УДК 517.9:532

©2008. **О.А. Андронова**

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

В работе методами функционального анализа изучается линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии, а также ее абстрактный аналог с использованием абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств, приводятся приложения полученых результатов.

Введение. Автор данной работы и его научный руководитель проф. Копачевский Н.Д. познакомились с проблемой исследования эволюции динамических систем с поверхностной диссипацией энергии на лекции проф. Чуешова И.Д. на 15 Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ – 2004, Ласпи-Батилиман).

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^m$ с достаточно гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Для произвольных функций $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ имеет место формула Грина для оператора Лапласа $\triangle := \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \triangle u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \tag{1}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к Γ.

Если ввести в рассмотрение гильбертовы пространства $L_2(\Omega), \mathcal{H}^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ с соответствующими скалярными произведениями, то формулу (1) можно переписать в виде

$$(\eta, u - \triangle u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} - \left(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma\eta := \eta|_{\Gamma}. \tag{2}$$

Эта формула допускает обобщения, во-первых, на случай менее гладких функций $u(x)$, во-вторых, на случай липшицевой границы $\partial\Omega$, а в-третьих – на случай произвольной тройки гильбертовых пространств E, F и G и абстрактного оператора следа γ. Впервые такая абстрактная формула появилась в монографии ([1], с.46-47), и идея ее получения принадлежит С. Г. Крейну. Затем появились работы [2]–[4], где соответствующее утверждение было получено в наиболее общей формулировке. (Другой вариант абстрактной формулы Грина см. в [5], с.187-189.)

Приведем формулировку соответствующего результата.

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств*

$$\{E, (\cdot,\cdot)_E\}, \{F, (\cdot,\cdot)_F\}, \{G, (\cdot,\cdot)_G\}$$

выполнены условия:

1. Пространство F плотно вложено в E, $F \subset\!\!\to E$, т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{3}$$

2. На пространстве F определен оператор γ (абстрактный оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G, $G_+ \subset\!\!\to G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{4}$$

Тогда существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to G_- := (G_+)^*$, определяемые по E, F и G (с введенными скалярными произведениями), а также по оператору γ единственным образом, такие, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \qquad \forall \eta, u \in F. \tag{5}$$

Здесь символами $\langle \eta, \psi\rangle_E$ и $\langle \xi, \varphi\rangle_G$ обозначены линейные функционалы, построенные на элементах $\eta \in F$, $\psi \in F^*$, $\xi \in G_+$ и $\varphi \in G_-$, соответственно. Они являются соответствующими расширениями (по непрерывности) функционалов $(\eta, \psi)_E$ и $(\xi, \varphi)_G$ при переходе от $\psi \in E$ к $\psi \in F^* \supset E$, а также от $\varphi \in G$ к $\varphi \in (G_+)^*$, соответственно.

Для $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для тройки гильбертовых пространств $L_2(\Omega), \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$(см. ниже) и $L_2(\Gamma)$ с соответствующими скалярными произведениями и для оператора следа $\gamma :\ \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega) \to\ L_2(\Gamma)$, определяемого по закону*

$$\gamma u := u|_\Gamma, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega), \tag{6}$$

имеет место формула Грина

$$\langle \eta, -\triangle u\rangle_\Omega = (\eta, u)_{1,\Omega} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u\right\rangle_\Gamma, \qquad \forall \eta, u \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega). \tag{7}$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ – пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, d\Omega + \int\limits_\Gamma u \cdot \overline{v}\, d\Gamma. \tag{8}$$

Из теорем вложения и теорем о следах для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ следует, что норма в $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, т.е. норме

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) d\Omega. \tag{9}$$

Теорема 2 есть прямое следствие введенных пространств, оператора следа (6), общей теоремы 1, а также формулы (5).

2. Формулировка абстрактной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии. Пусть E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и потому существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to (G_+)^*$ такие, что справедлива формула Грина (5).

Формулировка абстрактной начально-краевой задачи имеет следующий вид. Необходимо найти функцию $u = u(t)$ со значениями в F такую, для которой выполнено гиперболическое уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lu = f(t) \quad (\text{в } E), \tag{10}$$

граничное условие

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0 \quad (\text{в } G), \quad \alpha > 0, \tag{11}$$

а также начальные условия

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1. \tag{12}$$

Здесь L, γ и ∂ – операторы, фигурирующие в формуле Грина (5).

