15] следует существование слабого решения задачи (3.1)–(3.3).

Для доказательства существования решения задачи (1.1)–(1.3) мы докажем ряд лемм, связанных с оценками аппроксимирующего решения $u^{(n)}$ задачи (3.1)–(3.3). Для удобства обозначений индекс у решения $u^{(n)}$ опустим.

Лемма 3.1. *Для* $\forall \rho > 0$, $\alpha > 0$ *аппроксимационное решение и удовлетворяет неравенствам:*

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} u^p \, dx \, dt \ \leq \gamma(\rho). \tag{3.4}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} u^{m+\alpha-2} \ \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2} \, dx \, dt \leq \gamma(\rho). \tag{3.5}$$

Доказательство. Умножим уравнение (3.1) на функцию $\frac{u^\alpha \psi^{\lambda+1}}{u^\alpha+1}$, где $\alpha > 0$, $\psi(x) \in C_0^\infty(R^N)$ и проинтегрируем по $\Omega \times (0,T)$:

$$\int_\Omega \int_{u(x,0)}^{u(x,T)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1} \, ds \ \psi^{\lambda+1} \, dx + \int_0^T \int_\Omega \ u^{m-1} \ |Du|^{\lambda-1} \ Du \ D(\frac{u^\alpha \psi^{\lambda+1}}{u^\alpha+1}) \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \ u^p \ \frac{u^\alpha}{u^\alpha+1} \ \psi^{\lambda+1} \, dx \, dt = 0.$$

Тогда получим

$$\int_\Omega \int_0^{u(x,T)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1} \, ds \ \psi^{\lambda+1} \, dx + \int_0^T \int_\Omega \ u^{m+\alpha-2} \ \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2} \ \psi^{\lambda+1} \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \ u^p \ \frac{u^\alpha}{u^\alpha+1} \ \psi^{\lambda+1} \, dx \, dt$$

$$\leq \gamma \Big(\int_\Omega \int_0^{u(x,0)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1} \, ds \ \psi^{\lambda+1} \, dx + \int_0^T \int_\Omega \ (u^{m+\lambda-1+\alpha} + u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda}) \ |D\psi|^{\lambda+1} \, dx \, dt \Big). \tag{3.6}$$

Обозначим $u_+ = max\{u-1, 0\}$, из (3.6) имеем

$$\int_0^T \int_\Omega \ u^{m+\alpha-2} \ \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2} \ \psi^{\lambda+1} \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \ u_+^p \ \psi^{\lambda+1} \, dx \, dt$$

$$\leq \gamma(1+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (u^{m+\lambda-1+\alpha}+u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda})\ |D\psi|^{\lambda+1}\,dx\,dt). \qquad (3.7)$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u_+^p\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt \leq \gamma(1+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (u^{m+\lambda-1+\alpha}+u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda})\ |D\psi|^{\lambda+1}\,dx\,dt). \qquad (3.8)$$

Выбирая $\alpha < (p-(m+\lambda-1))min\{1,1/\lambda\}$, из (3.8) и неравенства Гельдера получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u_+^p\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt \leq \gamma(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}}), \qquad (3.9)$$

где константа ρ такова, что $supp\ \psi(x) \in B_{2\rho} = \{x : |x| < 2\rho\}$ – шар радиуса 2ρ. Соединяя (3.7) и (3.9), лемма 3.1. доказана. □

Лемма 3.2. *Для* $\forall\rho > 0$ *аппроксимационное решение u удовлетворяет неравенству:*

$$\int\limits_{\Omega_\rho} u(x,t)\,dx\ \leq \gamma(\rho). \qquad (3.10)$$

Доказательство. Умножим уравнение (3.1) на функцию $\frac{u^\alpha\psi^{\lambda+1}}{u^\alpha+r}$, где $\alpha > 0$, $r > 0$, $\psi(x) \in C_0^\infty(R^N)$ и проинтегрируем по $\Omega\times(0,T)$. После интегрирования по частям получим

$$\int\limits_\Omega \frac{u^{\alpha+1}(x,t)\psi^{\lambda+1}}{u^\alpha(x,t)+r}\,dx - \int\limits_\Omega \frac{u^{\alpha+1}(x,0)\psi^{\lambda+1}}{u^\alpha(x,0)+r}\,dx - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \frac{\alpha r u^{\alpha-1}u_t u}{(u^\alpha+r)^2}\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ \frac{\alpha r u^{\alpha-1}Du}{(u^\alpha+r)^2}\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{m-1}\,|Du|^{\lambda-1}\,Du\ \frac{u^\alpha}{u^\alpha+r}\ \psi^\lambda\ D\psi\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^p\ \frac{u^\alpha}{u^\alpha+1}\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt = 0. \qquad (3.11)$$

Проделав с (3.11) стандартные вычисления, а затем устремив $r \to 0$, получим

$$\int\limits_\Omega u(x,t)\ \psi^{\lambda+1}\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^p\ \psi^{\lambda+1}\,dx\,dt \leq \int\limits_\Omega u(x,0)\ \psi^{\lambda+1}\,dx$$

$$+\int_0^T\int_\Omega u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda}\,|D\psi|^{\lambda+1}\,dx\,dt. \tag{3.12}$$

На основании леммы 3.1. из (3.12) получаем результат:

$$\int_\Omega u(x,t)\,\psi^{\lambda+1}\,dx\ \le \gamma\Big(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}}\Big),$$

где константа ρ такова, что *supp* $\psi(x)\in B_{2\rho}$.

Лемма 3.2. доказана.$\square$

Лемма 3.3. *Для* $\forall\alpha\in(0,m+\lambda-1)$, $\rho>0$ *имеет место оценка:*

$$\int_0^T\int_{\Omega_\rho} u^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}\,dx\,dt\ \le\gamma(\rho).$$

Доказательство. В неравенстве (2.1) возьмем $v=u^{\frac{m+\lambda-1-\alpha}{\lambda+1}}\psi$, $\psi(x)\in C_0^\infty(R^N)$, $q=\frac{(m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha)(\lambda+1)}{m+\lambda-1-\alpha}$, $p=\lambda+1$, $\beta=\frac{(q-p)N}{p}=\frac{\lambda+1}{m+\lambda-1-\alpha}$.

