

УДК 520.82

О получении дифракционных изображений астрономических объектов

В. Н. Дудин, Е. А. Плужник

Показано, что одномерное изображение однозначно восстанавливается по модулю своего пространственного спектра, измеренного на осях ω и $\omega + i\alpha_0$ комплексной плоскости $(\omega, i\alpha)$. В этом случае процедуру восстановления изображения можно свести к эффективному итерационному алгоритму. Приведены результаты модельного эксперимента по восстановлению одномерного изображения. Предлагаемый метод допускает естественное обобщение на двумерный случай.

ON OBTAINING OF DIFFRACTIONAL IMAGES OF ASTRONOMICAL OBJECTS, by Dudinov V. N., Pluzhnik E. A.—It is shown that one-dimensional image is simply reconstructed from the modulus of its spatial spectrum measured on ω and $\omega + i\alpha_0$ axes of the complex plane $(\omega, i\alpha)$. In this case the image reconstruction procedure can be driven to the effective iterative algorithm. The results of the model image reconstruction are given. The method can be naturally generalized for two-dimensional case.

Разрешение наземных оптических телескопов ограничено флуктуациями показателя преломления земной атмосферы; оно составляет $1-2''$. Эти ограничения в принципе можно преодолеть с помощью различных интерферометрических методов, из которых наиболее распространен метод спекл-интерферометрии [8]. Основная идея метода заключается в оценке квадрата спектра пространственных частот изображения путем усреднения квадратов спектров серии изображений астрономического объекта с короткими экспозициями ($\tau \approx 0.01^s$) в узком интервале длин волн ($\Delta\lambda \approx 10$ нм)

$$\langle |\tilde{F}_i(\omega)|^2 \rangle = |\tilde{f}(\omega)|^2 \langle |g_i(\omega)|^2 \rangle, \quad (1)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по мгновенным реализациям; $\tilde{F}_i(\omega)$ — пространственный спектр мгновенного изображения; $\tilde{f}(\omega)$ — пространственный спектр искомого изображения; $g_i(\omega)$ — мгновенное значение пространственного спектра изображения точки.

При известном среднем значении $\langle |g_i(\omega)|^2 \rangle$ этой информации достаточно для измерения диаметров звезд или расстояний между компонентами тесных звездных систем. Однако восстановить изображение протяженного астрономического объекта по функции $|\tilde{f}(\omega)|^2$ невозможно (за исключением редких случаев, когда в области изопланатичности объекта имеется точечный источник).

Для восстановления изображения необходимо знать не только модуль его пространственного спектра $|\tilde{f}(\omega)|$, но и фазу $\varphi(\omega)$:

$$\tilde{f}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)| \exp(i\varphi(\omega)). \quad (2)$$

Операция усреднения фазы

$$\langle \Phi_i(\omega) \rangle = \varphi(\omega) + \langle \varphi_i^g(\omega) \rangle \quad (3)$$

(здесь $\varphi(\omega)$ — фаза неискаженного изображения; $\varphi_i^g(\omega)$ — фаза мгновенной передаточной функции системы телескоп + земная атмосфера) не

приводит к решению задачи. Плохая сходимость (3) обусловлена тем, что основной вклад в искажение фазы вносит случайный наклон волнового фронта, приводящий к смещению всего изображения на величину, значительно превышающую дифракционный элемент разрешения. При этом флуктуация фазы оказывается значительно больше 2π .

Задача восстановления функции $\tilde{f}(\omega)$ по ее модулю $|\tilde{f}(\omega)|$ [1—7] известна как фазовая проблема в оптике. Эта задача принадлежит к классу типично некорректных задач, поскольку допускает бесконечное множество решений. Ее нельзя решить без привлечения дополнительных данных о функции $f(\mathbf{r})$. В качестве дополнительной информации обычно используется предположение о конечных размерах изображения. Кроме того, часто накладывается дополнительное условие положительности изображения. Рассмотрим одномерный случай.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(0, a)$ и $f(x) \in L^2(0, a)$.