Если $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, то в этом случае

$$Lu = -\triangle u, \quad \partial u = \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u. \tag{13}$$

Таким образом, задача (14)–(16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(t,x), \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma,\, \alpha > 0, \tag{15}$$

$$u(0,x) = u^0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

есть частный случай абстрактной задачи (4)–(6) при $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\gamma u :=\ u|_\Gamma$.

Выведем закон баланса полной энергии для тех решений задачи (4)–(6), для которых все слагаемые в (4), (5) являются непрерывными функциями t. В итоге получаем тождество

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_E^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_F^2\right\} = -\alpha\left\|\frac{d}{dt}(\gamma u)\right\|_G^2 + \left(f(t), \frac{du}{dt}\right)_E. \tag{17}$$

Отсюда при $f(t) \equiv 0$ следует, что полная энергия системы, т.е. сумма в фигурных скобках в левой части соотношения (17), убывает за счет диссипативных процессов, проходящих в пространстве G (поверхностная диссипация).

3. Вспомогательные абстрактные краевые задачи. Рассмотрим вспомогательные абстрактные краевые задачи. Примеры таких задач, основанных на абстрактной формуле Грина, изучены в [2]–[4].

Первая вспомогательная задача (абстрактный аналог задачи Неймана для уравнения Пуассона): по элементу f найти решение v задачи

$$Lv = f \quad (\text{в}\, E), \quad \partial v = 0 \quad (\text{в}\, G). \tag{18}$$

Определение 1. Будем говорить, что элемент $v \in F$ является слабым решением задачи (12), если имеет место тождество

$$(\eta, v)_F = \langle \eta, f \rangle_E, \quad \forall \eta \in F. \tag{19}$$

Лемма 1. *При любом $f \in F^*$ существует единственное слабое решение $v = A^{-1}f$ задачи* (12). *Для этого слабого решения первое соотношение* (12) *выполнено не в E, а в $F^* \supset E$. Соответственно краевое условие* (12) *выполнено в $(G_+)^* \supset G$. Оператор A является оператором гильбертовой пары пространств $(F; E)$, для него $\mathcal{D}(A) = F$, $\mathcal{R}(A) = F^*$. Сужение оператора A, такое, что $\mathcal{R}(A) = E$, является неограниченным положительно определенным оператором, заданным на области определения, плотной в $F \subset E$. При этом $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$ и*

$$\langle \eta, Av \rangle_E = (\eta, v)_F = \left(A^{1/2}\eta, A^{1/2}v\right)_E, \quad \forall \eta, v \in F. \tag{20}$$

Если F компактно вложено в E, то оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

Обратный оператор $A^{-1} : F^* \to F$ ограничен. Если F компактно вложено в E, то $A^{-1} : E \to E$ является компактным положительным оператором.

Доказательство. Оно приведено в работе [2], см. также [3]. □

Отметим еще, что по оператору A можно построить шкалу пространств E^α, $-\infty < \alpha < \infty$, таким образом, что $E^0 = E$, $E^{1/2} = F$, $E^{-1/2} = F^*$.

Заметим также, что при $f \in E$ решение $v = A^{-1}f$ задачи (12) называют обобщенным. При этом $\mathcal{R}(A) = E$, а $A^{-1}\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A)$ плотна в $F = \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Вторая вспомогательная задача (абстрактный аналог задачи Неймана для уравнения Лапласа): по элементу ψ найти решение задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в}\, E), \qquad \partial w = \psi \quad (\text{в}\, G). \tag{21}$$

Определение 2. Говорят, что элемент $w \in F$ является слабым решением задачи (15), если для него выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{22}$$

Отметим, что здесь определения слабых решений первой и второй вспомогательных задач непосредственно следуют из формулы Грина (5) и соотношений (12), (15).

Лемма 2. *При любом элементе* $\psi \in (G_+)^*$ *существует единственное слабое решение* $w = V\psi \in F$. *При этом оператор* V *ограниченно действует из* $(G_+)^*$ *в подпространство* $M \subset F$ *элементов, которые назовем* L*-гармоническими (для них* $Lw = 0$*).*

Доказательство. Оно основано на неравенстве

$$|\langle \gamma\eta, \psi\rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \Big(b\, \|\psi\|_{(G_+)^*}\Big) \cdot \|\eta\|_F$$

и на лемме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве F. $\square$

Лемма 3. *Любой элемент* $u \in F$ *может быть представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных задач* (12) *и* (15)*, т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}f + V\psi, \quad f = Lu \in F^*, \quad \psi = \partial u \in (G_+)^*. \tag{23}$$

Доказательство. Оно приведено в работе [3], см. теорему 2 и замечание 1 этой работы. $\square$

4. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Такой переход от задачи (4)–(6) можно осуществить, считая, что искомая функция $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в F, и опираясь на формулу (23) и операторы A и V вспомогательных абстрактных краевых задач (12) и (15).

