

УДК 520.88—16/17

## О стохастической дискретизации непрерывных процессов в физическом эксперименте

Н. В. Ключек, И. П. Турова

Численными экспериментами на ЭВМ показано, что применение метода стохастической дискретизации непрерывных процессов позволяет расширить диапазон анализируемых частот за пределы граничной частоты Найквиста, определяемой средней частотой дискретизации. При выбранном распределении случайных моментов дискретизации граничная частота Найквиста определяется дискретом задания случайной величины. Метод можно использовать при постановке эксперимента для исследования колебательных явлений в процессах с неизвестной наивысшей частотой в спектре мощности. Показано, что в некоторых случаях основные положения метода стохастической дискретизации могут быть применены в процессе обработки уже имеющихся наблюдательных данных, достаточно редко распределенных во времени.

*ON STOCHASTIC QUANTIZATION OF CONTINUOUS PROCESSES IN A PHYSICAL EXPERIMENT, by Kloček N. V., Turova I. P.*—Numerical simulations on computers have shown that application of the method for stochastic quantization of continuous processes allows expanding the range of frequencies analysed beyond the boundary Nyquist frequency which is determined by the mean quantization frequency. With the chosen uniform distribution of random moments of quantization, the boundary Nyquist frequency is determined by the differential change in specifying the random quantity. The method may be useful in staging an experiment on the study of oscillatory phenomena in processes with the unknown maximum frequency in the power spectrum. It is shown that in certain cases the essence of the method for stochastic quantization is applicable for processing the available observational data which are sufficiently sparsely distributed in time.

Одна из задач обработки результатов наблюдений, получаемых в ходе физического эксперимента,— оценка распределения спектральной мощности в исследуемом процессе, например для выявления периодических составляющих. Для этих оценок процесс должен быть дискретизирован во времени с шагом  $h$ , выбираемом в соответствии с теоремой Котельникова (см., например, [2]):  $h=1/(2f_c)$ , где  $f_c$  — частота Найквиста.

При несоблюдении данного условия (при уменьшении частоты дискретизации) возникает явление «наложения» или «маскировки» частот [1]. Оно заключается в том, что составляющие с частотами выше  $f_c$  будут свернуты в диапазон низких частот  $0-f_c$ , будут неотличимы от составляющих с этими низкими частотами. Очевидно, что перед дискретизацией процесса с шагом  $h$  нужно отфильтровать частоты, превышающие  $f_c$ . Фильтрация легко выполняется при фотоэлектрических методах регистрации процессов с помощью электронных фильтров и не всегда возможна в фотографических методах, так как в этом случае должен отсутствовать промежуток во времени между двумя последовательными экспозициями. Более того, наивысшая частота в спектре исследуемого процесса, как правило, неизвестна. Поэтому часто шаг дискретизации, определяемый интервалом времени между экспозициями, выбирают исходя из технических возможностей, а время экспозиции — минимально возможным на основании интуитивных предположений об ограниченности частотного спектра исследуемого процесса (иногда просто не задумываясь об этом). Все отмеченное снижает достоверность получаемых спектров мощности и дальнейшей интерпретации.

К процессам с неизвестной заранее шириной спектра мощности относятся явления, наблюдаемые в оптическом диапазоне при исследованиях Солнца. В силу всего изложенного при использовании фотографических методов при малом времени экспозиции требуется соответственно высокая частота регистрации, что не всегда возможно. Однако можно преодолеть эту, на первый взгляд непреодолимую, трудность с помощью метода стохастической дискретизации [3, 4, 6, 7]. Суть метода заключается в том, что моменты дискретизации  $t_k$  на оси времени распределены случайно:  $t_k = t_{k-1} + \mu_k$ , где  $\mu_k$  — взаимонезависимые равномерно распределенные случайные величины со средним значением  $\mu$ . Поток моментов дискретизации  $\{t_k\}$  на оси времени

тогда образует так называемый поток с накоплением дисперсии и дискретным временем. Обозначим через  $\tau$  «квант» времени. При этом момент дискретизации может принимать значения только из ряда  $l\tau$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$ , а математическое ожидание  $M\{\mu_k\} = \mu = d\tau$ , где  $d$  — показатель дискретности случайных величин  $\{\mu_k\}$ .