Прежде чем рассматривать, что получится в нашем случае, преобразуем неравенство (2.1). Пусть

$$w^{-1}=E_\beta^{\frac{q}{q-\beta}}E_q^{-\frac{\beta}{q-\beta}}, \tag{3.13}$$

откуда $E_q=E_\beta^{\frac{q}{\beta}}w^{\frac{q-\beta}{\beta}}$. Тогда из (2.1), (3.13) и определения функции $G_{p,q}$ имеем

$$J_p\ge E_q^{\frac{p}{q}}G_{p,q}^{-1}(E_\beta^{\frac{q}{q-\beta}}E_q^{-\frac{\beta}{q-\beta}})=\left(E_\beta^{\frac{q}{\beta}}w^{\frac{q-\beta}{\beta}}\right)^{\frac{p}{q}}G_{p,q}^{-1}(w^{-1})=E_\beta^{\frac{p}{\beta}}w^{\frac{p}{\beta}-1}(wg(w^{-1}))^p. \tag{3.14}$$

Введем функцию $(w)=w^{\frac{p}{\beta}-1}(wg(w^{-1}))^p$. Тогда (3.14) можно записать в виде

$$(w)\le J_pE_\beta^{-\frac{p}{\beta}},$$

откуда

$$w\le{}^{(-1)}(J_pE_\beta^{-\frac{p}{\beta}}).$$

Из последнего неравенства с учетом (3.13) получим

$$E_q\le E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\left({}^{-1}(J_pE_\beta^{-\frac{p}{\beta}})\right)^{\frac{q-\beta}{\beta}}. \tag{3.15}$$

Обозначим $F(z)=({}^{(-1)}(z))^{\frac{q-\beta}{\beta}}$. Проинтегрируем (3.15) от 0 до T, применяя неравенство Иенсена, получим

$$\int_0^T E_q\,dt\le\int_0^T E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\ F(J_pE_\beta^{-\frac{p}{\beta}})\,dt\le\int_0^T E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\,dt\cdot F\Bigg(\frac{\int_0^T F^{(-1)}(F(J_pE_\beta^{-\frac{p}{\beta}}))\ E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\,dt}{\int_0^T E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\,dt}\Bigg),$$

или

$$\int\limits_0^T E_q\,dt \le \int\limits_0^T E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\,dt \cdot F\Bigg(\frac{\int\limits_0^T J_p E_\beta^{\frac{q-p}{\beta}}\,dt}{\int\limits_0^T E_\beta^{\frac{q}{\beta}}\,dt}\Bigg). \tag{3.16}$$

Так как неравенство Иенсена можно применить, если функция $F^{(-1)}$ выпуклая, считаем её таковой. Если это не так, то, следуя [6], ниже мы построим выпуклую функцию M, которая эквивалентна $F^{(-1)}$ и, следовательно, окончательное неравенство будет справедливо и для $F^{(-1)}$. Из условия (1.7) следует, что функция $F(z)$ не убывает, а также не убывает функция $zF(\frac{A}{z})$ для фиксированного A>0 (доказательство этого также приведем ниже). Можем продолжить оценку (3.16)

$$\int\limits_0^T E_q\,dt \le T\sup_t E_\beta^{\frac{q}{\beta}} \cdot F\Bigg(\frac{\int\limits_0^T J_p\,dt\ \sup\limits_t E_\beta^{\frac{q-p}{\beta}}}{T\sup\limits_t E_\beta^{\frac{q}{\beta}}}\Bigg). \tag{3.17}$$

Вспоминая определение J_p, для v и p в нашем случае имеем

$$\int\limits_0^T J_p\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |Dv|^p\,dx\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left|D(u^{\frac{m+\lambda-1-\alpha}{\lambda+1}}\psi)\right|^{\lambda+1} dx\,dt$$

$$= \gamma\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{m+\alpha-2}\,\frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2}\,\psi^{\lambda+1}\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{m+\lambda-1-\alpha}\,|D\psi|^{\lambda+1}\,dx\,dt\,. \tag{3.18}$$

А правая часть (3.18) конечна в силу леммы 3.1. Таким образом, из (3.17) и (3.18) имеем

$$\int\limits_0^T E_q\,dt \le T\sup_t E_\beta^{\frac{q}{\beta}} \cdot F\Bigg(\frac{\gamma(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}})}{T\sup\limits_t E_\beta^{\frac{p}{\beta}}}\Bigg)$$

или с учетом леммы 3.2. в наших обозначениях

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}\,\psi^{\lambda+1}\,dx\,dt \le T\Bigg(\sup_t\int\limits_\Omega u\,\psi^{\frac{\lambda+1}{m+\lambda-1-\alpha}}\,dx\Bigg)^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}$$

$$\cdot F\Bigg(\frac{\gamma(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}})}{T(\sup\limits_t\int\limits_\Omega u\,\psi^{\frac{\lambda+1}{m+\lambda-1-\alpha}}\,dx)^{m+\lambda-1-\alpha}}\Bigg)$$

$$\le T\Bigg(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}}\Bigg)^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha} \cdot F\Bigg(\frac{\gamma_1(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}})}{T\gamma_2(1+\frac{|\Omega_{2\rho}|}{\rho^{\lambda+1}})^{m+\lambda-1-\alpha}}\Bigg).$$

Константа ρ такова, что $supp\ \psi(x) \in B_{2\rho}$.