Имеем

$$u = v + w = A^{-1}\widehat{f} + V\widehat{\psi}, \quad \widehat{f} = Lu = f(t) - \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \widehat{\psi} = -\alpha\frac{d}{dt}\,(\gamma u)\,.$$

Это приводит к уравнению вида

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u) + u = A^{-1}f(t) \quad (\text{в}\, F), \tag{24}$$

а после замены

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t) \tag{25}$$

и формального применения слева в (20) оператора $A^{1/2}$ – к уравнению

$$A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\eta\right) + \alpha Q^*\frac{d}{dt}\,(Q\eta) + \eta = A^{-1/2}f(t) \quad (\text{в}\, E), \tag{26}$$

$$Q := \gamma A^{-1/2} :\, E \to G_+, \quad Q^* := A^{1/2}V :\, (G_+)^* \to E \tag{27}$$

и начальным условиям

$$\eta(0) = A^{1/2}u^0, \quad \eta'(0) = A^{1/2}u^1. \tag{28}$$

Возникла абстрактная задача Коши для линейного полного (при $\alpha > 0$) дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве E. При $\alpha = 0$ она преобразуется в задачу Коши для гиперболического уравнения.

Замечание 1. Можно показать, что операторы Q и Q^* взаимно сопряжены и ограничены. А если G_+ компактно вложено в G, то оператор $Q:\, E \to G$ компактен. При этом сужение $Q^*|G$ – также компактный оператор. Поэтому

$$B := Q^*Q:\, E \to E$$

является неотрицательным (самосопряженным) оператором. В этом случае

$$\mathrm{Ker\,B} = \mathrm{Ker\,Q} =: \mathrm{E_0} = \mathrm{A^{1/2}N} := \{\eta \in \mathrm{E}:\, \eta = \mathrm{A^{1/2}u}, \mathrm{u} \in \mathrm{F}, \gamma\mathrm{u} = 0\}, \tag{29}$$

а на ортогональном дополнении

$$E_1 := E \ominus E_0, \quad \dim E_1 = \infty$$

оператор $B|E_1$ положителен. Если G_+ компактно вложено в G, то $B|E_1$ компактен и потому его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой в нуле.

Итак, исходная задача (4)–(6) приведена к задаче Коши (26)–(28), а свойства операторных коэффициентов уравнения (26) описаны в лемме 1 и замечании 1. Именно эта задача и будет предметом дальнейших исследований.

5. Применение теории сжимающих полугрупп. Осуществим переход от задачи (26)–(28) к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сжимающей полугруппы. Это позволит доказать теорему о корректной разрешимости задачи (26)–(28), а затем и исходной задачи (4)–(6).

Преобразуем задачу (26)–(28), приведя ее к системе двух дифференциальных уравнений следующим образом. Введем новую искомую функцию $\zeta(t)$ соотношениями

$$-i\eta = \frac{d\zeta}{dt}, \quad \zeta(0) = 0, \tag{30}$$

а затем продифференцируем это уравнение. Тогда

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + i\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \zeta'(0) = -i\eta^0 = -iA^{1/2}u^0. \tag{31}$$

Запишем теперь (26) с учетом (30), (26) в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид

$$\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Начальные условия для уравнения (32) таковы:

$$(\eta(0);\zeta(0))^t = \left(A^{1/2}u^0;0\right)^t, \quad (\eta'(0);\zeta'(0))^t = \left(A^{1/2}u^1;-iA^{1/2}u^0\right)^t. \tag{33}$$

Введем в (32), (33) обозначения

$$y(t) := \left(\frac{d\eta}{dt}; \frac{d\zeta}{dt}\right)^t, \; f_0(t) := (A^{-1/2}f; 0)^t,$$
$$\mathcal{A}^{-1/2} := \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \; \mathcal{B} := \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Тогда задача (32), (33) принимает вид

$$\mathcal{A}^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}^{-1/2}y\right) + \mathcal{B}y = f_0(t), \quad y(0) = y^0 := (A^{1/2}u^1; -iA^{1/2}u^0)^t. \tag{35}$$

Осуществим здесь замену искомой функции по формуле

$$z(t) := \mathcal{A}^{-1/2}y(t). \tag{36}$$

После применения слева в (35) оператора $\mathcal{A}^{1/2}$ возникает задача Коши

