

УДК 524.7

Формы эллиптических орбит и устойчивость газопылевых колец в прецессирующих галактиках

В. А. Антопов, О. А. Железняк

Изучены свойства эллиптических орбит в поле тяготения прецессирующей галактики, представляемой в виде однородного сплюснутого сфероида. Получены три возможных типа орбит, по-разному наклоненных к экваториальной плоскости галактики. На основании вариационного принципа исследована их устойчивость. Показано, что одна из них устойчива по отношению к диссипативным факторам (вековая устойчивость), две другие — неустойчивы. Устойчивая орбита может физически реализоваться в прецессирующей галактике как стационарное газопылевое кольцо или диск с наклоном к экваториальной плоскости галактики.

THE SHAPES OF ELLIPTIC ORBITS AND GAS-DUST RING STABILITY IN PRECESSING GALAXIES, by Antonov V. A., Zheleznyak O. A.— Characteristics of elliptic orbits in the gravitational field of a precessing galaxy assuming to be a homogeneous oblate spheroid are studied. Three possible types of orbits with different obliquities to the equatorial plane of the galaxy are found.

Basing on the variation principle the stability of elliptical orbits in the precessing galaxy is investigated. It is shown that one of three possible orbits is stable relative to dissipation factors (secular stability) and two others are unstable. A stable orbit may exist in the precessing galaxy as a stationary gas-dust ring or a disc that is inclined to the equatorial plane of the galaxy.

Из наблюдений известно, что кольцевые структуры существуют во многих эллиптических галактиках [4]. Они представляют собой газопылевые образования, которые располагаются в сплюснутых галактиках преимущественно вдоль большой оси. Принято считать, что газопылевое вещество должно находиться в экваториальной плоскости галактики. Однако имеются многочисленные исключения, когда кольцо наклонено к большой оси или даже ортогонально ей [3, 7]. Вопрос о динамическом объяснении таких структур обсуждался в работах [5, 6]. Основное внимание в них обращено на формирование полярных газовых дисков в галактиках. Отмечалось также, что, принимая нормальное вращение галактик, трудно представить, почему кольца сохраняют наклонное положение и составляющее их вещество не падает на экваториальную плоскость. Весьма естественно предположить, что основное тело этих галактик на самом деле прецессирует, тогда движение газопылевых частиц становится несимметричным. В общем случае движение частиц по отношению к прецессирующей системе координат x, y, z может быть различным, но здесь ограничимся движением частиц друг за другом, т. е. предполагаем, что газопылевое кольцо представляет собой совокупность орбит одного типа. Кроме того, будем пренебрегать газовым давлением, которое мало по сравнению с воздействием гравитационного поля.

Определение орбит. Для определения орбит необходимо задать вид гравитационного потенциала галактики:

$$\Phi = 0.5 [A(x^2 + y^2) + Cz^2], \quad A > 0, \quad C > 0, \quad (1)$$

что соответствует потенциалу однородного сфероида. В той же системе координат введем вектор угловой скорости вращения галактики $\Omega(\Omega \cos \alpha, 0, \Omega \sin \alpha)$ как геометрической структуры. Сходную прецес-

сионную модель, но относящуюся к трехосному эллипсоиду, рассмотрел Б. П. Кондратьев [1]. Как ясно на примере последней модели, внутреннее движение звездного населения, вообще говоря, совершается с угловой скоростью, отличной от Ω (для наших рассуждений это не имеет значения).

Составим уравнения движения во вращающейся системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -Ax + \Omega^2 \sin \alpha (x \sin \alpha - z \cos \alpha) + 2\Omega \dot{y} \sin \alpha; \\ \ddot{y} = -Ay + \Omega^2 y - 2\Omega (\dot{x} \sin \alpha - \dot{z} \cos \alpha); \\ \ddot{z} = -Cz + \Omega^2 \cos \alpha (z \cos \alpha - x \sin \alpha) - 2\Omega \dot{y} \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Периодическое решение данной системы получается как вещественная часть элементарного комплексного решения $x = x_0 \exp(i\omega t)$, $y = y_0 \exp(i\omega t)$, $z = z_0 \exp(i\omega t)$. Подстановка его во второе уравнение системы (2) дает

$$(\omega^2 - A + \Omega^2) y_0 = 2i\omega\Omega (x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha), \quad (3)$$

а при подстановке в первое и третье — уравнения принимают вид

$$(\omega^2 - A) x_0 + \Omega^2 \sin \alpha [1 - 4\omega^2/(\omega^2 - A + \Omega^2)] (x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) = 0; \quad (4)$$

$$(\omega^2 - C) z_0 - \Omega^2 \cos \alpha [1 - 4\omega^2/(\omega^2 - A + \Omega^2)] (x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) = 0.$$

