Кинематика и физика небесных тел, 1988, т. 4, № 2

УДК 521.9

Параметрическое уравнивание абсолютных астрометрических наблюдений с учетом точности исходного каталога

В. С. Губанов

Результаты абсолютных астрометрических наблюдений, выполненных по групповой программе, предлагается уравнивать совместно параметрическим способом наименьших квадратов, позволяющим использовать априорную информацию о характере систематических ошибок наблюдений и точности исходного каталога.

PARAMETRIC ADJUSTMENT OF THE ABSOLUTE ASTROMETRIC OBSERVATIONS USING AN A PRIORI INFORMATION ON THE ACCURACY OF THE INITIAL CATALOGUE, by Gubanov V. S.— Results of the absolute positional observations made by the group program are suggested to be adjusted jointly by the parametric least-square method, which permits using a priori data about the model of the systematic observational errors and the accuracy of the initial catalogue.

Рассмотрим возможность применения в фундаментальной астрометрии известного в геодезии способа параметрического уравнивания результатов наблюдений методом наименьших квадратов, который позволяет использовать в процедуре уравнивания имеющуюся априорную информацию о точности уточняемых параметров [4].

Представим результаты абсолютных астрометрических наблюдений небесных объектов (звезд или космических радиоисточников), содержащихся в каком-либо исходном (улучшаемом) каталоге, в виде математической модели

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{l} = \{l_i\}^{\mathrm{T}}$ — вектор остаточных уклонений наблюдаемых величин ($i = 1, 2, \ldots, N$), предварительно исправленных за все виды известных редукций и ошибок, от их теоретически предвычисленных значений; $\mathbf{x} = \{x_j\}^{\mathrm{T}}$ — вектор неучтенных параметров системы инструмента ($j = 1, 2, \ldots, m$); $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — матрица влияния этой системы на наблюдения; $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_i\}^{\mathrm{T}}$ — вектор влияния ошибок координат объектов на теоретически предвычисленные значения наблюдаемых величин; $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}^{\mathrm{T}}$ — вектор случайных ошибок наблюдений.

Под неучтенной системой инструмента понимаем некоторую функцию $\mathbf{f}$, описывающую суммарное влияние на результаты наблюдений различных систематических ошибок, которые не поддаются прямым лабораторным измерениям и поэтому не могут быть учтены при редукционных вычислениях. К ним относятся неконтролируемые или измеряемые с недостаточной точностью параметры ориентировки инструмента, изменения этих параметров во времени, деформации инструмента типа гнутия, аномальная рефракция и др. Обычно на основании теории инструмента, наблюдательного опыта и сопутствующих физических данных можно построить приближенную математическую модель системы инструмента, зависящую от небольшого числа неизвестных параметров. В (1) использована простейшая линейная модель $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с m параметрами $\{x_j\}$.

Астрометрические наблюдения ведутся обычно сериями продолжительностью менее 1 сут, и каждой серии с номером r может соответствовать своя инструментальная система $\mathbf{f}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r$. Поскольку за полный цикл наблюдений (обычно несколько лет) накапливается порядка тысячи отдельных серий, то совместная система уравнений (1) может содержать тысячи неизвестных параметров x_j. В связи с этим представляется целесообразным на предварительном этапе уравнивания сократить систему (1), так как одни и те же группы объектов наблюдаются обычно несколько раз. Особенно просто это делается для групповых программ наблюдений [1]. В этом случае список наблюдаемых объектов (программа) разбивается обычно на 12 двухчасовых групп, и наблюдения ведутся сериями, содержащими, как правило, две соседние группы. Наблюдаемые пары групп последовательно сдвигаются на одну группу, совершая в течение года полный цикл. Поэтому всего имеется 12 различных пар групп с номерами $s=1, 2, \dots, 12$.

Пусть пара групп с номером s наблюдалась M_s раз. Возьмем результаты первой и второй серий наблюдений этой пары групп, т. е. векторы $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, и образуем по всем общим объектам вектор разности $\Delta\mathbf{l}_{1,2}=\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2$, который, согласно модели (1), можно представить в виде

$$\Delta\mathbf{l}_{1,2} = \mathbf{A}_s\Delta\mathbf{x}_{1,2} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}, \tag{2}$$

где $\Delta\mathbf{x}_{1,2}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$ — вектор разности параметров инструментальных систем рассматриваемых серий; $\mathbf{A}_s$ — матрица влияния инструментальных систем, общая для всех серий данной пары групп, так как ее элементы зависят лишь от приближенных координат наблюдаемых объектов и звездного времени; $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}$ — вектор разностей случайных ошибок наблюдений.