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2}z(t) + \mathcal{A}^{1/2}f_0(t),$$
$$z(0) = (u^1; -iA^{1/2}u^0), \quad \mathcal{A}^{1/2}f_0(t) = (f(t); 0)^t. \tag{37}$$

Таким образом, проведенные формальные преобразования позволили перейти от задачи Коши (26)–(28) для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка, рассматриваемого в пространстве E и не разрешенного относительно старшей производной, к задаче Коши в пространстве $E^2 := E \oplus E$ для уравнения первого порядка с одним операторным коэффициентом — операторной матрицей

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} := \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Это позволит применить к задаче (37) теорию сжимающих полугрупп операторов (см., например, [6]).

Заметим сначала, что операторная матрица $\mathcal{B}$ из (34) является ограниченным и ограниченно обратимым оператором, так как оператор $B = Q^*Q$ ограничен и

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ из (38) имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1} := \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{40}$$

а потому он задан на всем пространстве E^2. Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1}), \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1}) = E^2. \tag{41}$$

Кроме того, оператор $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ является аккретивным, т.е.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathcal{A}_\mathcal{B} z, z)_{E^2} =&\Big(\alpha B(A^{1/2}z_1), (A^{1/2}z_1)\Big)_E = \alpha \Big\| Q A^{1/2} z_1 \Big\|_E^2 \geqslant 0,\\ \forall z =&(z_1; z_2)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B}).\end{aligned} \tag{42}$$

Из (41) и (28) следует, что оператор $-\mathcal{A}_\mathcal{B}$ является максимальным диссипативным оператором на области определения (41). Значит, этот оператор – генератор сжимающей полугруппы операторов $U(t) := \exp(-t\mathcal{A}_\mathcal{B})$, через которую можно выразить решение задачи (37).

Далее понадобится следующий общий факт.

Теорема Р.С. Филлипс. *Пусть в задаче Коши*

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geqslant 0, \tag{43}$$

рассматриваемой для функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве E, оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы (C_0 – полугруппы) операторов $U(t)$ и выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad f(t) \in C^1([0,T]; E). \tag{44}$$

Тогда задача (29) *имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$, и оно выражается формулой*

$$u(t) = U(t)u^0 + \int_0^t U(t-s) f(s) ds. \tag{45}$$

Отметим, что сильным решением задачи (29) на отрезке $[0,T]$ называют такую функцию $u(t)$, для которой все слагаемые в уравнении (29) являются непрерывными функциями t при $t \in [0,T]$.

Опираясь на теорему Филлипса и условия (44), сформулируем условия, обеспечивающие существование сильного решения задачи (37). Из второго условия (44) получаем требование

$$f(t) \in C^1([0,T]; E) \tag{46}$$

для правой части уравнения (4). Далее, условие

$$z(0) = (u^1; -iA^{1/2}u^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2}).$$

приводит к соотношениям

$$A^{1/2}u^1 \in E, \quad \alpha B A^{1/2} u^1 + A^{1/2} u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Теорема 3. *Если выполнены условия:*

1^0. $f(t) \in C^1([0,T]; E)$,

2^0. $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = F$,

3^0. $\alpha V\gamma u^1 + u^0 \in \mathcal{D}(A)$,

то задача Коши (37) *имеет единственное сильное решение* $z(t)$ *на отрезке* $[0, T]$.

Замечание 2. Условие 3^0 теоремы 3 говорит о том, что начальные данные в задаче (37) должны быть согласованы для того, чтобы существовало сильное решение этой задачи. Если воспользоваться, согласно лемме 3, представлением $u^0 = v^0 + w^0$ и вспомнить, что по непрерывности при $t \to 0$ должно быть $w^0 = -\alpha V\gamma u^1$, то требование 3^0 сводится к естественному условию

$$u^0 - w^0 = v^0 \in \mathcal{D}(A). \tag{47}$$

6. Теорема о сильной разрешимости абстрактной начально-краевой задачи. Рассмотрим сначала вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (26)–(28).

Определение 3. Будем говорить, что задача (26)–(28) имеет на отрезке $[0, T]$ сильное решение со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$, если в уравнении (26) слагаемое $A^{-1/2}\dfrac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta)$ и сумма $\alpha Q^*\dfrac{d}{dt}(Q\eta) + \eta$ являются непрерывными функциями $t \in [0, T]$ со значениями в F, выполнено уравнение (26) при $t \in [0, T]$, а также начальные условия (28).