Как показано в [6], стохастическая дискретизация потоком с накоплением дисперсии, средним шагом дискретизации  $\mu$  и дискретным временем с показателем дискретности  $d$  в предельном смысле эквивалентна детерминированной дискретизации с частотой  $d/\mu$ . Полоса обрабатываемых частот расширяется в  $d$  раз. Это значит, что при

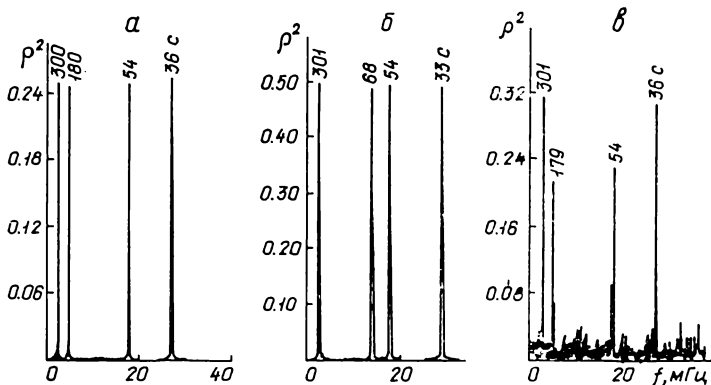


Рис. 1. Спектры мощности модельного процесса с периодами 36, 54, 180, 300 с при равномерной дискретизации с шагом  $h=5$  с (а);  $h=30$  с (б); при стохастической дискретизации с  $\mu=30$  с (в)

средней частоте дискретизации  $1/\mu$  можно обрабатывать сигнал с полосой частот  $f_c = d/(2\mu)$ , или частота Найквиста определяется величиной  $\tau$  по формуле  $f_c = 1/(2\tau)$ . Применительно к фотографии в качестве  $\tau$  выступает время экспозиции. При достаточно представимой статистике отсчетов уменьшение времени экспозиции ведет к расширению полосы обрабатываемых частот.

Для исследования возможностей метода стохастической дискретизации нами проведены численные эксперименты с помощью ЭВМ на модельных процессах, содержащих ряд гармонических составляющих. Как аппарат спектрального анализа использовался метод коррелоопериодограмманализа (КПГА) [5]. Алгоритм КПГА позволяет получать коррелоопериодограммы, адекватные спектрам мощности, для равномерно и неравномерно отстоящих во времени отсчетов. Исследовались модельные процессы вида

$$y_h(t) = \sum A_i \sin(2\pi t_h/T_i).$$

Для первой модели выбраны единичные значения амплитуд  $A_i$  ( $i=1,4$ ); периоды  $T_i$  равны 36, 54, 180 и 300 с; продолжительность реализации (для всех моделей) примерно 4000 с.

На рис. 1, а показан спектр мощности, рассчитанный по алгоритму КПГА при равномерной дискретизации с шагом  $h=5$  с, удовлетворяющим условию теоремы Котельникова. Положение пиков в спектре мощности соответствует заложенному в модели. На рис. 1, б представлен спектр мощности для той же модели, но с шагом 30 с, уже не отвечающим указанному условию. В спектре мощности появился ложный пик, соответствующий периоду 68 с, и подавлен реальный пик, соответствующий периоду 180 с. На рис. 1, в показан спектр мощности для данной модели, полученный при стохастической дискретизации. Аргумент рассчитывался по формуле  $t_h = t_{h-1} + \mu_k$ ; поток  $\{\mu_k\}$  задавался программой — генератором случайных чисел, равномерно распределенных на интервале  $S=5-55$  при среднем значении  $\mu=30$  с. Из рис. 1, в видно, что положение пиков соответствует заданным. Необходимо отметить наличие шумовой составляющей в полученном спектре, что естественно при небольшом объеме выборки.