Таким образом, утверждение леммы 3.3. доказано. Осталось доказать, что: а) функция $zF(\frac{A}{z})$ не убывает для фиксированного A>0; б) функция $F^{(-1)}$ ограничена сверху и снизу одной выпуклой функцией. Доказательство утверждения а). Имеем

$$(w) = g^p(w^{-1})w^{\frac{p-\beta}{\beta}+p}. \tag{3.19}$$

Запишем (3.19) для $w = {}^{(-1)}(z)$

$$z = g^p\left(\frac{1}{{}^{(-1)}(z)}\right)({}^{(-1)}(z))^{\frac{p-\beta}{\beta}+p}, \tag{3.20}$$

или

$$g^p\left(\frac{1}{{}^{(-1)}(z)}\right)({}^{(-1)}(z))^{p(N-1)/N} = z \cdot ({}^{(-1)}(z))^{p(N-1)/N-(p-\beta+p\beta)/\beta}. \tag{3.21}$$

Заметим в силу (1.7),что слева и справа (3.21) – неубывающие функции. Обозначим правую часть (3.21) через

$$\Psi(z) = z \cdot ({}^{(-1)}(z))^{p(N-1)/N-(p-\beta+p\beta)/\beta}.$$

Тогда

$$\Psi(1/z) = \frac{1}{z} \cdot ({}^{(-1)}(1/z))^{p(N-1)/N-(p-\beta+p\beta)/\beta}$$

– убывающая функция, следовательно

$$\frac{1}{\Psi(1/z)} = z \cdot ({}^{(-1)}(1/z))^{(p-\beta+p\beta)/\beta-p(N-1)/N}$$

– неубывающая функция. Напомним $\beta = \frac{(q-p)N}{p}$, тогда

$$(p-\beta+p\beta)/\beta - p(N-1)/N = -1 + q/\beta.$$

В силу того, что $z \cdot ({}^{(-1)}(1/z))^{(q-\beta)/\beta}$ – неубывающая функция, утверждение а) доказано.

Доказательство утверждения б). Найдем явный вид функции $F^{(-1)}(z)$. Из определения $F(z)$ следует, что

$${}^{(-1)}(z) = (F(z))^{\frac{\beta}{q-\beta}}. \tag{3.22}$$

Запишем (3.22) в виде

$$z = g^p\left(\frac{1}{{}^{(-1)}(z)}\right)({}^{(-1)}(z))^{\frac{q-\beta}{\beta}+\frac{p-q}{\beta}+p},$$

откуда имеем

$$F(z) = z \cdot g^{-p}\left(\frac{1}{{}^{(-1)}(z)}\right)({}^{(-1)}(z))^{\frac{q-p}{\beta}-p}. \tag{3.23}$$

Запишем равенство (3.23) для аргумента $F^{(-1)}(z)$

$$F(F^{(-1)}(z)) = F^{(-1)}(z) \cdot g^{-p}\left(\frac{1}{{}^{(-1)}(F^{(-1)}(z))}\right)({}^{(-1)}(F^{(-1)}(z)))^{\frac{q-p}{\beta}-p}. \tag{3.24}$$

Из (3.24) ${}^{(-1)}(F^{(-1)}(z)) = z^{\frac{\beta}{q-\beta}}$, тогда (3.24) дает

$$z = F^{(-1)}(z) g^{-p}\left(\frac{1}{z^{\beta/(q-\beta)}}\right) z^{\frac{\beta}{q-\beta}(\frac{q-p}{\beta}-p)},$$

откуда

$$F^{(-1)}(z) = g^p(z^{-\beta/(q-\beta)}) z^{1+\frac{p-q+\beta p}{q-\beta}}, \ z > 0.$$

Определим функцию

$$M(z) = \int\limits_0^z \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_0^\tau y^{\frac{p-q+\beta p}{q-\beta}} \ g^p(y^{-\beta/(q-\beta)})\, dy.$$

С одной стороны в силу неубывания функции g

$$M(z) \geq g^p(z^{-\beta/(q-\beta)}) \int\limits_0^z \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_0^\tau y^{\frac{p-q+\beta p}{q-\beta}} \, dy \geq \gamma F^{(-1)}(z),$$

с другой стороны, в силу (1.4), $z^p g(z^{-1})^p$ не убывает и значит

$$M(z) \leq \int\limits_0^z \frac{1}{\tau} \, \tau^{p\frac{\beta}{q-\beta}} \ g^p(\tau^{-\beta/(q-\beta)})\, d\tau \int\limits_0^\tau y^{\frac{p-q}{q-\beta}}\, dy \leq F^{(-1)}(z).$$

Таким образом, имеется двусторонняя оценка: $\gamma_1 M(z) \leq F^{(-1)}(z) \leq \gamma_2 M(z)$. Выпуклость же $M(z)$ проверяется дифференцированием, получаем $M''(z) \geq 0$ (здесь пользуемся (1.7): $g(1/z) z^{(N-1)/N}$ не убывает).$\Box$

Пусть а) $Q_\rho = \Omega_\rho \times (t - \rho^{\lambda+1}, (2\rho)^{\lambda+1})$, если $(2\rho)^{\lambda+1} < t$. И б) $Q_\rho = \Omega_\rho \times (t/2, t)$, $Q_{2\rho} = \Omega_{2\rho} \times (t/4, t)$, если $(2\rho)^{\lambda+1} > t$.

Лемма 3.4. *Для* $\nu \in (0, 1 + \frac{\lambda+1}{N})$ *имеет место оценка а):*

$$\sup_{Q_\rho} u \leq \gamma \frac{\left(\iint\limits_{Q_{2\rho}} u^{m+\lambda-2+\nu}\, dx\, dt\right)^{\frac{1}{\nu}}}{\rho^{\frac{\lambda+1}{\nu}} \Psi^{\frac{1}{\nu}}(\rho^N)},$$

где $\Psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *– обратная к функции* $\omega^N(z) \cdot z$. *И б):*

$$\sup_{Q_\rho} u \leq \gamma \frac{\left(\iint\limits_{Q_{2\rho}} u^{m+\lambda-2+\nu}\, dx\, dt\right)^{\frac{1}{\nu}}}{(t\Psi_1(t))^{\frac{1}{\nu}}},$$

где $\Psi_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *– обратная к функции* $\omega^{\lambda+1}(z) \cdot z^{\frac{\lambda+1}{N}}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности:

$$\rho_n = \rho(1+\frac{1}{2^n}), \qquad n = 0,1,\dots,$$

$$k_n = k(1-\frac{1}{2^{n+1}}), \qquad n = 0,1,\dots,$$

где $k > 0$ будет выбрано позже. Положим

$$Q_n = Q_{\rho_n}.$$

Пусть $(x,t) \to \zeta_n(x,t)$ при каждом $n = 0,1,..$ будет неотрицательная кусочно-гладкая срезающая функция в Q_n, то есть

$$\zeta_n(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{на } Q_n, \\ 0, & \text{вне } Q_{n-1}, \end{cases}$$

и такая что $0 \le \zeta_{nt} \le \frac{\gamma}{t} \le \frac{\gamma}{\rho^{\lambda+1}}$, $|D\zeta_n| \le \frac{\gamma}{\rho}$.