Из теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия* $1^0 - 3^0$ *теоремы 3, то задача* (26)–(28) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть выполнены условия $1^0 - 3^0$ теоремы 3. Тогда задача Коши (37) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0, T]$. Это означает, что функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dz_1}{dt} + A^{1/2}(\alpha BA^{1/2}z_1 + iz_2) = f(t), \quad \frac{dz_2}{dt} + iA^{1/2}z_1 = 0 \tag{48}$$

и начальным условиям

$$z_1(0) = u^1, \ z_2(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{49}$$

При этом в уравнениях (34) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in \ [0, T]$ со значениями в E, в частности,

$$\begin{aligned} &z_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap (C^1[0, T]; E), \qquad z_2(t) \in C^1([0, T]; E), \\ &\alpha BA^{1/2}z_1(t) + iz_2(t) \in C([0, T]; E). \end{aligned} \tag{50}$$

Осуществляя в (34) обратные замены (см. (36), (34)), т.е.

$$z_1(t) = A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}, \quad z_2(t) = \frac{d\zeta}{dt}, \tag{51}$$

будем иметь систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + A^{1/2}\left(\alpha B\frac{d\eta}{dt} + i\frac{d\zeta}{dt}\right) = f(t), \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + i\frac{d\eta}{dt} = 0 \tag{52}$$

и начальных условий (см. (28), (30), (26))

$$\eta(0) = A^{1/2}u^0, \ \zeta(0) = 0, \ \eta'(0) = A^{1/2}u^1, \ \zeta'(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{53}$$

Из второго уравнения (38) с учетом условий для $\eta(0)$ и $\zeta'(0)$ будем иметь

$$\frac{d\zeta}{dt} + i\eta(t) = 0, \qquad \zeta(t) \in C^2([0,T];E), \ \eta(t) \in C^1([0,T];E). \tag{54}$$

Подставляя $d\zeta/dt$ в первое уравнение (38), получим, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + A^{1/2}\left(\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta(t)\right) = f(t), \ \eta(0) = A^{1/2}u^0, \ \eta'(0) = A^{1/2}u^1, \tag{55}$$

имеет единственное сильное решение $\eta(t)$, причем все слагаемые (55) являются элементами из $C([0,T];E)$. В частности,

$$\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})), \tag{56}$$

в то время как каждое слагаемое в этой сумме является, вообще говоря, элементом из $C([0,T],E)$.

Применяя слева в (55) (ограниченный) оператор $A^{-1/2}$, получим уравнение

$$A^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + \left(\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta\right) = A^{-1/2}f(t), \tag{57}$$

где все слагаемые, в том числе и сумма в скобке – это элементы из $C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})) = C([0,T];F)$.

Убедимся теперь, что решение $\eta(t)$ уравнения (57) является также решением со значениями в F задачи (26)–(28). Это можно доказать, так как имеют место тождества

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta), \qquad Q\frac{d\eta}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(Q\eta). \tag{58}$$

Этим теорема полностью доказана. □

Опираясь на этот результат, докажем основное утверждение, связанное с разрешимостью задачи (4)–(6).

Определение 4. Будем говорить, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи (4)–(6) на отрезке $[0,T]$, если

$$u(t) \in C^2([0,T];E) \cap C^1([0,T];F) \tag{59}$$

и для нее выполнено уравнение (4), где каждое слагаемое является элементом из $C([0,T];E)$, граничное условие (5), где каждое слагаемое является элементом из $C([0,T];G_+)$, а также начальные условия (6).

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1^0-3^0 *теоремы 3, то задача* (4)–(6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть выполнены условия $1^0 - 3^0$ теоремы 3. Тогда справедливы утверждения теоремы 4, т.е. задача (26)–(28) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ в смысле определения 3.

Осуществим в (26)–(28) обратную замену (25), т.е. введем $u(t) = A^{-1/2}\eta(t)$. Тогда уравнение (26) приобретает вид

$$A^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha A^{1/2}V\frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2}u\right) = A^{-1/2}f(t), \tag{60}$$

а начальные условия (28) переходят в условия

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \tag{61}$$

В уравнении (60) все слагаемые, в том числе и слагаемое в скобках, являются, как следует из доказательства теоремы 4, элементами из $C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))$. Поэтому $u(t) \in \ C^2([0,T];E)$. Кроме того, так как $\eta(t) \in C^1([0,T];E)$ (см. (54)), то $u(t) = A^{-1/2}\eta(t) \in C^1([0,T];F)$, т.е. для $u(t)$ выполнены свойства (59). Осталось лишь проверить, что для $u(t)$ выполнено уравнение (4) и граничное условие (5) со свойствами, сформулированными в определении 4.