Если принятая модель инструментальной системы $\mathbf{f}_s=\mathbf{A}_s\mathbf{x}_s$ для рассматриваемой пары групп s достаточно полная, то $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}$, входящие в (6), будут некоррелированы. Если принять во внимание, что непосредственные измерения в астрометрии, как правило, равноточны, то в качестве весовой матрицы уравнений (1) и (2) можно принять единичную матрицу $\mathbf{P}_\Delta=\mathbf{E}$, и систему (2) уравнивать обычным параметрическим способом при условии $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}_{1,2}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}=\min$. В результате получим вектор $\Delta\mathbf{x}_{1,2}$. Образуя далее разности вектора $\mathbf{l}_1$ со всеми остальными векторами $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \dots$ $\dots, \mathbf{l}_{M_s}$, относящимися к наблюдениям той же пары групп, и уравнивая эти разности аналогично, находим векторы $\Delta\mathbf{x}_{1,3}, \dots, \Delta\mathbf{x}_{1,M_s}$. Добавляя к ним очевидное равенство $\Delta\mathbf{x}_{1,1}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1=0$ и усредняя элементы всех этих векторов, находим новый вектор

$$\Delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_s = \frac{1}{M_s}\sum_{r=1}^{M_s}\Delta\mathbf{x}_{1,r},$$

где $\mathbf{x}_s$ — вектор параметров инструментальной системы, усредненной по всем сериям наблюдений s-й пары групп

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{M_s}\sum_{r=1}^{M_s}\mathbf{x}_r.$$

Аналогично, принимая в качестве опорного вектора последовательно векторы $\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \dots, \mathbf{l}_{M_s}$, находим редукции остальных серий $\Delta\mathbf{x}_2, \Delta\mathbf{x}_3, \dots$ $\dots, \Delta\mathbf{x}_{M_s}$ на ту же среднюю инструментальную систему $\mathbf{x}_s$. Учитывая эти редукции в уравнениях вида (1) для всех M_s серий и усредняя исправленные свободные члены для каждого объекта по всем сериям, получаем для всех q_s объектов данной пары групп с номером s новую, сокращенную в M_s раз систему уравнений вида

$$\mathbf{l}_s = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s + \mathbf{p}_s + \boldsymbol{\varepsilon}_s, \tag{3}$$

где составляющие векторов $\mathbf{l}_s=\{l_{si}\}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_s=\{\varepsilon_{si}\}^{\mathrm{T}}$ такие:

$$l_{si} = \frac{1}{M_{si}}\sum_{r=1}^{M_{si}} l'_{ri},\ l'_{ri} = l_{ri} - \mathbf{A}_s\Delta\mathbf{x}_r; \qquad \varepsilon_{si} = \frac{1}{M_{si}}\sum_{r=1}^{M_{si}}\varepsilon_{ri}.$$

Здесь M_{si} — количество наблюдений i-го объекта ($i=1, 2, \dots, q_s$) в M_s сериях ($M_{si}\neq M_s$ из-за возможных пропусков наблюдений).

Разброс отдельных значений l'_{ri} $(r=1, 2, \dots, M_{si})$ относительно среднего l_{si} позволяет оценить дисперсию σ_i^2 каждого элемента вектора $\mathbf{l}_s$

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(l_{si}) = \left[\sum_{r=1}^{M_{si}} (l'_{ri} - l_{si})^2\right] / (M_{si} - 1)$$

и образовать из них ковариационную и весовую матрицы

$$\mathbf{Q}_s = \mathrm{diag}\,[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{q_s}^2],$$

$$\mathbf{P}_s = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_s^{-1} = \mathrm{diag}\,[p_1, p_2, \dots, p_{q_s}],$$

где σ_0 — усредненная по всем объектам программы ошибка единицы веса

$$\sigma_0 = \left[\frac{1}{12} \sum_{s=1}^{12} \frac{1}{q_s} \sum_{i=1}^{q_s} \sigma_i^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Обе матрицы $\mathbf{Q}_s$ и $\mathbf{P}_s$ диагональные.

