

УДК 523.45/46—852

Микрофизические свойства двухкомпонентной слоистообразной облачности в атмосферах планет-гигантов.

I. Метод расчетов. Юпитер

К. Ю. Ибрагимов, А. М. Пирнач

Рассмотрена общая система уравнений, описывающая процесс формирования и эволюции облачности в атмосферах планет-гигантов с учетом микроструктуры. Для примера рассчитаны четыре модели двухконденсатных облачных слоев в атмосфере Юпитера. За основу принята адиабатическая модель с температурой на начальном уровне $T_0=300$ К и адиабатическим градиентом $\gamma_a=2.25$ К/км. Изучен слой толщиной $z=80$ км. Для динамических и микрофизических параметров задавались значения: коэффициент турбулентной диффузии $k=10^5-10^7$ см²/с; скорость вертикального подъема $w=20-30$ см/с; содержание водяных и аммиачных паров $x_1=10^{-4}-10^{-3}$ и $x_2=10^{-3}$ соответственно; начальная концентрация ядер конденсации $N_{m1}=N_{m2}=5 \times 10^3$ см⁻³. Установлена взаимосвязь между параметрами атмосферы и характеристиками облачности — аммиачностью, водностью, концентрацией частиц и их средним радиусом.

MICROPHYSICAL PROPERTIES OF TWO-COMPONENT LAYER-LIKE CLOUDINESS IN THE ATMOSPHERES OF THE GIANT PLANETS. I. A METHOD OF CALCULATIONS. JUPITER, by Ibragimov K. Yu., Pirnach A. M.—The system of equations describing the clouds formation and evolution accounting for their microstructure is presented. The adiabatic model of the atmosphere with initial temperature $T_0=300$ K and adiabatic gradient $\gamma_a=2.25$ K/km is used in calculations. The geometrical thickness of the atmospheric layer is 80 km. The values of dynamical and microphysical parameters are: diffusion coefficient $k=10^5-10^7$ cm²/s; vertical velocity $w=20-30$ cm/s; water and ammonia vapour abundances $x_1=10^{-4}-10^{-3}$ and $x_2=10^{-3}$; initial concentration of condensation nuclei is $N_{m1}=N_{m2}=5 \cdot 10^3$ cm⁻³. The relation is established between atmospheric parameters and characteristics of cloudiness (ammoniance, waterance, particle concentration and their mean radius).

В работах [3—6] показана возможность моделирования слоистообразных облаков в атмосферах планет-гигантов при наличии нескольких способных конденсироваться компонентов, а также получены профили водно-аммиачных (Юпитер, Сатурн) и водно-аммиачно-метановых (Уран, Нептун) облаков для достаточно широкого диапазона изменения гидродинамических параметров атмосферы.

В предлагаемой статье представлены метод и предварительные результаты численного моделирования двухкомпонентной облачности с учетом микроструктуры для Юпитера.

Постановка задачи. Предположим, что параметры облачности незначительно изменяются в горизонтальном направлении (случай слоистообразных облаков), а облачные частицы не взаимодействуют друг с другом (без учета осадкообразования и взаиморастворения). На этой основе систему уравнений, описывающих процессы вертикального переноса и турбулентного перемешивания тепла, влаги и облачных частиц, по аналогии с [1, 2, 6], запишем в виде

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - k \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = F_j - I_j,$$

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} = \{T, q_1, q_2, f_1, f_2\}, \quad (1)$$

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \{\omega, \omega, \omega, \omega - v_1, \omega - v_2\},$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 - \gamma_a \omega \\ -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\dot{r}_1 \dot{f}_1) \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\dot{r}_2 \dot{f}_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix},$$

где ω — скорость вертикального подъема; k — коэффициент турбулентности; T — температура; q_1 и q_2 — удельные содержания конденсирующихся компонентов (например, NH_3 и H_2O); \dot{f}_1 и \dot{f}_2 — соответствующие удельные функции распределения частиц по размерам; t — время; z — высота; γ_a — адиабатический градиент температуры.

$$\alpha_i = L_i / c_p, \quad L_i = L_{0i} + (c_{\text{рп}i} - c_{\text{ж}i}) T,$$

$$\varepsilon_i = 4\pi\rho_i \int_0^\infty r^2 \dot{r}_i \dot{f}_i(r, z, t) dr, \quad (2)$$

$$\dot{r}_i = (D_i \rho_0 \Delta_i) / (\rho_i \Gamma_i r), \quad \Delta_i = q_i - q_{mi} \quad (i = 1, 2).$$

Здесь ε_i — скорость конденсации i -го компонента; L_i и c_p — скрытая теплота фазового перехода и удельная теплоемкость при постоянном давлении; $c_{\text{рп}i}$ и $c_{\text{ж}i}$ — удельные теплоемкости пара и жидкости, ρ_i — плотность; Δ_i — пересыщение; q_{mi} — насыщающая влажность; D_i — коэффициент молекулярной диффузии компонентов.