Подействуем слева в (60) (ограниченным) оператором $A^{-1/2}$. Тогда придем к уравнению

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u) + u\right) = A^{-1}f(t), \tag{62}$$

а все слагаемые, в том числе и сумма в скобках, являются элементами из $C([0,T];$ $\mathcal{D}(A))$. Введем функции

$$v(t) := A^{-1}\left(f(t) - \frac{d^2u}{dt^2}\right),\ w(t) := -\alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u). \tag{63}$$

Тогда из (62) следует, что, во-первых,

$$u(t) = v(t) + w(t), \tag{64}$$

во-вторых,

$$v(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A)),\ w(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})). \tag{65}$$

Поэтому из соотношений (63) получаем, что для функций $f(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ справедливы связи (64) и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Av = f(t), \quad \partial w + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0. \tag{66}$$

Здесь первое соотношение получено путем применения оператора A, что возможно в силу первого свойства (65), а второе – в силу определения оператора V второй краевой задачи (см. (15)–(22)). Заметим теперь, что согласно определению оператора A (см. (12)–(20)), из первой формулы (66) следуют связи

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lv = f(t), \quad \partial v = 0. \tag{67}$$

Далее, для элемента w, кроме (66), имеем также соотношение

$$Lw = 0. \tag{68}$$

В первой формуле (67) каждое слагаемое, очевидно, является элементом из $C([0,T];E)$. Далее, во второй формуле (66) каждое слагаемое – элемент из $C([0,T];G_+)$. В самом деле, так как $u(t) \in C^1([0,T];F)$, то, согласно определению оператора γ, имеем $\gamma u \in C^1([0,T];G_+)$, а потому $d(\gamma u)/dt \in C([0,T];G_+)$.

Складывая теперь левые и правые части первой формулы (67) и формулы (68), а также вторые части формул (66) и (67), а затем используя связь (64), приходим к выводу, что функции $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lu = f(t), \tag{69}$$

где все слагаемые – элементы из $C([0,T];E)$, а также краевому условию

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0, \tag{70}$$

где все слагаемые – элементы из $C([0,T];G_+)$. Это полностью доказывает теорему. $\square$

Опираясь на установленный общий факт, сформулируем итоговый результат исследования разрешимости исходной начально-краевой задачи математической физики с поверхностной диссипацией энергии(см. (14)–(16)).

Теорема 6. *Пусть в начально-краевой задаче* (14)–(16)*, рассматриваемой в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ*, выполнены условия:*

1^0. $f(t,x) \in C^1([0,T];L_2(\Omega))$*;*

2^0. $u^1(x) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$*;*

3^0. $u^0(x) = v^0(x) + w^0(x),\ v^0(x) \in \mathcal{D}(A) \subset \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega),\ w^0(x) = -\alpha V\gamma u^1 \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_h(\Omega)$.

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$*, т.е. такую функцию*

$$u(t,x) \in C^2([0,T];\, L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T];\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)),$$

для которой выполнено уравнение (14)*, где каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];\, L_2(\Omega))$*, граничное условие* (15)*, где слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma))$*, а также начальные условия* (16).

7. Приложения. В общую абстрактную схему, разобранную выше, попадают задачи с равномерно эллиптическим формально самосопряженным дифференциальным выражением, эволюционные задачи, содержащие сильно эллиптическую подсистему дифференциальных выражений второго порядка, уравнения линейной теории упругости, задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии и стыковые задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. Эти задачи являются частным случаем абстрактной задачи (4)–(6) в соответственно подобранных пространствах. Можно доказать, что для них справедливы общие выводы работы.

Автор благодарит научного руководителя проф. Копачевского Н.Д. за постановку задачи, руководство работой и совместное творчество.

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416с.
2. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский математ. вестник, Т.1, №1 (2004). – С.69-97.
3. *Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ), Симферополь, №2, 2004. – С.52-80.
4. *Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина и задача Стокса // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2004. – Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред.
5. *Обен Ж.-П.* Приближенные решения эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384с.
6. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща школа, 1989. – 347с.

Таврический национальный ун-т им. В.И.Вернадского
Получено 03.10.07
`kopachevsky@tnu.crimea.ua;`
`o.andronova@list.ru`