

УДК 521.7

Особенности резонансного движения комет

В. В. Емельяненко

Численно-аналитическими методами изучено движение короткопериодических комет вблизи соизмеримости их периодов обращения с периодом обращения Юпитера. Показано, что при больших эксцентриситетах и наклонах орбит справедливы резонансные свойства, основанные на уравнении простого маятника. Рассмотрены особенности либрационного движения, позволяющие проводить исследование эволюции орбит комет на значительно более длительных интервалах времени, чем при типично стохастическом движении.

PECULIARITIES OF COMETARY RESONANCE MOTION, by Emel'yanenko V. V.— The motion of short-period comets in resonance with Jupiter is studied by the numerical-analytical methods. It is shown that the resonant properties based on the equation of a simple pendulum are retained at large eccentricities and inclinations of orbits. The distinctive features of libration which allow investigating the evolution of cometary motion on the time intervals much longer than for the typical stochasticity are considered.

Движение короткопериодических комет неустойчиво, так как в процессе длительной эволюции орбиты комет пересекаются с орбитами планет. Вблизи моментов пересечений возможны тесные сближения с планетами, которые приводят к большим возмущениям орбит комет. Однако на ограниченных интервалах времени, когда кометная орбита удалена от орбит планет, движение комет сохраняет свойства, хорошо изученные для автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [8, 9]. Наряду с типично стохастическими траекториями существуют и временные либрации в резонансе с Юпитером [6, 12].

В данной работе рассматриваются основные особенности резонансного движения короткопериодических комет. Пусть комета движется вблизи соизмеримости с Юпитером, т. е. $n/n_{Ю} \approx j/j'$, где j и j' — взаимно простые целые числа; n — среднее суточное движение кометы; индексом Ю обозначены соответствующие элементы орбиты Юпитера. Допустим, что орбита Юпитера представляет собой фиксированный эллипс. Обозначим $u_1 = \mu\sqrt{a}$, $u_2 = \mu\sqrt{p}$, $u_3 = \mu\sqrt{p} \cos i$, $v_1 = M$, $v_2 = \omega$, $v_3 = \Omega$ (канонические элементы Делоне), где μ — постоянная Гаусса; a — большая полуось; $p = a(1 - e^2)$, e — эксцентриситет; i — наклон к плоскости орбиты Юпитера; M — средняя аномалия; ω — аргумент перигелия; Ω — долгота восходящего узла орбиты кометы относительно орбиты Юпитера, отсчитываемая от перигелия Юпитера.

Движение кометы в этом случае описывается уравнениями

$$\frac{du_m}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial v_m}, \quad \frac{dv_m}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial u_m} \quad (m = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где гамильтониан $H_0 = -\frac{\mu^4}{2u_1^2} + R$; R — возмущающая функция.

Введем новую переменную $\varphi = j'v_1 - jM_{Ю}$, а в возмущающей функции сохраним только главные гармоники вековой и резонансной частей:

$$R = A_0 + A_2 \cos(s_2 v_2 + s'_2 v_3) + A_1 \cos(\varphi + s_1 v_2 + s'_1 v_3), \quad (2)$$

где коэффициенты A_0 , A_1 , A_2 зависят от u_1 , u_2 , u_3 . Тогда с помощью производящей функции

$$W = (\varphi + s_1 v_2 + s'_1 v_3) x_1 + (s_2 v_2 + s'_2 v_3) x_2 + v_3 x_3 \quad (3)$$

перейдем к новым каноническим переменным

$$x_1 = \frac{u_1}{j'}, \quad y_1 = \varphi + s_1 u_2 + s_1' u_3; \quad x_2 = \frac{j' u_2 - s_1 u_1}{j' s_2}, \quad y_2 = s_2 u_2 + s_2' u_3; \quad (4)$$

$$x_3 = u_3 - \frac{s_2'}{s_2} u_2 - \frac{s_1' s_2 - s_1 s_2'}{j' s_2} u_1, \quad y_3 = u_3$$

с гамильтонианом

$$H_1 = -\frac{\mu^4}{2j'^2 x_1^2} - j n_{\text{Ю}} x_1 + A_0 + A_2 \cos y_2 + A_1 \cos y_1. \quad (5)$$