Искомое дисперсионное уравнение получается как условие совместности двух уравнений (4) относительно x_0 и z_0 :

$$1 + \Omega^2 [1 - 4\omega^2/(\omega^2 - A + \Omega^2)] [\sin^2 \alpha/(\omega^2 - A) + \cos^2 \alpha/(\omega^2 - C)] = 0. \quad (5)$$

Видно, что относительно ω^2 уравнение (5) является кубическим. Дадим анализ (5) при условии

$$C > A > \Omega^2, \quad (6)$$

что характерно для сплюснутых галактик с подчиненной ролью центробежных сил. Важным пунктом анализа оказывается определение знака левой части уравнения (5), обозначаемой через $f(\omega^2)$, вблизи

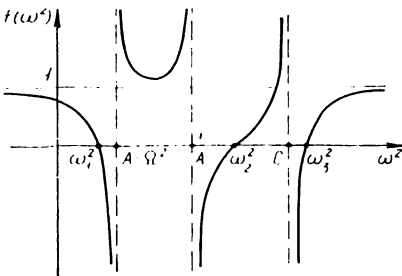


Рис. 1. Общая форма зависимости $f(\omega^2)$

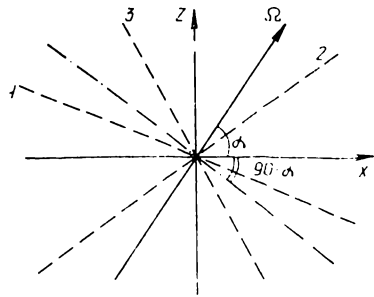


Рис. 2. Взаимное расположение плоскостей симметрии галактики, вектора мгновенной угловой скорости и плоскостей трех типов эллиптических орбит

особых точек при ω^2 , равном C , A и $A - \Omega^2$. При выполнении (6) единственное возможное расположение ветвей кривой $f(\omega^2)$ показано на рис. 1. Соответственно, для ω^2 — три положительных корня на следующих интервалах: $0 < \omega_1^2 < A - \Omega^2$; $A < \omega_2^2 < C$; $C < \omega_3^2$. Других корней, очевидно, кубическое уравнение иметь не может.

Обратим внимание на зависимость корней от α . По правилам дифференцирования неявной функции $\frac{d(\omega^2)}{d\alpha} = - \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} / \frac{\partial f}{\partial (\omega^2)} \right]$. Знак $\frac{\partial f}{\partial (\omega^2)}$ виден на рис. 1, а

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2\Omega^2 \frac{-3\omega^2 - A + \Omega^2}{\omega^2 - A + \Omega^2} \frac{(A - C) \sin \alpha \cos \alpha}{(\omega^2 - A)(\omega^2 - C)}$$

Отсюда ясно, что $\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} < 0$, $\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha} < 0$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} > 0$. Отметим крайние случаи: если $\alpha = 0$, непосредственно из (5) видно, что $\omega_2 = \sqrt{A}$, а если $\alpha = \pi/2$, то $\omega_2 = \sqrt{C}$ или $\omega_3 = \sqrt{C}$ в зависимости от того, выполняется ли неравенство

$$\Omega > \sqrt{C} - \sqrt{A} \tag{7}$$

или противоположное ему. В критическом случае, когда (7) превращается в равенство, имеем дело с двойным корнем $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{C}$.

Геометрические свойства орбиты характеризуются углом наклона φ ее плоскости к плоскости x, y и отношением полуосей эллипса. Ввиду вещественности отношения z_0/x_0 можно пользоваться простой формулой

$$\varphi = \text{arctg}(z_0/x_0), \tag{8}$$

где величина z_0/x_0 определяется одним из равенств (4) или их комбинацией. Так что всего получается три способа ее определения

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{x_0} &= \frac{\omega^2 - A + \Omega^2 \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega^2 - A + \Omega^2} \right)}{\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega^2 - A + \Omega^2} \right)} = \\ &= \frac{\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega^2 - A + \Omega^2} \right)}{\omega^2 - C + \Omega^2 \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega^2 - A + \Omega^2} \right)} = - \frac{\omega^2 - A}{\omega^2 - C} \text{ctg} \alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

В непрецессирующей галактике, когда $\alpha = 0$, величина z_0/x_0 обращается в нуль для двух меньших корней, поскольку при $\omega^2 < C$ знаменатель второй дроби в (9) заведомо отличен от нуля (отрицателен). При $\omega = \omega_3$ вследствие того, что $\omega^2 - A > 0$, первая дробь (9) дает $z_0/x_0 \rightarrow \infty$. Итак, при $\alpha = 0$ две орбиты лежат в экваториальной плоскости, а одна — в меридиональной.

