

УДК 521.95:523.31—852:535.327

Рефракция в меридиональной модели атмосферы.

Теоретические основы

А. Ю. Яценко

Теория Гарцера не гарантирует устойчивости решения системы дифференциальных уравнений, на которых она базируется. Предложено новое решение этих уравнений, более компактное, устойчивое. Оно позволяет получать больше информации, чем применение классического интеграла рефракции в сферически-симметричной модели атмосферы при одинаковых исходных данных.

REFRACTION IN MERIDIONAL MODEL OF THE ATMOSPHERE. THEORY, by Yatsenko A. Yu.—The solution of principal differential equations in Harzer's theory is not stable. A new solution of these equations is suggested. It is compact and stable. The solution makes it possible to obtain more information than the calculations based on the spherically symmetric model of the atmosphere.

Введение. Работа посвящена так называемой теории рефракции в трехмерной модели атмосферы, или, по-другому, трехмерной рефракции. Следует уточнить терминологию. Сферически-симметричная модель атмосферы — тоже трехмерная, однако ее использование в теории рефракции дает только вертикальную рефракцию, одинаковую для любого азимута на данной широте. Под трехмерной моделью понимается нечто другое, нежели сферическая модель. Возникает неоднозначность термина. Следовательно, становится неоднозначным и термин «трехмерная рефракция». Мы используем следующую терминологию: 1 — рефракция в сферически-симметричной модели атмосферы; 2 — рефракция в меридиональной модели атмосферы; 3 — рефракция в меридионально-широтной модели атмосферы. Эти термины несколько длиннее, но они однозначны. Преломляющие свойства атмосферы в модели 1 изотропны по отношению к лучу света на данном зенитном расстоянии во всех азимутах для любой долготы на данной широте; в модели 2 — изотропны по отношению к лучу света на данном зенитном расстоянии в азимутах, симметричных относительно меридиана для любой долготы на данной широте; в модели 3 — анизотропны по отношению к лучу света на данном зенитном расстоянии в любых азимутах на всех долготах для данной широты.

Известно, что первую теорию рефракции в меридиональной модели атмосферы разработал Гарцер в 1916—1924 гг. [2]. Детальный анализ его решения дан в [5]. В настоящей работе предлагаем новое решение основных уравнений теории Гарцера для меридиональной модели атмосферы, более компактное и универсальное, чем решение Гарцера. Необходимость нового решения вызвана тем, что точность конечного результата в решении Гарцера не соответствует современным требованиям. При этом отметим, что для создания глобальных (или региональных) таблиц рефракции самый оптимальный вариант — меридиональная модель атмосферы, максимально достоверно отражающая реальные высоты поверхности постоянного показателя преломления (ПППП) вдоль меридиана. Дело в том, что по исследованиям метеорологов наклоны ПППП вдоль параллелей незначительны по сравнению с наклонами вдоль меридианов Земли. Вследствие этого лучший компромисс между двумя взаимоисключающими требованиями (максимальная точность ко-

нечного результата и максимальная универсальность теории рефракции) — использование меридиональной модели атмосферы.

Основные уравнения теории Гарцера. Для описания траектории движения луча света в трехмерном пространстве Гарцер [2] использовал уравнения Эйлера

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (1)$$

В основе этих уравнений лежит принцип Ферма. Строгий вывод уравнений (1) дан в [1] и воспроизведен в [5]. Гарцер привел уравнения (1) к виду

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha\varepsilon - \lambda}{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta\varepsilon - \mu}{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma\varepsilon - \nu}{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}};$$

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma. \quad (2)$$

Здесь начало координат помещено в геометрический центр Земли, которую считаем эллипсоидом вращения; ось x лежит в плоскости меридиана точки наблюдения P_0 и направлена к югу; ось y перпендикулярна к плоскости меридиана точки наблюдения и направлена к западу; ось z лежит в плоскости меридиана точки наблюдения и параллельна направлению из P_0 к оптическому зениту (оптический зенит — это проекция на небесной сфере конца перпендикуляра к оптической поверхности, проходящей через произвольную точку P , в данном случае через точку P_0); α, β, γ — направляющие косинусы элемента траектории ds луча света в точке P с координатами x, y, z ; λ, μ, ν — направляющие косинусы перпендикуляра к оптической поверхности, проходящей через точку P ; ε — косинус угла между элементом ds и перпендикуляром к оптической поверхности в точке P ; ρ — радиус кривизны траектории луча света в точке P .