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ — фиксированные значения x_1, x_2, x_3 , причем \bar{x}_1 соответствует точной соизмеримости средних суточных движений кометы и Юпитера, и

$$a_1 = A_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3); \quad a_2 = A_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3); \quad b_m = \frac{\partial A_0}{\partial x_m}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3). \quad (6)$$

Сделаем обычные предположения о величине возмущений [4, 10]

$$|a_1| = O(\varepsilon); \quad |a_2| = O(\varepsilon); \quad |b_m| = O(\sqrt{\varepsilon}); \quad |x_m - \bar{x}_m| = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (7)$$

Разложив гамильтониан H_1 в ряд Тейлора вблизи $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ с точностью до ε , получим, опуская постоянные, новый гамильтониан

$$H = -\frac{3\mu^4(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2j'^2 x_1^4} + a_2 \cos y_2 + a_1 \cos y_1 + \sum_{m=1}^3 b_m(x_m - \bar{x}_m), \quad (8)$$

для которого переменные разделяются:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 \sin y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{3\mu^4}{j'^2 x_1^4} (x_1 - \bar{x}_1) + b_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 \sin y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = b_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \frac{dy_3}{dt} = b_3. \quad (9)$$

Переменные x_1, y_1 описывают резонансные возмущения, а переменные x_2, y_2, x_3, y_3 — вековые возмущения.

Система уравнений для x_1 и y_1 приводит к уравнению простого маятника

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \nu^2 \sin y_1 = 0, \quad (10)$$

где $\nu^2 = (3\mu^4 a_1)/(j'^2 x_1^4)$ при $a_1 > 0$ (случай $a_1 < 0$ рассматривается аналогично относительно переменной $\pi + y_1$). Решение уравнения (10) в области либрации имеет вид

$$x_1 = \bar{x}_1 + \frac{a_1 b_1}{\nu^2} - \frac{2a_1 k}{\nu} \operatorname{cn}[\nu(t - \tau), k]; \quad \sin \frac{y_1}{2} = k \operatorname{sn}[\nu(t - \tau), k], \quad (11)$$

где k, τ — постоянные интегрирования.

Общие свойства резонансных систем, в основе описания которых лежит уравнение (10), хорошо изучены [7, 9]. При наличии малых периодических возмущений в окрестности сепаратрисы уравнения (10) образуется стохастический слой. При больших возмущениях существует сплошная стохастичность.

В случае произвольных эксцентриситетов и наклонов, характерных для орбит комет, аналитическая оценка допущений, по которым получается уравнение (10), очень сложна. Поэтому для изучения осо-

бенностей резонансного движения комет использованы численные методы.

Мы исследовали движения комет, у которых отмечены либрации в соизмеримости с Юпитером, по методике, сходной с применяемой для резонансных астероидов [14]. Если в уравнениях Ньютона для эллиптических элементов орбиты c_α ввести критический аргумент $D = j'M - j(M_\text{Ю} - \omega - \Omega)$ и усреднить правые части $F_\alpha(a, e, i, \omega, \Omega, M, D)$ по M на отрезке $[0, 2\pi j]$, то уравнения приобретают вид

$$\frac{d\bar{c}_\alpha}{dt} = \bar{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6), \quad (12)$$

где

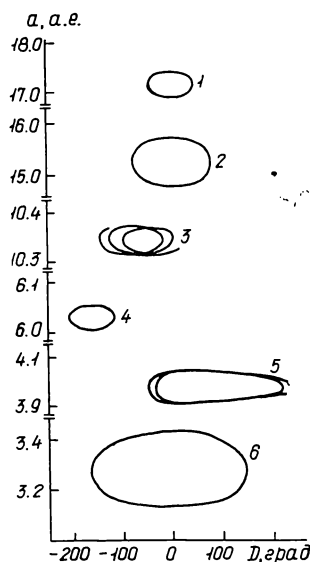
$$\bar{F}_\alpha = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi j} F_\alpha dM. \quad (13)$$

В системе уравнений (12) вместо M использовалась переменная $\sigma = D/j'$, и все угловые элементы относились к плоскости эклиптики.