Умножим уравнение (3.1) на функцию $(u-k_{n+1})_+^{\nu-1}\zeta_{n+1}^{\lambda+1}$ и интегрируя по Q_n по частям, стандартными вычислениями получим:

$$\sup_t \int\limits_{\Omega_n(t)} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\ \zeta_{n+1}^{\lambda+1}\,dx + k^{m-1}\iint\limits_{Q_n} |D((u-k_{n+1})_+^{\frac{\nu+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_{n+1})|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\le \gamma(\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\ \zeta_{(n+1)t}\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu+m+\lambda-2}\ |D\zeta_{n+1}|^{\lambda+1}\,dx\,dt). \tag{3.25}$$

Для того, чтобы оценить правую часть (3.25) проведем следующие рассуждения. Обозначим $A_{n+1} = \{(x,t) \in Q_n : u(x,t) > k_{n+1}\} \subset R^{N+1}$, тогда

$$\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt \ge \iint\limits_{Q_n\cap\{u>k_{n+1}\}} (k_{n+1}-k_n)^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt$$

$$= \gamma(2^n)k^{\nu+m+\lambda-2}|A_{n+1}|_{N+1},$$

откуда

$$|A_{n+1}|_{N+1} \le \gamma(2^n)k^{-(\nu+m+\lambda-2)}\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt. \tag{3.26}$$

Применяя неравенство Гельдера, а также (3.26), имеем

$$\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\ ,dx\,dt \le \left(\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt\right)^{\frac{\nu}{\nu+m+\lambda-2}} |A_{n+1}|_{N+1}^{1-\frac{\nu}{\nu+m+\lambda-2}}$$

$$\le \left(\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt\right)^{\frac{\nu}{\nu+m+\lambda-2}}$$

$$\times\gamma(2^n)\left(k^{-(\nu+m+\lambda-2)}\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt\right)^{1-\frac{\nu}{\nu+m+\lambda-2}}$$

$$\le \gamma(2^n)k^{-(m+\lambda-2)}\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt. \tag{3.27}$$

Таким образом, из (3.25) и (3.27) имеем

$$\sup_t \int\limits_{\Omega_n(t)} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\,\zeta_{n+1}^{\lambda+1}\,dx + k^{m-1}\iint\limits_{Q_n} |D((u-k_{n+1})_+^{\frac{\nu+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_{n+1})|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\le \frac{\gamma(2^n)}{\rho^{\lambda+1}}(k^{-(m+\lambda-2)}+1)\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt$$

$$\le \frac{\gamma(2^n)}{\rho^{\lambda+1}}\iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt. \tag{3.28}$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$I_{n+1}\equiv\iint\limits_{Q_{n+1}} (u-k_{n+1})_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt \le \|u\|_{\infty,Q_0}^{m+\lambda-2}\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\,\zeta_{n+1}^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\le \|u\|_{\infty,Q_0}^{m+\lambda-2}\left[\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n+1})_+^{q}\,\zeta_{n+1}^{\frac{q(\lambda+1)}{\nu}}\,dx\,dt\right]^{\frac{\nu}{q}}|A_{n+1}|_{N+1}^{1-\frac{\nu}{q}}. \tag{3.29}$$

Положим в (3.29) $q=\nu+\lambda-1+\frac{\nu(\lambda+1)}{N}$. В лемме 2.2. возьмем $v=(u-k_{n+1})_+^{\frac{\nu+\lambda-1}{\lambda+1}}$ $\zeta_{n+1}{}^{\frac{\nu+\lambda-1}{\nu}}$, $p=\lambda+1$, $r=\frac{\nu(\lambda+1)}{\nu+\lambda-1}$. Тогда в силу леммы 2.2. из (3.29) получим

$$I_{n+1}\le\gamma\|u\|_{\infty,Q_0}^{m+\lambda-2}\left[\sup_\tau\left(\omega(|A_{n+1}(\tau)|_N)^{\lambda+1}\left(\int\limits_{\Omega_n} (u-k_{n+1})_+^{\nu}\,\zeta_{n+1}^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{\lambda+1}{N}}\right)\right.$$

$$\left.\times\iint\limits_{Q_n} |D((u-k_{n+1})_+^{\frac{\nu+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_{n+1})|^{\lambda+1}\,dx\,dt\right]^{\frac{\nu}{q}}|A_{n+1}|_{N+1}^{1-\frac{\nu}{q}}, \tag{3.30}$$

где $A_{n+1}(\tau)=\{x\in\Omega_n : u(x,\tau)>k_{n+1}\}\subset R^N$.

Используя оценку (3.28), оценим меру:

$$|A_{n+1}(\tau)|_N \le \gamma(2^n)k^{-\nu}\int\limits_{\Omega_n} (u-k_n)_+^{\nu}\,dx \le \gamma(2^n)\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\iint\limits_{Q_n} (u-k_{n-1})_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma(2^n)\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}. \tag{3.31}$$

Исходя из полученных оценок (3.26), (3.28), (3.31), а также неубывания функции ω, продолжим оценку (3.30):

$$I_{n+1} \leq \gamma(2^n)\|u\|^{m+\lambda-2}_{\infty,Q_0}\omega(\gamma\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{q}}$$

$$\times\left((\rho^{-(\lambda+1)}I_n)^{\frac{\lambda+1}{N}}k^{1-m}\rho^{-(\lambda+1)}I_n\right)^{\frac{\nu}{q}}\left(k^{-(\nu+m+\lambda-2)}I_n\right)^{1-\frac{\nu}{q}}$$

или

$$I_{n+1} \leq \gamma(2^n)\|u\|^{m+\lambda-2}_{\infty,Q_0}\omega(\gamma\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{q}}k^{-((m-1)\frac{\nu}{q}+(\nu+m+\lambda-2)(1-\frac{\nu}{q}))}$$

$$\times\rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)\frac{\nu}{q}}I_n^{1+\frac{(\lambda+1)\nu}{Nq}}.$$

Для удобства обозначим $b = (m-1)\frac{\nu}{q} + (\nu+m+\lambda-2)(1-\frac{\nu}{q})$.