Для упрощения выкладок Гарцер ввел полярную систему координат, в которой приняты обозначения: r — расстояние от центра Земли, ψ — геоцентрическая широта, ω — геоцентрическая долгота (положительная к западу от меридиана P_0). Тогда

$$\lambda = -\cos \chi_0 \sin \chi + \sin \chi_0 \cos \chi \cos \omega, \quad \mu = \cos \chi \sin \omega, \quad (3)$$

$$\nu = \sin \chi_0 \sin \chi + \cos \chi_0 \cos \chi \cos \omega.$$

Здесь χ_0 — оптическая широта точки наблюдения P_0 ; χ — оптическая широта точки P ;

$$\chi = \psi + \tau;$$

$$\tau = 2R_1 \sin 2\psi + (4R_2 - R_1^2) \sin 4\psi + \sum_{m=3} 2mR_m \sin 2m\psi -$$

$$- \sum_{m=0} (2m+1) S_m \cos(2m+1)\psi;$$

$$R_0 = 1; \quad R_1 = H_1/k + c_1 + c_2 + (k+1)c_1^2;$$

$$R_2 = H_2/k + 2c_2 - 0.25(k-4)c_1^2;$$

$$R_m = H_m/k, \quad m \geq 3; \quad S_m = T_m/k, \quad m \geq 0; \quad (4)$$

$$\rho\sqrt{1-\varepsilon^2} = -\cos \tau \frac{\partial r/\partial A}{\partial \ln n/\partial A}; \quad A = a_k [1 - c_1 - 2c_2 - 0.25(3k+4)c_1^2];$$

$$k = 1 + h/a; \quad c_1 = e/(4k); \quad c_2 = (eH_1)/(4k^2);$$

a — большая полуось земного эллипсоида; e — квадрат эксцентриситета земного эллипсоида; h — высота точки над эллипсоидом, которую Гарцер представил в виде ряда Фурье

$$h = a \sum_{m=0} [H_m \cos 2m\varphi + T_m \sin (2m + 1)\varphi]. \quad (5)$$

С помощью (5) величину r можно представить следующим выражением:

$$r = ak \left[1 - c_1 - \frac{3k-4}{4} c_1^2 + \left(\frac{H_1^2}{k} + c_1 + kc_1^2 \right) \cos 2\varphi + \left(\frac{H_2}{k} - \frac{k+4}{4} c_1^2 \right) \cos 4\varphi + \sum_{m=3} H_m \cos 2m\varphi + \sum_{m=0} T_m \sin (2m + 1)\varphi \right]. \quad (6)$$

Заменяя географическую широту φ геоцентрической ψ , получаем

$$r = A \sum_{m=0} [R_m \cos 2m\psi + S_m \sin (2m + 1)\psi]. \quad (7)$$

Вывод формул (3) — (7), а также других выражений, связывающих наблюдаемое зенитное расстояние ζ_G и азимут η_G с α , β , γ , координаты x , y , z с r , ψ , ω и т. д., можно найти в [5]. Там же дан возможный алгоритм современного использования теории Гарцера.

Числовые расчеты по теории Гарцера. Формулу (5) для высоты h Гарцер использовал в упрощенном виде

$$h = a \sum_{m=0} H_m \cos 2m\varphi. \quad (8)$$

Аргументировал он это следующим образом. Атмосфера Земли имеет симметричное строение в северном и южном полушариях, а функция синус — нечетная. Следовательно, члены с синусами исчезают. В настоящее время ясно, что это предположение неверно. Тем не менее мы выполнили расчеты на ЭВМ ЕС-1033 с использованием формул (5) и (8). Выяснилось, что обе формулы дают решение, похожее на результаты Гарцера, при условии, что взято примерно такое же (как у Гарцера) распределение опорных широт. Он использовал следующие опорные широты: -6° ; 30 ; 42 ; 52.5 ; 59.75° . Выбор широт определялся имевшимися в то время пунктами аэрологического зондирования атмосферы. Если уменьшать расстояние между опорными широтами (согласно современным метеорологическим исследованиям [3], расстояние между ними для надежной интерполяции не должно превышать 300 км (около 3°)), то коэффициенты в (5), (8) стремительно увеличиваются, и величина c_2 в выражении $A = ak[1 - c_1 - 2c_2 - 0.25(3k+4)c_1^2]$ становится при некотором $\Delta\varphi$ (для данного угла наклона ПППП к эллиптическим ПППП) больше c_1 и начинает искажать параметр A и, соответственно, все результаты вычислений. В качестве модели атмосферы использовалась модель [4].