Рассмотренный пример иллюстрирует применимость метода стохастической дискретизации в самых общих чертах. Рис. 2, а, б показывает возможность обнаружения периодических составляющих, с периодами намного меньшими, чем средний интервал

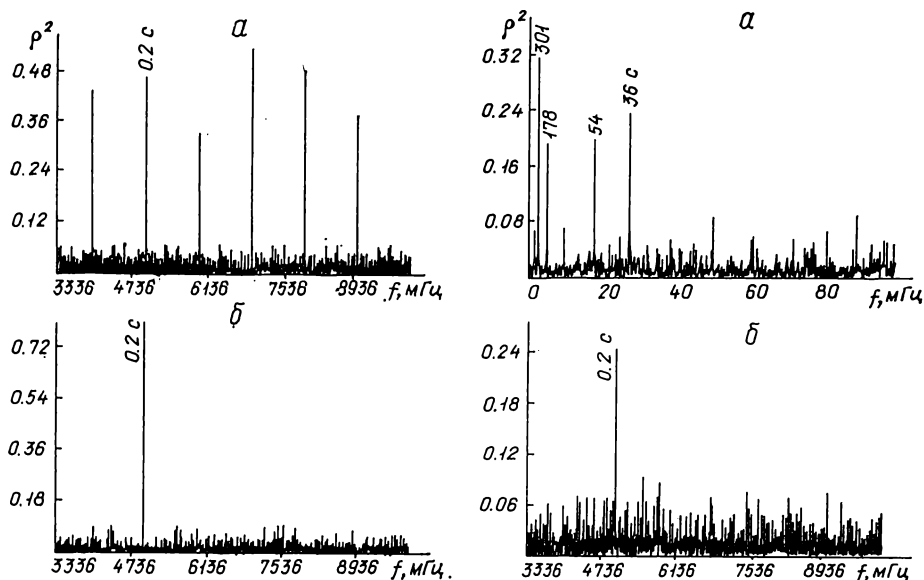


Рис. 2. Спектры мощности модельного процесса с периодом 0.2 с при стохастической дискретизации с  $\mu=30$  с,  $S=1-59$  с,  $\tau=1$  с (а);  $\tau=0.1$  с (б)

Рис. 3. Спектры мощности модельного процесса с периодами 0.2, 36, 54, 180, 300 с при стохастической дискретизации с  $\mu=30$  с,  $\tau < 0.1$  с,  $S=1-59$  с: низкочастотная область (а); высокочастотная область (б)

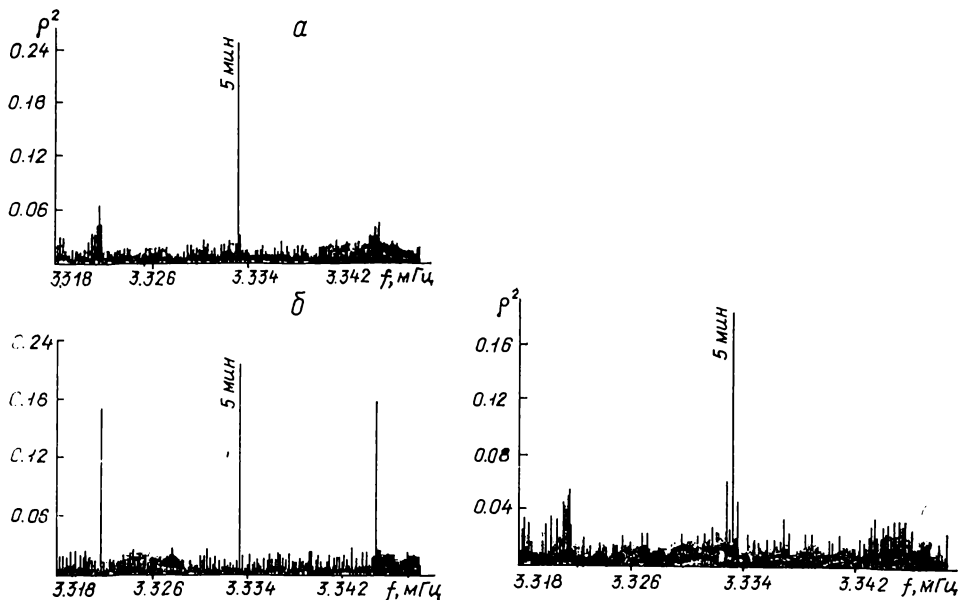


Рис. 4. Спектры мощности в области 3.3 мГц модельного процесса с периодами 3, 5, 60 и 160 мин при стохастической дискретизации с  $\mu=1440$  мин,  $\tau=1$  мин,  $S=1260-1620$  мин для равномерного распределения  $\{\mu_k\}$  (а); для нормального распределения  $\{\mu_k\}$  (б)