Если расположить Ω наклонно, то $\varphi < 0$ при $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_3$ и $\varphi > 0$ при $\omega = \omega_2$. Это подтверждается рис. 2, на котором показано расположение орбит с наклоном, вычисленным по формулам (9). В другом крайнем случае при $\alpha = \pi/2$ для $\omega = \omega_1$ ввиду $\omega^2 < C$ вторая дробь (9) дает $z_0/x_0 = 0$; то же самое отмечается и для того из корней ω_2, ω_3 , который отличен от \sqrt{C} . Для корня, стремящегося к \sqrt{C} , пределом числителя первой дроби (9) будет величина $C - A + \Omega^2 \left(1 - \frac{4C}{C - A + \Omega^2} \right)$, которая обращается в нуль только в резонансном случае $= \Omega \sqrt{C} - \sqrt{A}$. Для другого корня отношение $z_0/x_0 \rightarrow \infty$ (кроме отмеченного критического случая). В самом же критическом случае величина z_0/x_0 имеет конечный предел обоих слившихся корней.

Таким образом, при условии (7) одна из орбит, а именно соответствующая ω_2 , поворачивается при изменении α от 0 до $\pi/2$ от эква-

ториальной плоскости до меридиональной, а орбита, отвечающая ω_3 , поворачивается в противоположную сторону. Если же вместо (7) справедливо обратное неравенство, то при прохождении интервала $0 < \alpha < \pi/2$ каждая орбита возвращается в первоначальную плоскость.

Для определения полуосей эллипса выполним преобразования к его собственной системе координат ξ, η, ζ с помощью формул

$$x = \xi \cos \varphi - \zeta \sin \varphi; \quad y = \eta; \quad z = \xi \sin \varphi - \zeta \cos \varphi. \quad (10)$$

В частности, в плоскости орбиты $x = \xi \cos \varphi; z = \xi \sin \varphi$. Следовательно, из (3) получаем $(\omega^2 - A + \Omega^2)\eta = 2\Omega \sin(\alpha - \varphi)\dot{\xi}$. Вращение по эллипсу описывается формулами

$$\dot{\xi} = -\frac{a}{b}\omega\eta; \quad \dot{\eta} = \frac{b}{a}\omega\xi; \quad \dot{\zeta} = 0,$$

так как это единственное линейное поле скоростей, оставляющее инвариантным эллипс

$$\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1. \quad (11)$$

В данном случае имеем $a/b = (\omega^2 - \Omega^2 - A)/[2\omega\Omega \sin(\varphi - \alpha)]$. Заметим, что знак величины a/b указывает направление вращения, которое будет прямым при $\omega = \omega_1$ и обратным в двух других случаях. Орбита вырождается в круговую лишь в исключительных случаях, превращение эллипса в прямолинейный отрезок наступает для некоторых орбит при крайних значениях α , равных 0 или $\pi/2$.

Таким образом, установлено три типа орбит в прецессирующих галактиках, имеющих разный наклон к их экваториальной плоскости.

Устойчивость газопылевого образования. Для реализации найденных эллиптических орбит в качестве газопылевых образований в галактиках необходима их устойчивость по отношению к необратимым диссипативным воздействиям. В принципе возможны воздействия различного типа. Конкретизируем некоторые из них. Будем считать неизменным уравнение состояния газопылевого вещества при незначительной роли давления по сравнению с эффектом гравитационного поля, но допускаем потерю энергии путем передачи импульсов в разреженной среде, заполняющей галактику. В результате газопылевое кольцевое образование должно терять энергию и прийти в некоторое стационарное состояние.

В нашем случае нет особой разницы между диском (внутренняя область (11)) и кольцом $\mu < \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 < 1$, где μ — некоторая постоянная. В дальнейшем будем рассматривать диск, чтобы не записывать коэффициенты, не изменяющие сути дела. Полную энергию диска и вектор кинетического момента обозначим соответственно через E и \mathbf{L} . В прецессирующей галактике, вращающейся как геометрическая структура с угловой скоростью Ω , под действием консервативных сил сохраняется не E и \mathbf{L} в отдельности, а только их комбинация [2]:

$$H = E - \Omega \mathbf{L} = E - \Omega(L_x \cos \alpha + L_z \sin \alpha). \quad (12)$$