Тогда, согласно теореме Винера — Пэли, ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\omega)$ может быть продолжено на комплексную плоскость $(\omega, i\alpha)$ как целая функция, представление Адамара которой имеет вид [5]:

$$\tilde{f}(z) = C \exp(ikz) z^m PV \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 - z/z_n), \quad (4)$$

где $z = \omega + i\alpha$; главное значение (PV) бесконечного произведения определяется как

$$PV \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 - z/z_n) = \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|z_n| \leq r} (1 - z/z_n). \quad (5)$$

Здесь $\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — множество нулей функции $\tilde{f}(z)$, из которого исключена точка $z = 0$; m — кратность нуля в точке $z = 0$; C — постоянная, k — вещественная постоянная. Очевидно, что C представляет собой нормировочную постоянную, а $\exp(ikz)$ соответствует сдвигу функции $f(x)$ вдоль оси x . Поэтому в дальнейшем будем считать $C = 1$, а $k = 0$.

Так как все изображения описываются функциями конечной энергии, заданными на ограниченных интервалах, то их спектры допускают представление вида (4) и однозначно определяются множеством своих нулей $\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, среди которых могут быть комплексные. Тогда

$$|\tilde{f}(\omega)|^2 = \omega^{2m} PV \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \omega/z_n)(1 - \omega/z_n^*), \quad (6)$$

где z_n^* — комплексное сопряжение z_n . Очевидно, что такой же модуль на оси ω имеет функция $\tilde{f}_1(z)$, отвечающая некоторому изображению $f_1(x)$, множество нулей которой может отличаться от множества нулей функции $\tilde{f}(z)$ заменой произвольного подмножества нулей $\{z_n\}$ на $\{z_n^*\}$. При этом функция $f_1(x)$ отлична от нуля на том же интервале, что и функция $f(x)$. Это означает, что задача восстановления изображения $f(x)$ по функции $|\tilde{f}(\omega)|$ имеет 2^M решений, где M — число комплексных нулей $\{z_n\}$ [1, 4]. Из теоремы единственности аналитического продолжения следует, что других неоднозначностей при решении фазовой проблемы не возникает. Данная же неоднозначность, однако, не может быть устранена без привлечения дополнительной информации об искомом изображении; например, условия $f(x) = f(-x)$ для симметричных изображений.

Из (4) следует, что функция $f(x)$ однозначно определяется по функции $|\tilde{f}(z)|$, известной на всей комплексной плоскости $(\omega, i\alpha)$. В этом случае функцию $\ln \tilde{f}(z) = \ln |\tilde{f}(z)| + i\varphi(z)$ можно рассматривать

как аналитическую функцию, вещественная и мнимая части которой связаны между собой условиями Коши — Римана. Такое решение фазовой проблемы предложено в работе [7]. При этом предполагается, что существуют способы оценки функции $|\tilde{f}(z)|$ на всей комплексной плоскости.

Можно считать, что распределение интенсивности в мгновенном изображении точки убывает при $x \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\exp(-a|x|)$ (a — про-

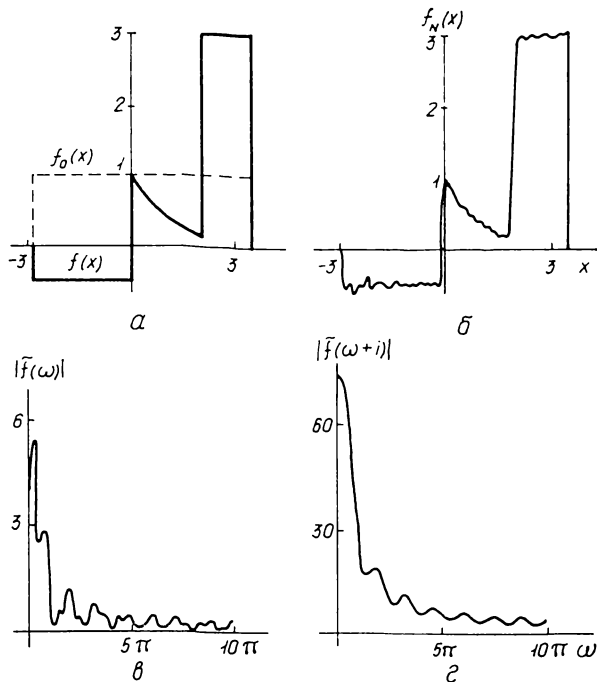


Рис. 1. Множество нулей искомого изображения (1), а также дополнительных решений, возникающих при восстановлении изображения по функции $|\tilde{f}(\omega)|$ (2) или по функции $|\tilde{f}(\omega+i\alpha_0)|$ (3)