Рис. 5. Спектр мощности в области 3.3 мГц модельного процесса с периодами 3, 5, 60 и 160 мин, амплитудно-модулированного с периодом 27 сут при стохастической дискретизации с  $\mu=1440$  мин,  $S=1260-1620$  мин,  $\tau=1$  мин

времени  $\mu$ . В модель заложен один период 0.2 с, интервал  $S=1-59$  с. При выбранном  $\mu$  уменьшение величины  $\tau$  приводит к увеличению показателя дискретности  $d$ , т. е. расширяет полосу анализируемых частот. На рис. 2, *а* дан спектр мощности для случая  $\tau=1$ , а на рис. 2, *б* — для  $\tau=0.1$ . Из сравнения рисунков видно, что даже при стохастической дискретизации возможна маскировка частот (рис. 2, *а*), если  $f_c = d/(2\mu) < f_m$ , где  $f_m$  — верхняя граничная частота исследуемого процесса.

На рис. 3, *а*, *б* представлены спектры мощности процесса с периодами 0.2, 36, 54, 180, 300 с, единичными амплитудами  $A_i$ ,  $\mu=30$  с,  $\tau < 0.1$  с. Очевидно, что наличие в процессе высокочастотной (0.2 с) составляющей, например связанной с атмосферными условиями наблюдений или иными причинами, при правильном выборе  $\tau$  и  $\mu$  не дает маскированных частот во всей частотной области (рис. 1, *в*).

Представляют интерес результаты спектрального анализа по данной

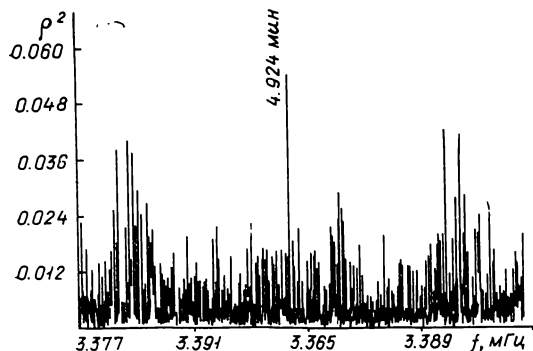


Рис. 6. Спектр мощности в области 3.3 МГц флуктуаций кальциевого индекса

методике в зависимости от вида распределения  $\mu_k$ . На рис. 4, *а*, *б* представлены спектры мощности в области 3.3 МГц (около 5 мин) для модели, содержащей периоды 3, 5, 60 и 160 мин для равномерного и нормального распределения  $\mu_k$  соответственно. В моделях  $\mu=1440$  мин (1 сут),  $\tau=1$  мин. На рис. 4, *а* интервал  $S=1260-1620$  мин. На рис. 4, *б* дисперсия  $\sigma$  выбрана соответствующей интервалу  $S$  модели на рис. 4, *а*. Видно, что ограниченность дисперсии  $\sigma$  и ограниченность интервала  $S$  вызывают появление спектральных пиков-спутников в спектрах мощности, причем для нормального распределения (рис. 4, *б*) амплитуда спутников значительна. Следовательно, в экспериментах предпочтительно использовать равномерное распределение  $\mu_k$ .

Рассматриваемая далее модель является следующим приближением к реальным наблюдениям Солнца — она учитывает 27-дневную модуляцию процесса, вызванную вращением Солнца. Исследовался амплитудно-модулированный процесс [2] вида

$$y_i = [A_j + A_M \sin(2\pi t_i/T_M)] \sin(2\pi t_i/T_j)$$

с единичными амплитудами  $A_j=1$ ,  $A_M=1$ , периодами  $T_j$ , равными 3, 5, 60 и 160 мин,  $T_M=38\ 880$  мин (27 сут),  $\mu=1440$  мин,  $S=1260-1620$  мин. Число моментов наблюдений — 366 (примерно 1 год). На рис. 5, показывающем спектр мощности этого процесса в области 3.3 МГц, видны тонкая структура, обусловленная расщеплением вследствие вращения Солнца, а также спутники, обусловленные ограниченностью интервала  $S$  моментов наблюдений.