Необратимые процессы должны приводить диск в состояние с минимальным значением H при условии сохранения инвариантов, которыми являются, **во-первых**, полная масса диска и, **во-вторых**, циркуляция скорости вдоль контура диска. Ограничимся полями скоростей, линейными по координатам, что во многих случаях может быть хорошим приближением в гравитационном потенциале галактики (1). Диск считаем однородным с постоянной поверхностной плотностью σ . Указанными условиями определена задача на минимум H . Для ее решения введем декартовы компоненты скорости v_x, v_y, v_z — по отношению к инерциальной системе координат, наряду с x, y, z — по отношению к вращающейся системе. Между собой они связаны хорошо

известным соотношением (в векторной записи)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (13)$$

Полную энергию диска и его момент можно выразить как

$$E = \int (v^2/2 + \Phi) dm; \quad \mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm,$$

где введен элемент массы dm . С учетом выражений (12) и (13) находим

$$H = \int [(\dot{\mathbf{r}}/2)^2 + \Phi_1] dm, \quad (14)$$

где

$$\Phi_1 = \Phi - 0.5(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2. \quad (15)$$

Циркуляция скорости определяется обычным путем:

$$P = \oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (16)$$

Пусть ось ζ перпендикулярна к осям ξ , η и образует с ними правую систему координат. Поле скоростей в плоскости диска можно записать в виде

$$\dot{\xi} = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta; \quad \dot{\eta} = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta; \quad \dot{\zeta} = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta. \quad (17)$$

Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ в новой системе координат имеет компоненты Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 . Подстановка (17) в (16) дает достаточно простое выражение

$$P = (2\Omega_3 + \alpha_2 - \beta_1) \oint \xi d\eta = \pi ab (2\Omega_3 + \alpha_3 - \beta_1). \quad (18)$$

Аналогично преобразуется формула (14). Сначала имеем

$$H = \int \Phi_1 dm + \frac{\sigma}{2} \iint [(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta)^2 + (\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta)^2 + (\alpha_3 \xi + \beta_3 \eta)^2] d\xi d\eta.$$

После использования известных интегралов, выражающих моменты инерции эллипса

$$\iint \xi^2 d\xi d\eta = \frac{1}{4} \pi a^3 b, \quad \iint \eta^2 d\xi d\eta = \frac{1}{4} \pi a b^3, \quad \iint \xi \eta d\xi d\eta = 0,$$

находим

$$H = \int \Phi_1 dm + \frac{M}{8} [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) a^2 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) b^2], \quad (19)$$

где M — масса диска. Функция H при фиксированных P и M должна иметь экстремум, в частности по отношению к кинематическим параметрам α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , β_3 . Известным методом неопределенных множителей находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \beta_3 = 0; \quad \beta_1/\alpha_2 = -a^2/b^2. \quad (20)$$

Используя (20) и (17), получаем

$$\frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{\eta}{\xi} = \frac{d\xi}{d\eta} \quad (21)$$

(производная взята вдоль контура эллипса). Соотношение (21) имеет наглядный кинематический смысл: по отношению к системе координат, вращающейся вместе с галактикой, скорость частиц на границе диска ориентирована по касательной к контуру. Легко видеть, что это условие сохраняется независимо от того, в какой момент времени бе-

рется экстремум. Действительно, без учета диссипации величины M , P и H в процессе динамической эволюции сохраняются, поэтому сохраняется экстремальность H по отношению к близким состояниям с теми же M и P .

На этом этапе рассуждений мы нашли, что экстремум H соответствует движению частиц друг за другом и контуры эллипса оказываются орбитами. Остается выбрать из экстремумов минимумы. Покажем, что найденным орбитам с частотами обращения ω_2, ω_3 не соответствует минимум H . Достаточно построить возмущение специального типа, увеличивающее H . В координатах ξ, η, ζ выражение Φ_1 имеет вид

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \{A(\xi \cos \varphi - \zeta \sin \varphi)^2 + C(\xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi)^2 - \Omega^2 [\eta^2 + (\xi \sin(\varphi - \alpha) + \zeta \cos(\varphi - \alpha))^2]\}. \quad (22)$$

Для рассматриваемого конкретного типа вариации ориентация орбиты и очерченная ею площадь сохраняются неизменными, меняется только отношение a к b . Таким образом, полагаем $\zeta=0$ и после несложного вычисления интеграла в (19) получим

$$H = \frac{M}{8} \{a^2 [A \cos^2 \varphi + C \sin^2(\varphi - \alpha)] + a^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + b^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + b^2 (A - \Omega^2)\}. \quad (23)$$