Если принятая модель инструментальной системы $\mathbf{f}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s$ достаточно полная, то элементы матрицы $\mathbf{Q}_s$ должны различаться незначимо. Варьируя вид этой модели, будем получать различные матрицы $\mathbf{Q}_s$, в которых элементы σ_i^2 согласуются между собой в большей или меньшей степени. С помощью критерия согласия Фишера можно методом последовательных приближений подобрать наиболее полную модель для инструментальной системы $\mathbf{f}_s$.

Применяя описанную процедуру сокращения ко всем парам групп s, получаем 12 систем уравнений вида (3), которые необходимо уравнять совместно. Полагая $\mathbf{l} = \{l_s\}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x} = \{x_s\}^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_s\}^{\mathrm{T}} (s = 1, 2, \dots, 12)$, а также вводя клеточную матрицу

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{12}], \tag{5}$$

представим совместную для 12 пар групп систему уравнений (3) в аналогичном (1) виде. Число уравнений этой системы q равно суммарному количеству объектов во всех парах групп, т. е. $q = \sum\limits_s q_s$, а ковариационная и весовая матрицы ошибок измерений имеют размер $q \times q$ и вид

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \mathrm{diag}\,[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{12}], \quad \mathbf{P}_\varepsilon = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_\varepsilon^{-1} = \mathrm{diag}\,[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{12}]. \tag{6}$$

Обе эти матрицы диагональные в силу диагональности матриц $\mathbf{Q}_s$, $\mathbf{P}_s$.

Перейдем к математическому описанию ошибок исходного каталога. Обозначим эти ошибки общим символом γ и будем считать, что $\gamma_\alpha = \Delta\alpha \cos\delta$, $\gamma_\delta = \Delta\delta$. Тогда их влияние на теоретически предвычисленные значения наблюдаемых величин можно представить в общем виде

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\alpha + \boldsymbol{\mu}_\delta = \mathbf{g}\gamma_\alpha + \mathbf{h}\gamma_\delta, \tag{7}$$

где $\mathbf{g}(t, \delta)$, $\mathbf{h}(t, \delta)$ — известные функции часового угла t и склонения δ, определяемые типом инструмента и методом наблюдений. Для меридианных наблюдений $\mathbf{g} = \pm 1$, $\mathbf{h} \equiv 0$ (прямые восхождения), $\mathbf{g} \equiv 0$, $\mathbf{h} = \pm 1$ (склонения). Для астролябии [2] и радиоинтерферометра [3] имеем $\mathbf{g} \neq \mathbf{h} \neq 0$.

Вектор ошибок каждой из координат $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, q)$ принято делить на систематическую $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и случайную $\mathbf{v}$ составляющие, т. е. $\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{v}$. Систематическую часть можно представить в виде линейной модели $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = \{y_k\}^{\mathrm{T}}$ — вектор параметров этой модели $(k = 1, 2, \dots, n)$; $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}$ — матрица влияния, определяемая системой ортогональных и нормированных функций $b_k(\alpha, \delta, m)$, заданных на небесной сфере и зависящих в общем случае от координат объектов и их яркости m. Эту систему можно построить методом ортогонализации Грама — Шмидта [6] на основе выбранных базисных функций $\psi_k(\alpha, \delta, m)$, в роли которых наиболее целесообразно использовать функции Швана [7], представляющие собой модификацию обычных сферических функций. Необходимая для процесса ортогонализации трехмерная весовая функция $\rho(\alpha, \delta, m)$ может быть получена по данным распределения наблюдаемых объектов по трем ее аргументам.

Подставляя модели $\tilde{\gamma}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{y}_\alpha$, $\tilde{\gamma}_\delta = \mathbf{B}_\delta \mathbf{y}_\delta$ в формулу (7), получаем вместо системы вида (1) окончательное уравнение погрешностей

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{v}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{B} = [\mathbf{G}\mathbf{B}_\alpha \,\vdots\, \mathbf{H}\mathbf{B}_\delta]$ — блочная матрица размером $q \times n$, где $n = n_\alpha + n_\delta$; n_α, n_δ — длины векторов $\mathbf{y}_\alpha$ и $\mathbf{y}_\delta$ соответственно; $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ — диагональные матрицы размером $q \times q$, элементами которых являются функции g_i, h_i ($i = 1, 2, \dots, q$); $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{y}_\delta\}^{\mathrm{T}}$ — составной вектор параметров систематических ошибок исходного каталога длиной n; $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}$ — суммарный вектор случайных (индивидуальных) ошибок координат $\boldsymbol{\nu}$ и случайных ошибок наблюдений $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем, согласно (7),