Новое решение основных уравнений теории Гарцера. Представим, как и Гарцер, ПППП в виде однопараметрического семейства поверхностей, не имеющих между собой общих точек

$$f(x, y, z, H) = 0. \quad (9)$$

В отличие от Гарцера будем считать параметр H не константой для данной поверхности, а функцией параметров u , v . Причем u , v определяют значение H в зависимости от местоположения на выделенной поверхности семейства (9), а q выделяет одну поверхность из всех прочих при фиксированных u , v , т. е. для каждой точки u , v на некоторой поверхности семейства (9) параметр q вообще может быть различным.

Так как полный первый дифференциал функции нескольких переменных инвариантен относительно замены переменных, то всегда будет верно выражение

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial H} dH = 0. \quad (10)$$

Отсюда

$$dH = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) / \frac{\partial f}{\partial H}. \quad (11)$$

В выражении (11) и далее под dH подразумевается частный первый дифференциал по параметру q при фиксированных u, v . Из дифференциальной геометрии известно, что направляющие косинусы перпендикуляра к конкретной поверхности из семейства (9) (например, в точке u, v) выглядят следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{F} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mu = \frac{1}{F} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \nu = \frac{1}{F} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (12)$$

где

$$F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (13)$$

Следовательно, формула (11) приобретает вид

$$dH = -F (\lambda dx + \mu dy + \nu dz) / \frac{\partial f}{\partial H}. \quad (14)$$

Далее можно записать

$$d \ln n = \frac{d \ln n}{dH} dH = C \frac{\partial f}{\partial H} dH = -C \frac{\partial f}{\partial H} F (\lambda dx + \mu dy + \nu dz) / \frac{\partial f}{\partial H}, \quad (15)$$

где C — неизвестная пока величина, выражающая зависимость между $d \ln n / dH$ и $\partial f / \partial H$. Из (15) непосредственно следует

$$\frac{\partial \ln n}{\partial x} = -CF\lambda, \quad \frac{\partial \ln n}{\partial y} = -CF\mu, \quad \frac{\partial \ln n}{\partial z} = -CF\nu. \quad (16)$$

Умножив и разделив правую часть (15) на ds , получим

$$\begin{aligned} d \ln n &= -CF \left(\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} \right) ds = \\ &= -CF (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) ds = -CF \epsilon ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение в круглых скобках в (17) — это известная в аналитической геометрии запись косинуса ϵ угла между двумя прямыми с направляющими косинусами λ, μ, ν и α, β, γ соответственно. Теперь уравнения Эйлера (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\alpha}{ds} = C (\alpha \epsilon F - \lambda F) = CF (\alpha \epsilon - \lambda), \quad (18)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = CF (\beta \epsilon - \mu), \quad \frac{d\gamma}{ds} = CF (\gamma \epsilon - \nu).$$

Возведем (18) в квадрат и сложим. При этом левая часть уравнения будет выглядеть так:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds} \right)^2. \quad (19)$$

Формула (19) — это известное из дифференциальной геометрии выражение для радиуса кривизны пространственной кривой, т. е.

$$\begin{aligned} 1/\rho^2 &= C^2 F^2 (\alpha^2 \varepsilon^2 - 2\alpha\varepsilon\lambda + \lambda^2 + \beta^2 \varepsilon^2 - 2\beta\varepsilon\mu + \mu^2 + \gamma^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\varepsilon\nu + \nu^2) = \\ &= C^2 F^2 [\varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2\varepsilon (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] = \\ &= C^2 F^2 (\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 + 1) = C^2 F^2 (1 - \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда

$$C = (\rho F \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{-1}. \quad (21)$$

Подставляя это выражение в (18), получаем уравнения (2).