Из леммы 5.6, глава 2, [16, с.113], имеем

$$I_n = \iint\limits_{Q_n}(u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть

$$||u||_{\infty,Q_\infty} \leq k, \tag{3.32}$$

если

$$\gamma(2^n)\|u\|^{m+\lambda-2}_{\infty,Q_0}\omega(\gamma\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{q}}k^{-b}\rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)\frac{\nu}{q}}I_0^{\frac{(\lambda+1)\nu}{Nq}} \leq 1,$$

тем более, если

$$\gamma(2^n)\|u\|^{\frac{q}{\nu}(m+\lambda-2)}_{\infty,Q_0}\omega(\gamma\frac{k^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0})^{\lambda+1}k^{-b\frac{q}{\nu}}\rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)}$$

$$\times\|u\|^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{\lambda+1}{N}}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0} = 1.$$

Используя (3.32) в последнем равенстве, получим

$$||u||_{\infty,Q_\infty} \leq \gamma(2^n)\|u\|^{\frac{m+\lambda-2}{b}}_{\infty,Q_0}\omega(\gamma\frac{\|u\|^{-\nu}_{\infty,Q_\infty}}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|^{\nu+m+\lambda-2}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{qb}}$$

$$\times\rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)\frac{\nu}{qb}}\|u\|^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{(\lambda+1)\nu}{Nqb}}_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}. \tag{3.33}$$

Введем последовательности

$$r_{i+1} = r_i + \rho 2^{-(i+1)}\ ; r_0 = \rho, \qquad i = 0, 1, ...$$

$$Q^i = \Omega_{r_i} \times (\cdot) : \qquad Q^0 = Q_\infty, \qquad Q^\infty = Q_0, \qquad Q^i \subset Q^{i+1}.$$

Обозначим $Y_i = ||u||_{\infty, Q^i}$. Запишем неравенство (3.33) для пары цилиндров $Q^i \subset Q^{i+1}$:

$$Y_i \le \gamma(2^n)\ Y_{i+1}^{\frac{m+\lambda-2}{b}} \omega(\gamma \frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{qb}}$$

$$\times \rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)\frac{\nu}{qb}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{(\lambda+1)\nu}{Nqb}}. \tag{3.34}$$

Применив к правой части (3.34) неравенство Юнга с показателями $\frac{b}{m+\lambda-2}$, $\frac{b}{b-(m+\lambda-2)}$, получим

$$Y_i \le \delta Y_{i+1} + \gamma(\delta) c^i \Bigg[\omega(\gamma \frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{(\lambda+1)\nu}{qb}} \rho^{-(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+1)\frac{\nu}{qb}}$$

$$\times \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{(\lambda+1)\nu}{Nqb}} \Bigg]^{\frac{b}{b-(m+\lambda-2)}}, \tag{3.35}$$

где $c > 1$. Исходя из определения b, q, упростим (3.35):

$$Y_i \le \delta Y_{i+1} + \gamma(\delta) c^i \omega(\gamma \frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{N}{\nu}} \rho^{-\frac{N+\lambda+1}{\nu}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{1}{\nu}}. \tag{3.36}$$

Итерируя неравенство (3.36), получим

$$Y_0 \le \delta^{i+1} Y_{i+1} + \gamma \sum_{k=0}^{i} (c\delta)^k \omega(\gamma \frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{N}{\nu}} \rho^{-\frac{N+\lambda+1}{\nu}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{1}{\nu}},$$

$i = 0, 1, 2...$ Выбираем $\delta = \frac{1}{2c}$ и устремим i к бесконечности. Это приведет к неравенству

$$\|u\|_{\infty,Q_\infty} \le \gamma \omega(\gamma \frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{\rho^{\lambda+1}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{N}{\nu}} \rho^{-\frac{N+\lambda+1}{\nu}} \|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{1}{\nu}},$$

откуда после очевидных действий и следует утверждение а). В случае б) наряду с последовательностями ρ_n и k_n рассмотрим последовательность

$$t_n = \frac{t}{2}(1 - \frac{1}{2^{n+1}}), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

положим

$$Q_n = Q_{\rho_n} \times (t_n, t).$$

$(x,t)\to\zeta_n(x,t)$ при каждом $n=0,1,..$ – неотрицательная кусочно-гладкая срезающая функция в Q_n, такая что $0\le\zeta_{nt}\le\frac{\gamma}{t}$, $|D\zeta_n|\le\frac{\gamma}{\rho}$. Доказательство проводится аналогично пункту а). Изменение возникнет в оценке (3.28), а именно:

$$\sup_t\int\limits_{\Omega_n(t)}(u-k_{n+1})_+^{\nu}\,\zeta_{n+1}^{\lambda+1}\,dx+k^{m-1}\iint\limits_{Q_n}|D((u-k_{n+1})_+^{\frac{\nu+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_{n+1})|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\le\gamma(2^n)(\frac{k^{-(m+\lambda-2)}}{\rho^{\lambda+1}}+\frac{1}{t})\iint\limits_{Q_n}(u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt$$

$$\le\frac{\gamma(2^n)}{t}(t\frac{k^{-(m+\lambda-2)}}{\rho^{\lambda+1}}+1)\iint\limits_{Q_n}(u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt$$

$$\le\frac{\gamma(2^n)}{t}\iint\limits_{Q_n}(u-k_n)_+^{\nu+m+\lambda-2}\,dx\,dt.$$