Рис. 2. Результаты модельного эксперимента: а — исходное изображение $f(x)$ и нулевое приближение $f_0(x)$; б — функция $f_N(x)$ — результат восстановления изображения $f(x)$ после семи итераций; в, г — модули пространственного спектра $|\tilde{f}(\omega)|$ и $|\tilde{f}(\omega+i)|$

извольная положительная постоянная). Умножая каждое мгновенное изображение $F_i(x)$ на $\exp(\alpha x)$, согласно теореме о свертке для всей комплексной плоскости $z = \omega + i\alpha$, получим

$$\tilde{F}_i(\omega + i\alpha) = \tilde{f}(\omega + i\alpha) g_i(\omega + i\alpha). \tag{7}$$

Рассмотрим операцию усреднения квадратов спектров

$$\langle |\tilde{F}_i(\omega + i\alpha)|^2 \rangle = \langle |\tilde{f}(\omega + i\alpha)|^2 \rangle \langle |g_i(\omega + i\alpha)|^2 \rangle. \tag{8}$$

Главное отличие такого усреднения от обычной спекл-интерферометрии заключается в том, что нормировка функции $|\tilde{F}_i(\omega + i\alpha)|$ зависит от положения i -го мгновенного изображения $F_i(x)$ на оси x . В результате каждое мгновенное изображение войдет в выражение (8) со своим весом. Усреднение всегда может быть проведено так, что веса мгновенных изображений будут близки. В этом случае можно ожидать сходимости выражения (8) к величине $C(\alpha) \langle |\tilde{f}(\omega + i\alpha)|^2 \rangle \langle |g_i(\omega + i\alpha)|^2 \rangle$, где $C(\alpha)$ — некоторая положительная функция, и оценить функцию $C(\alpha) \langle |\tilde{f}(\omega + i\alpha)|^2 \rangle$ для любого значения α . Видно, что задание двух функ-

ций $|\tilde{f}(\omega)|^2$ и $C(\alpha_0)|\tilde{f}(\omega + i\alpha_0)|^2$, где α_0 — известная постоянная, однозначно определяет искомое изображение $f(x)$ с точностью до нормировки и сдвига. Действительно, при восстановлении функции $f(x)$ по $|\tilde{f}(\omega)|$ возникает неоднозначность, связанная с возможностью замены нескольких нулей z_n на z_n^* (рис. 1), т. е. на симметричные относительно оси ω .

При восстановлении $f(x)$ по $|\tilde{f}(\omega + i\alpha_0)|$ возникает аналогичная неоднозначность, но связанная уже с возможностью замены нулей z_n точками, сопряженными относительно оси $\omega + i\alpha_0$, т. е. симметричными относительно этой оси. Очевидно, что пересечение множеств возможных решений в этих двух случаях дает единственное решение, совпадающее с функцией $f(x)$ с точностью до нормировки и сдвига по оси x . Более того, из теоремы единственности аналитического продолжения следует, что для восстановления функции $f(x)$ достаточно знать $|\tilde{f}(x)|$ на множествах $M_1 \subset \omega$ и $M_2 \subset \omega + i\alpha_0$, имеющих предельные точки.

Таким образом, при наличии оценки функций $|\tilde{f}(\omega)|$ и $|\tilde{f}(\omega + i\alpha_0)|$ процедура восстановления функции $f(x)$ может быть сведена к следующему итерационному алгоритму, в основе которого лежат обычные итерационные алгоритмы восстановления [2, 6].