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g}\boldsymbol{\nu}_\alpha + \mathbf{h}\boldsymbol{\nu}_\delta. \tag{9}$$

Весовая матрица невязок уравнений (8), очевидно, такова:

$$\mathbf{P}_v = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_v^{-1} = \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_\nu + \mathbf{Q}_\varepsilon)^{-1}, \tag{10}$$

где, согласно (9),

$$\mathbf{Q}_\nu = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{G} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_\delta \mathbf{H}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{Q}_\alpha$, $\mathbf{Q}_\delta$ — априорные ковариационные матрицы случайных ошибок координат. В общем случае эти матрицы не диагональные, так как одни и те же объекты могут содержаться в программе наблюдений несколько раз. Это особенно характерно для традиционных групповых программ, поскольку соседние пары групп с номерами s и $s+1$ содержат общую группу объектов с номером $s+1$. Таким образом, весовая матрица $\mathbf{P}_v$ является квадратной симметрической матрицей размером $q \times q$.

Рассмотрим теперь возможности использования априорной информации о точности системы исходного каталога. Если кроме ковариационных матриц $\mathbf{Q}_\alpha$ и $\mathbf{Q}_\delta$ известна еще и ковариационная матрица $\mathbf{Q}_y$ составного вектора $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{y}_\delta\}^{\mathrm{T}}$, то в соответствии с принципом максимума апостериорной вероятности этот вектор можно уравнивать совместно с системой (8) как вектор измерений с весовой матрицей $\mathbf{P}_y = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_y^{-1}$ [4]. Полагая, что вектор $\mathbf{y}$ есть поправка к априорному вектору $\mathbf{y}_0$, случайные ошибки элементов которого $\mathbf{u} = \{u_k\}^{\mathrm{T}}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), и принимая, что эти ошибки не зависят от случайных ошибок $\mathbf{v}$, получаем совместную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{v}, \quad && \text{вес} \quad \mathbf{P}_v \\ \mathbf{y} &= \mathbf{u}, && \text{вес} \quad \mathbf{P}_y \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

которая должна уравниваться параметрическим способом при условии

$$S = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{v} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_y \mathbf{u} = \min. \tag{13}$$

Условие (13) позволяет привести систему (12) к нормальному виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xy} \\ \mathbf{D}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_x \\ \mathbf{l}_y \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathbf{D}_x = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{A}$, $\mathbf{D}_y = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{B} + \mathbf{P}_y$, $\mathbf{D}_{xy} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{B}$, $\mathbf{l}_x = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{l}$, $\mathbf{l}_y = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_v \mathbf{l}$.

Решение системы (14) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_x \\ \mathbf{l}_y \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{C}_x = (\mathbf{D}_x - \mathbf{D}_{xy}\mathbf{D}_y^{-1}\mathbf{D}_{xy}^{\mathrm{T}})^{-1}, \quad \mathbf{C}_y = (\mathbf{D}_y - \mathbf{D}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_x^{-1}\mathbf{D}_{xy})^{-1},$$

$$\mathbf{C}_{xy} = -\mathbf{D}_x^{-1}\mathbf{D}_{xy}\mathbf{C}_y,$$

$$\sigma_v^2 = S/(q-m), \quad S = \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_v\mathbf{l} - \mathbf{l}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{l}_y^{\mathrm{T}}\mathbf{y}.$$

Заметим, что оценка средней квадратичной ошибки единицы веса σ_v^2 не зависит от длины вектора $\mathbf{y}$, так как система уравнений (12) имеет лишь $q-m$ степеней свободы.

Рассмотрим возможности использования априорной информации о точности улучшаемого каталога на примере FK4. Ковариационные матрицы $\mathbf{Q}_\alpha$ и $\mathbf{Q}_\delta$ легко получить с помощью оценки ошибок координат, приведенных в самом каталоге. Затем по формулам (4), (6), (10) и (11) находим матрицу $\mathbf{P}_v$. Сложнее построить матрицу $\mathbf{P}_y$, так как при составлении FK4 разложение поля ошибок предшествующего каталога FK3 в принятом нами виде $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 = \mathbf{B}\mathbf{y}_0$ не применялось, исходный (уточняемый нами) вектор $\mathbf{y}_0$ не оценивался, и не вычислялась соответствующая ему ковариационная матрица $\mathbf{Q}_y$. Однако имеются полученные составителями FK4 оценки точности системы положений и собственных движений этого каталога в разных зонах небесной сферы [8—10]. На основании этих данных можно для любой звезды программы наблюдений и на любую эпоху T вычислить средние квадратичные ошибки $\sigma(\tilde{\gamma})$ обеих координат в систематическом отношении. Например, согласно [10], для всех звезд северной полусферы с достаточной точностью можно принять