При вычислении интеграла (13) отрезок $[0, 2\pi j]$ разбивался на части. Для каждой части применялся метод трапеций с оценкой точности по формуле Рунге. С помощью соотношения $dM = (1 - e \cos \lambda) d\lambda$ удобно перейти к эксцентрической аномалии λ . В этом случае уравнение Кеплера приходится решать только при вычислении координат Юпитера. Орбита Юпитера определялась средними элементами для эпохи 1950.0 [1]. Интегрирование системы уравнений (12) выполнялось численно методом Эверхарта [11].

На рисунке приведены проекции решения системы уравнений (12) на плоскость D — a в течение двух—трех либрационных периодов для комет Брорзена—Меткофа ($j/j' = 1:6$, $e = 0.97$, $i = 19^\circ$), Дубяго ($j/j' = 1:5$, $e = 0.93$, $i = 22^\circ$), Темпеля—Тутля ($j/j' = 5:14$, $e =$

Изменение большой полуоси a и критического аргумента D для комет: 1 — Брорзена — Меткофа; 2 — Дубяго; 3 — Темпеля — Тутля; 4 — Дю Туа; 5 — Петерса — Хартли; 6 — Триттона



$= 0.90$, $i = 163^\circ$), Дю Туа ($j/j' = 4:5$, $e = 0.79$, $i = 19^\circ$), Петерса—Хартли ($j/j' = 3:2$, $e = 0.60$, $i = 30^\circ$), Триттона ($j/j' = 2:1$, $e = 0.58$, $i = 7^\circ$). Для комет Брорзена—Меткофа, Дубяго, Темпеля—Тутля, Дю Туа, Триттона решения хорошо согласуются с выражениями (11). Траектории движения других резонансных комет, которые здесь не приведены, соответствуют уравнению простого маятника. Заметное влияние неучтенных в модели (8) членов возмущающей функции зафиксировано только для кометы Петерса—Хартли, хотя и в этом случае качественная картина, описываемая уравнением (10), сохраняется.

Вид траекторий (см. рисунок) сохраняется для объектов, удаленных от сепаратрисы, и на более длительных промежутках времени. Большая полуось и критический аргумент колеблются почти с постоянной амплитудой. Часто наблюдается значительное движение центра либрации (в масштабе рисунка оно заметно для комет Темпеля—Тутля и Петерса—Хартли).

Полученные результаты сравнивались с результатами численного интегрирования полных уравнений движения с учетом всех планетных

возмущений. Сравнение подтвердило отмеченные закономерности для движений, происходящих глубоко в зоне либрации, на орбитах, удаленных от сфер действия планет. При решении усредненной системы уравнений (12) не возникает никаких особенностей и вблизи момента пересечения орбиты кометы с орбитой Юпитера. В случае прямого численного интегрирования полных уравнений движения всегда наблюдалось нарушение либраций на орбитах, близких к орбите Юпитера.

Таким образом, несмотря на большие эксцентриситеты и наклоны орбит, для большинства короткопериодических комет, движущихся при умеренных возмущениях вблизи соизмеримости с Юпитером, справедливы резонансные свойства, основанные на уравнении простого маятника (10).

Эти свойства значительно отличают либрационное движение от типично стохастического. При исследовании долговременной эволюции орбит комет особенности либрационного движения важны, по крайней мере, в трех отношениях:

1. Скорость разбегания соседних траекторий при либрациях гораздо меньше, чем при типично стохастическом движении. Численные расчеты изменения орбит в зависимости от начальных данных с полным учетом возмущений от Юпитера [5, 6] хорошо согласуются на протяжении либраций с интегрируемой системой (9). Наиболее важный коэффициент растяжения вдоль орбиты в этом случае совершает почти периодические колебания с медленно изменяющейся амплитудой. Для оценки скорости разбегания соседних траекторий при либрациях полезно соотношение

$$\frac{\partial T}{\partial k} = \frac{T}{k} \left[\frac{E}{K(1-k^2)} - 1 \right], \quad (14)$$

вытекающее из выражений (11), где T — период либрации, а K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

2. При либрационном движении большая полуось изменяется в небольших пределах вблизи резонансного значения. Это позволяет проводить исследование долговременной эволюции орбит на основе учета вековых возмущений. Для стохастического движения изменения большой полуоси не ограничены, поэтому учет вековых возмущений в этом случае дает значительно менее точные оценки изменений элементов орбиты.