Далее, следуя изложенному в пункте а), приходим к оценке

$$\|u\|_{\infty,Q_\infty}\le\gamma\omega(\gamma\frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\nu}}{t}\|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{\nu+m+\lambda-2})^{\frac{N}{\nu}}\,t^{-\frac{N+\lambda+1}{(\lambda+1)\nu}}\|u\|_{\nu+m+\lambda-2,Q_0}^{(\nu+m+\lambda-2)\frac{1}{\nu}},$$

откуда следует утверждение б) леммы 3.4. □

Лемма 3.5. $\forall\tau\in(0,T),\ \rho>0$ *имеет место оценка:*

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega_\rho}|Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\ \le\gamma(\rho).$$

Доказательство. Пусть $\psi(x)\in C_0^\infty(R^N)$. Имеем

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}u^{m-\alpha-2}\ |Du|^{\lambda+1}\psi^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$=\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}u^{\frac{(m-1)(\lambda+1)}{\lambda}}\ |Du|^{\lambda+1}\ u^{m-\alpha-2-\frac{(m-1)(\lambda+1)}{\lambda}}\psi^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$=\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}u^{\frac{(m-1)(\lambda+1)}{\lambda}}\ |Du|^{\lambda+1}\ u^{-\alpha-\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}\psi^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\ge\gamma(\sup_{\Omega_\rho\times(\tau,T)}u)^{-\alpha-\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega_\rho}u^{\frac{(m-1)(\lambda+1)}{\lambda}}\ |Du|^{\lambda+1}\,dx\,dt,$$

где константа ρ такова, что $supp\ \psi(x) \in B_{2\rho}$. Из лемм 3.1. и 3.4. получаем требуемую оценку. $\square$

Доказательство теоремы 1.

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$u_t = (\lambda/(m+\lambda-1))^{\lambda} div(|Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}|^{\lambda-1} Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}) - u^p.$$

Из леммы 3.4. следует, что на любом компакте $K \subset \Omega_\rho \times (0,T)$ последовательность $u^{(n)}$ равномерно ограничена и из результатов [13,14] $u^{(n)}$ – равностепенно непрерывна. Из теоремы Асколи-Арцела имеем $u^{(n)\frac{m+\lambda-1}{\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}$ равномерно.

Из леммы 3.5. следует, что существует подпоследовательность (обозначим ее также $u^{(n)}$), такая что $Du^{(n)\frac{m+\lambda-1}{\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{} Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}$ слабо в $L^{\lambda+1}(K)$.

Из вышеперечисленных сходимостей следует, что при $n \to \infty$ предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле интегрального тождества, то есть

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega} (u\phi_t - u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\phi - u^p\ \phi)\, dx\, dt\ = 0,$$

для всех $\phi \in C_0^1(R^N \times (0,T))$, $\tau \in (0,T)$.

Выберем $\psi(x) \in C_0^\infty(R^N)$. Умножим уравнение (3.1) (индекс n для удобства обозначений опустим) на функцию $\psi(x)$, и интегрируя по $\Omega \times (0,t)$, получим

$$\left|\int\limits_{\Omega} u(x,t)\ \psi(x)\, dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\ \psi(x)\, dx\right|$$

$$\leq ||\psi||_{L_\infty}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} u^p\, dx\, d\tau + ||D\psi||_{L_\infty}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} |Du|^{\lambda}\ u^{m-1}\, dx\, d\tau, \tag{3.37}$$

где константа ρ такова, что $supp\ \psi(x) \in B_{2\rho}$.

Оценим интегралы справа в неравенстве (3.37)

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} u^p\, dx\, d\tau \leq \gamma\Big(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} u^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}\, dx\, d\tau\Big)^{\frac{p}{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}} t^{\frac{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha-p}{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}}$$

$$\leq c_1 f_1(t),$$

где $f_1(t) = t^{\frac{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha-p}{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}}$. Ко второму интегралу справа в (3.37) применим неравенство Гельдера

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} |Du|^{\lambda}\ u^{m-1}\, dx\, d\tau$$

$$= \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} |Du|^\lambda \; u^{\frac{(m+\alpha-2)\lambda}{\lambda+1}} \; (u^\alpha+1)^{2\frac{-\lambda}{\lambda+1}} \; u^{-\frac{(m+\alpha-2)\lambda}{\lambda+1}+m-1} \; (u^\alpha+1)^{2\frac{\lambda}{\lambda+1}} \, dx\, d\tau$$

$$\le \gamma \Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} |Du|^{\lambda+1} \frac{u^{m+\alpha-2}}{(u^\alpha+1)^2} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u^{m-1+(-\alpha+1)\lambda} \; (u^\alpha+1)^{2\lambda} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

В силу леммы 3.1. имеем

$$\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} |Du|^\lambda \; u^{m-1} \, dx\, d\tau \le \gamma \Big[\Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u^{m+\lambda-1-\alpha\lambda} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

$$+ \Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{1}{\lambda+1}} \Big]$$

$$\le \gamma \Big[\Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{m+\lambda-1-\alpha\lambda}{(\lambda+1)(m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha)}} t^{\frac{\alpha\lambda+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}{(\lambda+1)(m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha)}}$$

$$+ \Big(\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u^{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha} \, dx\, d\tau \Big)^{\frac{m+\lambda-1+\alpha\lambda}{(\lambda+1)(m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha)}} t^{\frac{-\alpha\lambda+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha}{(\lambda+1)(m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-\alpha)}} \Big]$$

$$\le c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t).$$

Выбираем α достаточно малым: $\alpha < min\{\frac{1}{N}\,, \frac{m+\lambda-1}{\lambda}\,, m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}-p\}$.

Тогда $\lim\limits_{t\to 0} f_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} f_2(t) = \lim\limits_{t\to 0} f_3(t) = 0$. Таким образом, при $t \to 0$, $n \to \infty$ получаем

$$\int_\Omega u(x,t)\; \psi(x)\, dx \to \int_\Omega \psi(x)\, d\mu.$$

Теорема 1 доказана. □

4. Доказательство теоремы 2. Доказательство от противного. Пусть в условиях теоремы 2 существует слабое решение задачи (1.1)–(1.3). Докажем следующие леммы.