Исследование этой модели дало основание для попытки обнаружения относительно короткопериодических колебаний величины кальциевого индекса, вычисленного по данным ежедневных наблюдений Солнца. Значения кальциевого индекса и моменты наблюдений приведены в «Solar-Geophysical Data». Для анализа использованы значения индекса за период с июля 1981 по август 1982 г. включительно. На рис. 6 приведен спектр мощности флуктуаций кальциевого индекса в области 3.3 МГц, который показывает наличие значимого (с вероятностью более 0.99) спектрального пика, соответствующего периоду 4.924 мин. В спектре, кроме того, имеется ряд пиков, обусловленных теми же причинами, что и в случае двух модельных спектров (рис. 4, *а*, *б*, 5). При проведении спектрального анализа, в частности в области 2.2 МГц (примерно 7 мин) и 1.2 МГц (примерно 13 мин), обнаружены значимые спектральные пики, которые могут иметь солнечное происхождение. Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в [8]. Очевидно, что при определенных условиях основные положения метода стохастической дискретизации могут быть применимы для обработки уже имеющихся наблюдательных данных.

На основании модельных исследований можно рекомендовать метод стохастической дискретизации при постановке экспериментов для обнаружения периодических составляющих в физических процессах на Солнце. В частности, при фотографической регистрации процессов данный метод позволяет при относительно малой частоте съемки существенно расширить область анализируемых частот вследствие того, что в пределе верхняя граница этой области определяется временем экспозиции. Оценка количественных критериев применимости метода (таких, как объем выборки, средний шаг дискретизации, минимальный интервал распределения моментов дискретизации) представляет самостоятельный интерес и требует дополнительных исследований.

Авторы выражают благодарность Г. В. Куклину за полезное обсуждение работы.

1. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов.— М.: Мир, 1971.— 408 с.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Сов. радио, 1963.—695 с.
3. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Выборочные оценки спектральных характеристик случайных процессов.— М.: Энергия, 1978.—149 с.
4. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления.— М.: Сов. радио, 1967.—298 с.
5. Копецкий М., Куклин Г. В. К вопросу об 11-летней вариации средней продолжительности жизни групп солнечных пятен // Исслед. по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца.— 1971.— Вып. 2.— С. 167—179.
6. Медникий И. Б. Применение БПФ для обработки стохастически дискретизированных сигналов // Методы и средства преобраз. информ.— 1984.— Вып. 1.— С. 54—60.
7. Микелсон А. К. Оценка параметров широкополосных сигналов при относительно низкой средней частоте дискретизации // Автоматика и вычисл. техника.— 1981.— № 1.— С. 90—94.
8. Damé L., Gouttebroze P., Malherbe J.-M. Observation and analysis of intensity oscillations in the solar K-line // Astron. and Astrophys.— 1984.—130, N 2.— P. 331—340.

Сиб. ин-т зем. магнетизма, ионосферы  
и распространения  
радиоволн Сиб. отд-ния АН СССР, Иркутск

Поступила в редакцию  
31.03.87

## РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 524.354—423

### НЕТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ КОЛЛАПСЕ ЗВЕЗД. I. СПЕКТР ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТОСФЕРЕ / Кривдик В. Г.

(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 24-В88)

Рассмотрены физические параметры магнитосферы звезды на стадии гравитационного сжатия. Предполагается, что звезда сжимается под действием собственного гравитационного поля со скоростью свободного падения и имеет начальное дипольное магнитное поле, которое затем изменяется в ходе коллапса. Показано, что вещество в магнитосфере коллапсирующей звезды можно рассматривать как замагниченную и бесстолкновительную плазму (если коллапс проходит с сохранением магнитного потока). Для такого вещества решено уравнение переноса частиц и получен их спектр для двух начальных видов распределения — степенного и релятивистского максвелловского. Эти распределения наиболее характерны для дискретных источников космического нетеплового излучения. Приведены в явном виде выражения для спектра заряженных частиц в магнитосфере коллапсирующей звезды. Проанализирован закон изменения спектра со временем.