ПППП рассматриваем как фигуры вращения вокруг малой оси земного эллипсоида кривых, возникающих при пересечении плоскостью меридиана наблюдаемых ПППП. Переходя к конкретному виду уравнения ПППП, воспользуемся вытекающим из уравнений Гарцера удобным выражением

$$r = \left[(a \sqrt{1 - e \sin^2 \varphi} + h(\varphi))^2 + \left(\frac{ae \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e \sin^2 \varphi}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Однако высоту $h(\varphi)$ ПППП над земным эллипсоидом мы представили в другом виде (по сравнению с представлением Гарцера). Мы убеждены, что наиболее достоверное представление ПППП можно получить только с использованием интерполяции реальных, т. е. полученных по зондированию атмосферы, аэрологических данных. Такое представление универсально, чего нельзя сказать о любой другой аппроксимации. Мы представили $h(\varphi)$ интерполяционной кубической сплайн-функцией

$$h(\varphi) = d_1 h_1 + d_2 h_2 - \frac{1}{6} g_1 g_2 [L_i''(1 + d_1) + L_{i+1}''(1 + d_2)], \quad (23)$$

где

$$g_1 = \varphi_{i+1} - \varphi, \quad g_2 = \varphi - \varphi_i,$$

$$d_1 = g_1 / (g_1 + g_2), \quad d_2 = g_2 / (g_1 + g_2).$$

$$\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}].$$

Здесь L_i'' — наклон сплайн-функции (вторая производная функции $h(\varphi)$ в узле φ_i). Наклоны сплайн-функции вычисляются из системы $n-2$ линейных уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{B}. \quad (24)$$

Элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} даются формулами $a_{ii} = 2(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})$, $a_{i,i-1} = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $a_{i,i+1} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$; $a_{i,j} = 0$ для $j < i - 1$ и $j > i + 1$, $b_i = 6 [(h_{i+1} - h_i) / (\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (h_i - h_{i-1}) / (\varphi_i - \varphi_{i-1})]$; \mathbf{L} — вектор неизвестных L_i'' . Чтобы решение стало возможным, налагаются граничные условия: $L_1'' = 0$, $L_n'' = 0$.

При использовании нового представления высоты ПППП над земным эллипсоидом, естественно, не рассматриваются все разложения в ряды (4)–(8). Решение становится более компактным, более точным и совершенно устойчивым. В частности, для угла τ между оптической и геоцентрической широтами используем его точное выражение

$$\tau = \arctg \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \psi} \right), \quad (25)$$

которое на практике можно получить численным дифференцированием. Формулу (25) можно вывести и другим способом, чем предложено в [5]. Рассмотрим рисунок. Известно, что уравнение единичного касательного

вектора к кривой $\mathbf{r}=\mathbf{r}(l)$ имеет вид

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{i} \frac{dx}{dl} + \mathbf{j} \frac{dy}{dl}, \quad (26)$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные орты по осям x, y ; dl — элемент кривой. С другой стороны, $\mathbf{t} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$. Следовательно, $\cos \theta = dx/dl$; $\sin \theta = dy/dl$. Откуда

$$\operatorname{tg} \theta = dy/dx. \quad (27)$$

Из рисунка следует $\nu = \theta - \psi$. Таким образом,

$$\operatorname{tg} \nu = (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \psi) / (1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi). \quad (28)$$

Подставляя (27) в (28), получаем

$$\operatorname{tg} \nu = (\cos \psi dy - \sin \psi dx) / (\cos \psi dx + \sin \psi dy). \quad (29)$$

Теперь определим dy, dx :

$$x = r \cos \psi, \quad dx = dr \cos \psi - r \sin \psi d\psi, \quad (30)$$

$$y = r \sin \psi, \quad dy = dr \sin \psi + r \cos \psi d\psi.$$

Подставляя (30) в (29), имеем

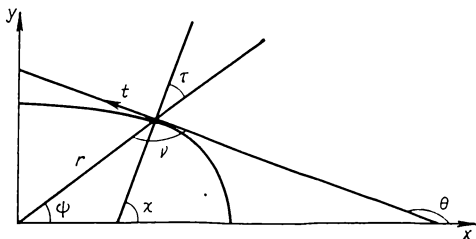
$$\operatorname{tg} \nu = r d\psi / dr. \quad (31)$$

Из рисунка можно получить $\tau = \chi - \psi = \nu - \pi/2$, $\nu = \tau + \pi/2$, т. е.