Лемма 4.1. $\forall \alpha > 0,\ \rho > 0$ *слабое решение задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет*

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} u^p \, dx\, dt \;\le \gamma(\rho). \tag{4.1}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} u^{m+\alpha-2} \; \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2} \, dx\, dt \le \gamma(\rho). \tag{4.2}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\frac{u^\alpha \psi^{\lambda+1}}{u^\alpha+1}$, где $\alpha > 0$, $\psi(x) \in C_0^\infty(R^N)$, $supp\, \psi(x) \in B_{2\rho}$ и проинтегрируем по $\Omega \times (\epsilon, T)$:

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{u(x,\epsilon)}^{u(x,T)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1}\, ds\, \psi^{\lambda+1}\, dx + \int\limits_{\epsilon}^{T} \int\limits_{\Omega} u^{m-1}\, |Du|^{\lambda-1}\, Du\, D(\frac{u^\alpha \psi^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2})\, dx\, dt$$

$$+ \int\limits_{\epsilon}^{T} \int\limits_{\Omega} u^p\, \frac{u^\alpha}{u^\alpha+1}\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt = 0.$$

Откуда стандартными вычислениями получим

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{u(x,T)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1}\, ds\, \psi^{\lambda+1}\, dx + \int\limits_{\epsilon}^{T} \int\limits_{\Omega} u^{m+\alpha-2}\, \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2}\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt$$

$$+ \int\limits_{\epsilon}^{T} \int\limits_{\Omega} u^p\, \frac{u^\alpha}{u^\alpha+1}\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt$$

$$\leq \gamma \Big(\int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{u(x,\epsilon)} \frac{s^\alpha}{s^\alpha+1}\, ds\, \psi^{\lambda+1}\, dx + \int\limits_{\epsilon}^{T} \int\limits_{\Omega} (u^{m+\lambda-1+\alpha} + u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda})\, |D\psi|^{\lambda+1}\, dx\, dt \Big). \tag{4.3}$$

При $\epsilon \to 0$ из (4.3) имеем

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} u^{m+\alpha-2}\, \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2}\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt + \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} u_+^p\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt$$

$$\leq \gamma (1 + \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} (u^{m+\lambda-1+\alpha} + u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda})\, |D\psi|^{\lambda+1}\, dx\, dt), \tag{4.4}$$

где $u_+ = max\{u-1, 0\}$.

Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} u_+^p\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt \leq \gamma (1 + \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} (u^{m+\lambda-1+\alpha} + u^{m+\lambda-1+\alpha\lambda})\, |D\psi|^{\lambda+1}\, dx\, dt). \tag{4.5}$$

Выбирая $\alpha < (p-(m+\lambda-1)) min\{1, 1/\lambda\}$, из (4.5) и неравенства Гельдера получим

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} u_+^p\, \psi^{\lambda+1}\, dx\, dt \leq \gamma. \tag{4.6}$$

Соединяя (4.4) и (4.6), лемма 4.1. доказана. □

Лемма 4.2. *В условиях теоремы 2* $u(x,t)$ *удовлетворяет*

$$\int_0^T\int_\Omega (u\psi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\psi - u^p\psi)\,dx\,dt = 0,$$

$\forall\psi \in C_0^\infty(R^N \times [-T;T]),\ T > 0.$

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\forall\xi \in C_0^\infty(R^N \times [-T;T])$, $\xi(0,0) = 0$

$$\int_0^T\int_\Omega (u\xi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\xi - u^p\xi)\,dx\,dt = 0. \tag{4.7}$$

Выбираем $j(s) \in C_0^\infty(R^N),\ j(s) > 0;\ j(s) = 0$ при $|s| > 1;\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} j(s)\,ds = 1$. Пусть $j_h(s) = h^{-1}j(s/h),\ \eta_h(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} j_h(s-\tau)\,ds$. $\eta_h(t) = 1$ при $t > \tau + h$, $\eta_h(t) = 0$ при $t < \tau - h\ \forall\tau \in (0,T)$.

Умножим уравнение (1.1) на функцию $\xi(x,t)\eta_h(t)$, и проинтегрируем по $\Omega\times(0,T)$. После интегрирования по частям получим

$$-\int_0^T\int_\Omega u(x,t)j_h(t-\tau)\xi(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega (u\xi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\xi - u^p\xi)\eta_h(t)\,dx\,dt.$$

Устремляем $h \to 0$

$$-\int_\Omega u(x,\tau)\ \xi(x,\tau)\,dx = \int_\tau^T\int_\Omega (u\xi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\xi - u^p\xi)\,dx\,dt.$$

Устремляем $\tau \to 0$

$$\int_0^T\int_\Omega (u\xi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\xi - u^p\xi)\,dx\,dt = - < \xi(x,0), \delta(x) >= -\xi(0,0) = 0.$$

Таким образом, (4.7) доказано.

Возьмем $\eta \in C_0^\infty(R)$: $\eta(s) = 1$ при $s > 2$; $\eta(s) = 0$ при $s < 1$. Определим $\eta_k(s) = \eta(ks)$. В качестве пробной возьмем функцию $\xi_k(x,t) = \eta_k(\cdot)\Psi(x,t)$, $\Psi \in C_0^\infty(R^N \times [-T;T])$, тогда $\xi_k(0,0) = 0$. Стандартными вычислениями получим

$$\int_0^T\int_\Omega u\ \eta_{kt}\ \Psi\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\eta_k\Psi\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega (u\Psi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\Psi - u^p\Psi)\eta_k\,dx\,dt = 0.$$

Чтобы доказать утверждение леммы, надо показать, что

$$\int_0^T\int_\Omega u\ \eta_{kt}\ \Psi\,dx\,dt \to 0, \tag{4.8}$$

$$\int_0^T\int_\Omega u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\eta_k\Psi\,dx\,dt \to 0. \tag{4.9}$$

Пусть

$$\eta_k = \eta_k(|x|^{N\nu}+t),$$

где $\nu = m+\lambda-2+\frac{\lambda+1}{N}$.

Определим

$$D_k = \{(x,t) : t>0,\ k^{-1} < |x|^{N\nu}+t < 2k^{-1}\}.$$

Следовательно, мера $|D_k| \le \gamma k^{-(1+\frac{1}{\nu})}$.