3. На движение комет оказывают влияние негравитационные силы. Они малы, так что из наблюдений надежно определяются только негравитационные изменения большой полуоси. Если считать, что негравитационные силы зависят лишь от расстояния r между кометой и Солнцем, то их основное влияние на резонансное движение отражается появлением в уравнении (10) негравитационного члена N :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + v^2 \sin y_1 - N = 0, \quad (15)$$

где

$$N = - \frac{v^2 a^2 \sqrt{1-e^2}}{2\pi a_1 j'} \int_0^{2\pi} \frac{Q(r)}{r} dM. \quad (16)$$

Здесь $Q(r)$ — составляющая негравитационного ускорения, лежащая в плоскости орбиты и перпендикулярная к радиусу-вектору кометы (положительная в направлении движения).

Оценим негравитационные эффекты с помощью модели Марседена [13]: $Q(r) = \delta G(r)$. В этом выражении для наблюдавшихся комет $\delta \approx 10^{-8} - 10^{-9}$, а из модели Марседена легко получить, что $G(r) < \gamma r^{-s}$,

где γ — постоянная, близкая к единице, $s=2.15$. Если принять $s=2$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{Q(r)}{r} dM < \delta\gamma \int_0^{2\pi} \frac{dM}{r^3} = \frac{2\delta\gamma\pi}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Представим зависимость N от x_1 и x_2 с точностью до линейных членов в виде

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1(x_1 - \bar{x}_1) + N_2(x_2 - \bar{x}_2); \\ N_0 &= N(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad N_1 = \frac{\partial N}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad N_2 = \frac{\partial N}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2); \\ N_0 &= O(\delta), \quad N_1 = O(\delta), \quad N_2 = O(\delta). \end{aligned} \quad (18)$$

При $v^2 > N_0$, что всегда выполняется для основных резонансов, действие постоянной величины N_0 сохраняет либрационное движение [2, 3]. Для комет, движущихся вне зоны либрации, действие негравитационных сил приводит к медленным вековым изменениям большой полуоси. Величины $N_1(x_1 - \bar{x}_1)$ и $N_2(x_2 - \bar{x}_2)$ очень малы (гораздо меньше неучтенных в модели (8) гравитационных членов). Их влияние в течение промежутка времени между последовательными пересечениями орбиты кометы с орбитами внешних планет на устойчивость резонансного движения незначительно. Это подтверждается численными расчетами движения комет с учетом всех планетных возмущений [6].

1. Абалакин В. К. Основы эфемеридной астрономии.— М.: Наука, 1979.— 448 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.— 568 с.
3. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
4. Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.— 320 с.
5. Емельяненко В. В. Об эволюции плотности метеорных роев под действием планетных возмущений // Письма в Астрон. журн.— 1984.— 10, № 4.— С. 315—318.
6. Емельяненко В. В. Движение комет в резонансе с Юпитером // Там же.— 1985.— 11, № 12.— С. 924—929.
7. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.— 272 с.
8. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук.— 1971.— 105, вып. 1.— С. 3—39.
9. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.— 528 с.
10. Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.— 628 с.
11. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // Celest. Mech.— 1974.— 10, N 1.— P. 35—55.
12. Marsden B. G. On the relationship between comets and minor planets // Astron. J.— 1970.— 75, N 2.— P. 206—217.
13. Marsden B. G. Catalogue of cometary orbits.— Cambridge: Smithsonian Astrophys. Observ., 1982.— 98 p.
14. Schubart J. Long-period effects in the motion of Hilda-type planets // Astron. J.— 1968.— 73, N 2.— P. 99—103.

Челяб. политехн. ин-т

Поступила в редакцию
08.06.87