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{1}{\operatorname{tg} \nu} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\psi}. \quad (32)$$

Так как r зависит в общем случае от двух аргументов $r=r(\psi, \omega)$, а мы рассматриваем меридиональную модель атмосферы, т. е. $\partial r / \partial \omega = 0$, то производная в (32) приобретает смысл частной производной, и мы приходим к виду (25).

Теперь необходимо подробнее обосновать выбор параметра $H = H(u, v, q)$ (вместо A у Гарцера). В меридиональной модели атмосферы он имеет вид $H = H(\varphi, h)$, где h — высота данной ПППП над земным эллипсоидом на определенной широте φ . По параметру $H(\varphi, h)$ (у Гарцера по A) ведется дифференцирование функций $\ln n$ и r (см. формулы (4)). Нетрудно понять, что если A — константа для



К выводу угла τ между оптической и геоцентрической широтами

каждой данной ПППП, то и значение производной $d \ln n / dA$ будет также константой для каждой данной ПППП независимо от φ (т. е. для всех зенитных расстояний $d \ln n / dA = \text{const}$). Однако ПППП могут располагаться в точке наблюдения плотнее или, наоборот, реже, чем в других точках меридиана, удаленных от места наблюдения на десятки и сотни километров, соответственно и величина $d \ln n / dH$ там должна быть иной. Это обстоятельство и учитывается в нашем решении. При этом повышается точность вычислений.

Подводя итоги теоретической части работы, полезно дать общую характеристику теории рефракции в меридиональной модели атмосферы.

В сферически-симметричной модели атмосферы рефракция определяется величиной интеграла, подынтегральная функция которого зави-

сит от зенитного расстояния и показателя преломления среды, аргументом является высота над поверхностью шарообразной Земли.

В меридиональной модели атмосферы луч света движется в трехмерном евклидовом пространстве, и положение касательной к траектории луча света определяется тремя направляющими косинусами, а рефракция — углом между касательными к траектории луча света в точке наблюдения и на границе атмосферы. В этом пункте меридиональная теория рефракции принципиально отличается от сферически-симметричной теории. Последняя — частный случай первой, что доказал еще Гарцер. В то же время меридиональная теория отличается от меридионально-широтной только уравнениями, описывающими ПППП.

Таблица 1. Рефракция в эллипсоидальной модели атмосферы на широте 45°

z	A, град					Любое (Пулковские таблицы)
	0	45	90	135	180	
5°	4.994"	4.994"	4.994"	4.994"	4.994"	4.994"
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—
30	32.946	32.946	32.946	32.946	32.946	32.945
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—
45	57.019	57.020	57.020	57.019	57.019	57.018
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—
60	98.529	98.530	98.531	98.530	98.529	98.526
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—
70	155.476	155.479	155.482	155.479	155.476	155.471
	0.000	0.001	0.000	—0.001	0.000	—
75	209.684	209.690	209.697	209.691	209.684	209.681
	0.000	0.002	0.000	—0.002	0.000	—
80	312.525	312.545	312.566	312.546	312.526	312.529
	0.000	0.004	0.000	—0.000	0.000	—
82	385.031	385.068	385.103	385.070	385.034	385.052
	0.000	0.006	0.000	—0.006	—0.000	—
84	496.879	496.949	497.021	496.954	496.888	496.924
	0.000	0.009	0.000	—0.009	0.000	—
86	687.801	687.972	688.151	687.989	687.826	687.939
	0.000	0.017	0.000	—0.016	0.000	—
88	1064.111	1064.618	1065.151	1064.682	1064.202	1064.609
	0.000	0.038	0.001	—0.037	0.000	—
89	1408.418	1409.386	1410.388	1409.529	1408.613	1409.419
	0.000	0.064	0.002	—0.060	0.000	—
90	1974.091	1976.103	1978.289	1976.475	1974.604	1977.971
	0.000	0.1140	0.006	—0.106	0.000	—

Примечание. Здесь и далее точность $\pm 0.001''$ до 86° , $\pm 0.005''$ для больших z . Во второй строке для каждого z дана горизонтальная рефракция.