Имеем

$$\left|\int_0^T\int_\Omega u\ \eta_{kt}\ \Psi\,dx\,dt\right| \le \gamma k\iint_{D_k} u\,dx\,dt \le \gamma k\Bigg(\iint_{D_k} u^{\nu+1}\,dx\,dt\Bigg)^{1/(\nu+1)} \times \Bigg(\iint_{D_k} dx\,dt\Bigg)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

$$\le \gamma k k^{-(1+\frac{1}{\nu})\frac{\nu}{\nu+1}}\Bigg(\iint_{D_k} u^{\nu+1}\,dx\,dt\Bigg)^{1/(\nu+1)} = \gamma\Bigg(\iint_{D_k} u^{\nu+1}\,dx\,dt\Bigg)^{1/(\nu+1)}$$

При $k\to\infty$ получаем (4.8).

Далее

$$\left|\int_0^T\int_\Omega u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\eta_k\Psi\,dx\,dt\ \right| \le \gamma k\iint_{D_k} u^{m-1}|Du|^{\lambda}\ |x|^{N\nu-1}\,dx\,dt$$

$$\le \gamma k^{\frac{1}{N\nu}}\iint_{D_k} u^{m-1}|Du|^{\lambda}\,dx\,dt \le \gamma k^{\frac{1}{N\nu}}\Bigg(\iint_{D_k} u^{m+\alpha-2}\ \frac{|Du|^{\lambda+1}}{(u^\alpha+1)^2}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\times\Bigg(\iint_{D_k} u^{m-1}\ u^{-(\alpha-1)\lambda}\ (u^\alpha+1)^{2\lambda}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}} \le \gamma k^{\frac{1}{N\nu}}\Bigg(\iint_{D_k} u_1^{m+\lambda-1+\lambda\alpha}\ \,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

$$\le \gamma k^{\frac{1}{N\nu}}\Bigg(\iint_{D_k} u_1^p\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{m+\lambda-1+\lambda\alpha}{(\lambda+1)p}}|D_k|^{\frac{1}{\lambda+1}(1-\frac{m+\lambda-1+\lambda\alpha}{p})}$$

$$\leq \gamma k^{-(1+\frac{1}{\nu})\frac{1}{\lambda+1}(1-\frac{m+\lambda-1+\lambda\alpha}{p})+\frac{1}{N\nu}} \left(\iint\limits_{D_k} u_1^p \, dx \, dt\right)^{\frac{m+\lambda-1+\lambda\alpha}{(\lambda+1)p}}.$$

Здесь $u_1 = max\{u, 1\}$.

Так как $p > m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$, выбираем α так, чтобы

$$0 < \alpha \leq \left(\frac{m+\lambda-1}{\lambda}\right)\frac{p - (m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N})}{m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}},$$

поэтому

$$-(1+\frac{1}{\nu})\frac{1}{\lambda+1}(1-\frac{m+\lambda-1+\lambda\alpha}{p}) + \frac{1}{N\nu} \leq 0.$$

Устремляя $k \to \infty$, получаем (4.9). □

Доказательство теоремы 2.

Из леммы 4.2. имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (u\Psi_t - u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\Psi - u^p\Psi)\, dx\, dt = 0, \tag{4.10}$$

$\forall \Psi \in C_0^\infty(R^N \times (-T;T))$. Выбираем $j(s)$ и $j_h(s)$, описанные ранее. Положим

$$\eta_h(t) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{t-\tau-2h} j_h(s)\, ds, \qquad \tau \in (0,T),$$

со свойствами: $0 \leq \eta_h \leq 1,\ \eta_h \in C^\infty(R);\ \eta_h = 1$ при $t < \tau + h;\ \lim\limits_{h\to 0}\eta_h = 0$ при $t > \tau$.

Для любого $X(x) \in C_0^\infty(R^N)$ берем в (4.10) $\Psi(x,t) = X(x)\eta_h$, получаем

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega j_h(t-\tau-2h)\ u\ X\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuDX + u^pX)\eta_h(t)\, dx\, dt.$$

Пусть $h \to 0$, тогда

$$\int\limits_\Omega u(x,\tau)\ X(x)\, dx = -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuDX + u^pX)\, dx\, dt.$$

Следовательно,

$$\lim_{\tau\to 0}\int\limits_\Omega u(x,\tau)\ X(x)\, dx = 0, \qquad \forall X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

Что противоречит (1.3). Теорема 2 доказана. □

1. *Bresis H.,Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // J. Math. Pures Appl. – 1983. – 62. – P.73-97.
2. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data // Asymptotic Anal. – 1990. – 3. – P.43-56.
3. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption // Sb. Math. – 2005. – 196. – P. 1693-1713.
4. *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data // Commun. in Cont. Math. – 2006. – V.8(3). – P.331-354.
5. *Fan H.J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure // Acta Math. Sinica, English Series. – 2004. – V.20(4). – P.663-682.
6. *Andreucci D., Tedeev A.F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – V.231. – P.543-567.
7. *Ушаков В.И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сб. – 1980. – Т. 111(153). – С.95-115.
8. *Мукминов Ф.Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Мат. сб. – 1980. – Т.111(153). – С.503-521.
9. *Maz'ja V.G.* Sobolev Spaces // Springer Series in Soviet Mathematics. Springer. Berlin. Germany. – 1985.
10. *Гущин А.К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. МИАН. – 1973. – Т. CXXVI. – С.5-45.
11. *Тедеев А.Ф.* О мультипликативных неравенствах в областях с некомпактной границей // Укр. Мат. журн. – 1992. – Т.44. №2. – С.260-268.
12. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – V.132. – P.187-212.
13. *Ivanov A.V.* Holder estimates near the boundary for generalized solutions of quasilinear parabolic equations that admit double degeneration // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 1991. – V.188. – P.45-69.
14. *Porzio M., Vespri V.* Holder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations // J. Diff. Eqns. – 1993. – V.103. – P.146-178.
15. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – V.183. – P.311-341.
16. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967. – 736с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
omboldovskaya@mail.ru

Получено 17.03.08