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_\alpha) = \sigma^2(\widetilde{\Delta\alpha\cos\delta}) = (0.04'')^2 + (0.11'')^2(T-1950)^2\cdot 10^{-4},$$
$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_\delta) = \sigma^2(\widetilde{\Delta\delta}) = (0.02'')^2 + (0.06'')^2(T-1950)^2\cdot 10^{-4}. \tag{16}$$

Поскольку функции $b_k(\alpha, \delta, m)$, определяющие матрицы $\mathbf{B}_\alpha$ и $\mathbf{B}_\delta$, ортонормированные в области их задания, то оценки точности компонентов векторов $\mathbf{y}_\alpha$ и $\mathbf{y}_\delta$ должны получаться приблизительно одинаковыми, т. е. можно принять $\sigma(y_{\alpha k}) \approx \sigma(\mathbf{y}_\alpha) = \mathrm{const}$, $\sigma(y_{\delta k}) \approx \sigma(\mathbf{y}_\delta) = \mathrm{const}$. Тогда легко показать, что

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_\alpha) = \sigma^2(\mathbf{y}_\alpha)\,\|\mathbf{B}_\alpha\|^2/q, \quad \sigma^2(\tilde{\gamma}_\delta) = \sigma^2(\mathbf{y}_\delta)\,\|\mathbf{B}_\delta\|^2/q, \tag{17}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидовы нормы соответствующих матриц [5, с. 391]; $\sigma^2(\tilde{\gamma}_\alpha)$ и $\sigma^2(\tilde{\gamma}_\delta)$ — усредненные по всем объектам программы ($i=1, 2, \ldots, q$) оценки дисперсии системы FK4, определяемые формулами (16). С помощью (17) находим диагональную ковариационную матрицу вектора $\mathbf{y}$ размером $n\times n$

$$\mathbf{Q}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{y\alpha} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{y\delta} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{Q}_{y\alpha} = \frac{q\sigma^2(\tilde{\gamma}_\alpha)}{\|\mathbf{B}_\alpha\|^2}\mathbf{E}_\alpha, \quad \mathbf{Q}_{y\delta} = \frac{q\sigma^2(\tilde{\gamma}_\delta)}{\|\mathbf{B}_\delta\|^2}\mathbf{E}_\delta.$$

Здесь $\mathbf{E}_\alpha$ и $\mathbf{E}_\delta$ — единичные матрицы размером $n_\alpha \times n_\alpha$ и $n_\delta \times n_\delta$ соответственно.

При наличии связи между определяемыми параметрами в виде так называемых условных уравнений последние можно включить в систему (12) и затем уравнять ее коррелатным способом или способом исключения условий [4]. Например, обычное условие $\Sigma\Delta\alpha = 0$, отражающее невозможность определения нуль-пункта прямых восхождений, будет автоматически удовлетворено, если из разложения $\tilde{\gamma}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{y}_\alpha$ исключить нулевую гармонику, т. е. постоянную составляющую.

Перейдем к оценке индивидуальных поправок координат. Поскольку две любые соседние пары групп программы наблюдений имеют общую группу, то в системе уравнений (12) каждый объект представлен минимум дважды. Кроме того, некоторые объекты могут наблюдаться при разных часовых углах, например в верхней и нижней кульминациях. Собирая невязки v_i, относящиеся ко всем наблюдениям данного объекта, получаем систему уравнений

$$v_i = g_i \nu_\alpha + h_i \nu_\delta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

которую можно решить относительно индивидуальных поправок ν_α и ν_δ параметрическим способом при условии $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} = \min$. Если же какой-либо объект наблюдался только при одном фиксированном значении часового угла, то тогда для него функции $g_i = g$, $h_i = h$ будут постоянными, и из решения соответствующей ему системы (18) можно определить лишь линейную комбинацию индивидуальных ошибок $\nu = g\nu_\alpha + h\nu_\delta$.

Для уравнивания абсолютных наблюдений принципиально важно, чтобы искомые векторы **x** и **y** получились некоррелированными, иначе система инструмента может исказить систему определяемых поправок координат объектов. Взаимная корреляция этих векторов описывается корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{xy} = \{\rho_{jk}\}$, элементы которой

$$\rho_{jk} = (c_{xy})_{jk} / [(c_x)_{jj} (c_y)_{kk}]^{1/2}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

вычисляются через элементы матриц $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{C}_y$, $\mathbf{C}_{xy}$, определяемых формулами (15).

Корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{xy}$ можно рассматривать как достаточно объективный критерий достоверности полученной системы координат, так как чем ближе к нулю ее элементы, тем менее эта система зависит от неучтенной системы инструмента, а значит, тем более точен наш каталог в систематическом отношении. Если же в матрице $\mathbf{K}_{xy}$ имеются значимые коэффициенты корреляции ρ_{jk}, то необходимо одну из моделей $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ или $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ скорректировать путем исключения j-го элемента вектора **x** или k-го элемента вектора **y**, а затем повторить уравнивание. Подобные случаи свидетельствуют о существовании объективных ограничений наших возможностей улучшения системы исходного каталога с помощью имеющихся данных наблюдений.

Важное преимущество предлагаемого способа уравнивания заключается в том, что корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{xy}$ можно вычислить заранее, еще до наблюдений, имея лишь их программу. Это позволяет влиять на качество будущего каталога путем подбора соответствующей программы наблюдений методом численного моделирования. Отметим также, что при широком использовании этого метода существенно упростилась бы процедура составления новых сводных и фундаментальных каталогов, так как вывод их системы сводился бы к совместному уравниванию соответствующих индивидуальным каталогам векторов **y** с учетом их ковариационных матриц $\mathbf{Q}_y = \sigma_v^2 \mathbf{C}_y$, вычисляемых по формулам (15).

В заключение отметим, что подобный метод можно применять и для уравнивания дифференциальных наблюдений. В этом случае искомыми величинами будут вектор параметров системы инструмента **x** и вектор индивидуальных поправок координат определяемых объектов.

1. *Губанов В. С.* О выводе абсолютных координат звезд из групповых наблюдений // Астрон. журн.— 1975.—52, вып. 4.— С. 857—866.
2. *Губанов В. С.* Математическая обработка наблюдений на астролябии // Изв. Глав. астрон. обсерватории в Пулкове.— 1982.—200.— С. 68—76.
3. *Губанов В. С., Финкельштейн А. М., Фридман П. А.* Введение в радиоастрометрию.— М. : Наука, 1983.—279 с.

4. *Кленицкий Б. М.* Использование априорной информации о точности определяемых и исходных параметров при уравнивании космических геодезических сетей // Науч. информ. Астрон. совет АН СССР.— 1982.—55.— С. 98—126.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М. : Наука, 1978.—391 с.
6. *Хемминг Р. В.* Численные методы.— М. : Наука, 1972.—400 с.
7. *Bien R., Fricke W., Lederle T., Schwan H.* Methods for the comparison of systems of star positions to be applied in the construction of the FK5 // Veröff. Astron. Rechen-Inst. Heidelberg.— 1978.— N 29.— P. 1—21.
8. *Gliese W.* The right ascension system of the Fourth fundamental catalogue (FK4) // Ibid.— 1963.— N 12.— P. 1—55.
9. *Kopff A., Nowacki H., Strobel W.* Individual corrections to FK3 and the declination system of the Fourth fundamental catalogue (FK4) // Ibid.— 1964.— N 14.— P. 1—48.
10. *Lederle T.* Accuracy of fundamental positions and proper motions // Bull. inform. Centre Donnees Stellaires. Observ. Strasbourg.— 1978.— N 14.— P. 62—68.

Ленингр. фил. Спец. астрофиз. обсерватории АН СССР

Поступила в редакцию 20.03.87, после доработки 16.06.87

Новые книги

УРАВНЕНИЕ БЛЕСКА В ФОТОГРАФИЧЕСКОЙ АСТРОМЕТРИИ / Г. А. Иванов, И. Г. Колчинский, С. П. Рыбка и др.

Киев : Наук. думка, 1988.— 7 л.— 1 р. 10 к.

В монографии изложены результаты проведенных в ГАО АН УССР многолетних исследований влияния блеска звезд на ошибки при определении их положений и собственных движений. Рассмотрены методы исключения уравнения блеска по фотографиям звездных площадок с экспозициями разной длительности, инструментальные методы с использованием дифракционной решетки и снимков в двух положениях трубы телескопа, а также методы, основывающиеся на данных составляемого каталога собственных движений. Для специалистов в области фотографической астрометрии.