1. Вычисление преобразования Фурье от $(N-1)$ -го приближения $\tilde{f}_{N-1}(\omega) = |\tilde{f}_{N-1}(\omega)| \exp(i\varphi_{N-1}(\omega))$;

2. Вычисление $\tilde{f}_{N-1}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)| \exp(i\varphi_{N-1}(\omega))$;

3. Вычисление $f'_{N-1}(x)$;

За. Для ускорения сходимости итераций можно наложить условие положительности на $f(x)$. Коррекцию $f'_{N-1}(x)$ можно проводить двумя способами: $f'_{N-1}(x)$ заменить на $|f'_{N-1}(x)|$; отрицательные значения $f'_{N-1}(x)$ заменить нулем;

4. Вычисление $f''_{N-1}(x) = f'_{N-1}(x) \Pi(x) \exp(\alpha_0 x)$, где $\Pi(x)$ — функция окна, ограничивающая интервал задания функции $f(x)$;

5. Вычисление $f''_{N-1}(\omega + i\alpha_0)$;

6. Вычисление $f''_{N-1}(\omega + i\alpha_0) = |\tilde{f}(\omega + i\alpha_0)| \exp(i\varphi''_{N-1}(\omega + i\alpha_0))$;

7. Вычисление $f''_{N-1}(x)$;

7а. Если необходимо, то За;

8. Вычисление N -го приближения: $f_N(x) = f''_{N-1}(x) \Pi(x) \exp(-\alpha_0 x)$;

9. Определение точности восстановления и, если необходимо, возвращение к пункту 1.

Способ выхода в комплексную плоскость в приведенном алгоритме заключается в применении экспоненциальной маски $\exp(\alpha_0 x)$.

Для примера на рис. 2 представлены результаты модельного эксперимента по восстановлению одномерной функции при заданном значении модуля ее спектра на осях ω и $\omega + i$.

Заметим, что в [3] предложен метод восстановления изображения по модулю спектра функции $f(x)$ на оси $\omega + i\alpha_0$ при достаточно больших α_0 , обеспечивающих отсутствие нулей в верхней полуплоскости. В этом случае связь между функцией $\ln|f(\omega + i\alpha_0)|$ и фазой $\varphi(\omega + i\alpha_0)$ однозначно определяется преобразованием Гильберта. Однако в отличие от предлагаемого метода рассмотренный в [3] метод не может быть распространен на двумерный случай.

1. Брук Ю. М., Седин Л. Г. Восстановление изображений, рассеянных в неоднородной среде. — Харьков, 1981. — 48 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; № 170).

2. Корниченко Ю. В. О возможности восстановления слабого объекта, искаженного влиянием земной атмосферы // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 10. — С. 928—932.

3. *Петров В. А.* О восстановлении функции по модулю преобразования Фурье // Вестн. Харьков. ун-та: Методы обработки астроном. и космич. изображений.— 1981.— Вып. 16, № 223.— С. 25—33.
4. *Построение изображений в астрономии по функциям когерентности* / Под ред. Ван Схонвелда.— М.: Мир, 1982.—318 с.
5. *Рекиша А. А. Г.* Нули целых функций: теория и инженерные приложения // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике.— 1980.—68, № 3.— С. 5—29.
6. *Fienup J. R.* Reconstruction of the object from the modulus of its Fourier transform // Opt. Lett.— 1978.—3, N 1.— P. 27—29.
7. *Köhler D., Mandel L.* Source reconstruction from modulus of the correlation functions: a practical approach to the phase problem of optical coherence theory // J. Opt. Soc. Amer.— 1973.—63.— P. 126—134.
8. *Labeyrie A.* Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images // Astron. and Astrophys.— 1970.—6, N 1.— P. 85—87.

Астрон. обсерватория
Харьков. ун-та им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 09.01.87,
после доработки 23.03.87

Новые книги

Кислюк В. С. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛУНЫ

Киев: Наук. думка, 1988.— 15 л.— 2 р. 30 к.

Монография посвящена анализу селенодезических данных, их обобщению и приведению в единую систему. Впервые изучены деформации селенодезических опорных систем. На основе взаимных попарных сравнений каталогов положений лунных образований, исследованных в СССР и за рубежом, создана сводная система селенодезических координат 4900 точек на Луне. Дано описание обобщенной системы абсолютных высот точек лунной поверхности, с помощью которой изучена геометрическая фигура Луны и ее особенности. При анализе всех имеющихся моделей гравитационного поля Луны получена обобщенная система ее динамических параметров. Рассмотрены вопросы уточнения некоторых селенодезических параметров по наземным астрометрическим наблюдениям. Для астрономов, геодезистов, геофизиков, а также специалистов в области космических исследований.