Подставим в (13) те значения кинетических параметров, которые минимизируют H при фиксированной величине (18). После решения задачи на условный минимум имеем

$$H = \frac{M}{8} \{a^2 [A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi - \Omega^2 \sin(\varphi - \alpha)] + (P/\pi - 2ab\Omega_3)^2/(a^2 + b^2)\}. \quad (24)$$

С помощью кинетических характеристик, полученных ранее, и выражения (18) можно проверить, что

$$P/\pi - 2ab\Omega_3 = (a_0^2 + b_0^2)\omega,$$

где a_0 и b_0 — невозмущенные значения полуосей диска. После варьирования (14) с точностью до $(\delta a)^2, (\delta b)^2$ получаем (учитывая, что $ab = \text{const}$)

$$\delta H = \frac{M}{8} \{(\delta a)^2 [A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi - \Omega^2 \sin^2(\varphi - \alpha)] + (\delta b)^2 (A - \Omega^2) - [(\delta a)^2 + (\delta b)^2] \dot{\omega}^2\} = \frac{M}{8} (A - \Omega^2 - \omega^2) \left[\delta b - \frac{2\Omega\omega \sin(\alpha - \varphi)}{A - \Omega^2 - \omega^2} \delta a \right]^2, \quad (25)$$

причем для последнего преобразования использовались формулы (9). Из (25) вытекает требуемое утверждение о знаке δH , поскольку $\omega^2_2 > A - \Omega^2, \omega^2_3 > A - \Omega^2$.

Из соображений непрерывности и неограниченного возрастания Φ_1 при $r \rightarrow \infty$ следует, что в данной задаче минимум H должен где-то существовать. Так как орбиты с частотами ω_2 и ω_3 уже исключены, то остается допустить, что минимум H дают орбиты с частотой ω_1 . Эти орбиты оказываются единственными устойчивыми в вековом смысле — состояние кольца или диска постепенно приближается к ним при необратимой потере механической энергии газопылевой средой.

Напомним, что плоскости таких орбит наклонены больше, чем экваториальная плоскость галактики к вектору Ω , но не достигают

ортогонального положения. В крайних случаях, когда $\alpha=0$ или $\alpha=\pi/2$, орбита точно находится в экваториальной плоскости галактики.

Наши исследования позволяют объяснить наклонное положение газопылевых колец в некоторых эллиптических галактиках тем, что галактика прецессирует и устойчивое положение кольца вследствие этого отклоняется от ее экваториальной плоскости.

1. *Кондратьев Б. П.* Бесстолкновительные аналоги эллипсоидов Римана: самосогласованная модель эллипсоида с «наклонным» вращением // *Астрофизика*.— 1984.— 21, вып. 3.— С. 499—521.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика.— М.: Наука, 1965.— Т. 1.— 204 с.
3. *Bettoni D.* Rotation axes of gas and stars in elliptical galaxies // *ESO Messenger*.— 1984.— 37.— P. 17—19.
4. *Krumm N., van Driel W., van Woerden H.* Distribution and motions of atomic hydrogen in lenticular galaxies. V. A ring of H I around NGC 4262 // *Astron. and Astrophys.*— 1985.— 144, N 1.— P. 202—210.
5. *Tohline J. E., Durisen R. H.* The orientation of gas disk in tumbling prolate galaxies // *Astrophys. J.*— 1982.— 257, N 1.— P. 94—102.
6. *Tohline J. E., Simonson G. F., Caldwell N.* Using gaseous disk to probe the geometric structure of elliptical galaxies // *Ibid.*— 252, N 1.— P. 92—101.
7. *Sharples R. M., Carter D., Hawarden H.* Kinematics of elliptical-like galaxies with dust lanes // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*— 1983.— 202, N 1.— P. 37—52.

Астрон. обсерватория
Ленингр. ун-та им. А. А. Жданова,
Шемахин. астрофиз. обсерватория АН АзССР

Поступила в редакцию 09.10.87,
после доработки 05.04.88

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 523.64(085.5)

КАТАЛОГ МИНИМАЛЬНЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ОРБИТАМИ КОМЕТ И БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ. ДОПОЛНЕНИЕ № 1 / Коноплева В. П.

(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 5845-В88)

Приведены минимальные расстояния между орбитами комет и больших планет, значения истинных аномалий точек орбит кометы и планеты, соответствующих минимальному межорбитальному расстоянию этих объектов. Расчет выполнен для комплекса комет, проходивших перигелий в 1981—1986 гг. Прилагаются списки короткопериодических комет (—239 — 1986 гг.), наблюдавшихся в одном, двух и более появлениях.