Отметим еще два момента, характерных для меридиональной теории рефракции: 1. Поскольку рефракция определяется только изменением направляющих косинусов, то без особой потери точности возможно вычисление рефракции на зенитных расстояниях более 90° — в принципе на любых физически допустимых z (при этом не будем забывать об атмосферах других планет, где это может оказаться весьма актуальным). 2. Предлагаемая теория рефракции (опять же, благодаря направляющим косинусам) позволяет определять не только астрономическую, но и вообще любую рефракцию между двумя произвольными точками в атмосфере.

Новое решение проверено нами на эллипсоидальной модели атмосферы, полученной следующим образом. Над земным сфероидом МАС была «подвешена» стандартная атмосфера ГОСТ 4401—73, положенная в основу 5-го издания Пулковских таблиц рефракции. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1033 и ЕС-1045. Результаты приведены в табл. 1 для

широты 45° и табл. 2 для широты 0. Для удобства сравнения с Пулковскими таблицами принята длина волны $\lambda=590$ нм. Обратим внимание на несимметричность вертикальной рефракции относительно первого вертикала на широте 45° . Известно, что аномалии рефракции, вызванные наклоном ПППП, имеют такой знак, что в азимуте $A=0$ рефракция меньше, чем в $A=180^\circ$ [4]. В нашей модели наклонов ПППП нет, но знак аномалий совпадает с указанным. Это свидетельствует о том, что даже такая искусственная меридиональная модель, какую использовали мы (заметим, преднамеренно), более близка к действительности, чем сферически-симметричная модель атмосферы.

Таблица 2. Рефракция в эллипсоидальной модели атмосферы на широте 0

z	A, град					Любос (Пулковские таблицы)
	0	45	90	135	180	
5°	4.994" 0.000	4.994" 0.000	4.994" 0.000	4.994" 0.000	4.994" 0.000	4.994" —
30	32.946 0.000	32.946 0.000	32.946 0.000	32.946 0.000	32.946 0.000	32.945 —
45	67.918 0.000	67.919 0.000	67.919 0.000	67.919 0.000	67.918 0.000	67.917 —
60	98.525 0.000	98.527 0.001	98.529 0.000	98.527 -0.001	98.526 0.000	98.524 —
70	155.466 0.000	155.471 0.002	155.477 0.000	155.472 -0.002	155.466 0.000	155.464 —
75	209.663 0.000	209.675 0.004	209.689 0.000	209.676 -0.004	209.663 0.000	209.662 —
80	312.462 0.000	312.502 0.008	312.542 0.000	312.502 -0.008	312.462 0.000	312.457 —
82	384.921 0.000	384.993 0.012	385.064 0.000	384.993 -0.012	384.921 0.000	384.928 —
84	496.662 0.000	496.806 0.019	496.946 0.000	496.805 -0.019	496.662 0.000	496.661 —
86	687.302 0.000	687.635 0.034	687.972 0.000	687.636 -0.034	687.302 0.000	687.322 —
88	1062.647 0.000	1063.636 0.077	1064.651 0.000	1063.636 -0.077	1062.647 0.000	1062.747 —
89	1405.668 0.000	1407.559 0.126	1409.446 0.000	1407.558 -0.126	1405.667 0.000	1405.821 —
90	1968.515 0.000	1972.383 0.225	1976.229 0.000	1972.383 -0.225	1968.515 0.000	1970.062 —

Главный вывод работы: использование более строгой математической теории, чем теория рефракции в сферически-симметричных моделях, позволяет даже при одинаковых исходных метеорологических данных получить значительно больше информации.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1970.—856 с.
2. Harzer P. Berechnung der Ablenkungen der Lichtstrahlen in der Atmosphäre der Erde auf rein meteorologisch-physikalischer Grundlage // Publ. Sternwarte Kiel.— 1922—1924.—13.— S. 1—89.
3. Radinović D. Analiza vremena.— Beograd: Zavod izdav. udžbenika Soc. Rep. Srb., 1969.—368 s.
4. Saastamoinen J. Report of a study on the latitudinal distribution of meridional tilts in the atmosphere.— 1980.—252 p.
5. Yatsenko A. Yu., Teleki G. Harzer's works on astronomical refraction viewed from today's standpoint // Bull. Observ. Astron. Beograd.— 1985.— N 135.— P. 1—15.