Множитель $\Gamma_i = 1 + \alpha_i \beta_i$ характеризует различие температур соответствующей капли и окружающей среды, $\beta_i = \partial q_{mi} / \partial T$, \tilde{I}_1 и \tilde{I}_2 — скорости зарождения капель на ядрах конденсации.

Начальные условия записываются в виде

$$T(z, 0) = T_0 - \gamma z, \quad q(z, 0) = q_{mi}(T(z, 0), P_0) q_{r0i}, \quad (3)$$

$$P(z, 0) = P_0 (1 - T/T_0)^{g\mu/R\gamma_a}, \quad f(z, r, 0) = 0,$$

где P_0 — давление на начальном уровне; g — ускорение свободного падения; μ — относительная молекулярная масса атмосферных газов; R — универсальная газовая постоянная.

$$q_{mi} = A_i E_i(T) / [P(z) + B_i E_i(T)], \quad q_{r0i} = e_i / E_i(T), \quad (4)$$

где $E_i(T)$ — упругость насыщения; e_i — парциальное давление паров; A_i и B_i — некоторые постоянные.

Условия на нижней границе облака записывались в виде

$$T(0, t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp(-t/\tau),$$

$$q_i(0, t) = q_{r0i} q_{mi}(T_0, P_0) [r_2 + (1 - r_2) \exp(-t/\tau)], \quad (5)$$

$$r_2 = [q_{r\infty i} q_{mi}(T_\infty, P_0)] / [q_{r0i} q_{mi}(T_0, P_0)],$$

где τ — время релаксации; T_∞ и $q_{r\infty i}$ — температура и относительная влажность на нижней границе при $t \rightarrow \infty$.

На верхней границе рассматриваемой области градиенты T , q_1 и q_2 задавались равными нулю

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial q_1}{\partial z} = \frac{\partial q_2}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Для функций распределения принимались условия, соответствующие уровням зарождения капель, в виде

$$\tilde{I}_i = N_{mi} \delta(r - r_0) \delta(z - z_{Hi}), \quad (7)$$

где z_{Hi} — уровень конденсации; N_{mi} — число ядер конденсации на уровне z_{Hi} ; r_0 — минимальный радиус частиц.

Кроме того, считалось, что внутри облака имеется следующий механизм формирования капель:

$$\tilde{I}_{1i} = [100 (q_i - q_{mi}) / q_{mi}]^{k_s} N_s \delta(r), \quad (8)$$

где k_s и N_s — варьируемые параметры.

Метод решения. Задача решается методом расщепления [7], в соответствии с которым система уравнений (1) заменялась двумя системами

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + w_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \tilde{I}_j, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = F_j. \quad (10)$$

Для системы (9) применялся метод прогонки с использованием неявной конечно-разностной схемы [9]. Преобразуем систему (10). Введем замену

$$y_i = a_i \Delta_i = a_i (q_i - q_{mi}), \quad a_i = 2D_i \rho_0 / \rho_i \Gamma_i, \quad \Gamma_i = 1 + \alpha_i \frac{\partial q_{mi}}{\partial T}, \quad \alpha_i = L_i / c_p. \quad (11)$$

Подставляя выражения (11) в систему (10), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{a_1} \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} \tau_1^{-1} y_1 + \frac{1}{a_2} \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \tau_2^{-1} y_2 - \gamma_a w \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} &= -\tau_1^{-1} y_1 - \beta_1 a_1 \left(\alpha_2 \frac{\tau_2^{-1}}{\Gamma_2} \frac{y_2}{a_2} - \gamma_a w \right) \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} &= -\tau_2^{-1} y_2 - \beta_2 a_2 \left(\alpha_1 \frac{\tau_1^{-1}}{\Gamma_1} \frac{y_1}{a_1} - \gamma_a w \right) \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial r} (\dot{r}_1, f_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial r} (\dot{r}_2, f_2) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

где $\tau_i^{-1} = 4\pi \rho_0 D_i \int_0^\infty r f_i(r) dr$, $\beta_i = \frac{\partial q_{mi}}{\partial T}$, $\dot{r}_i = \frac{y_i}{2r}$.

Последнее равенство характеризует скорость конденсационного роста отдельной частицы. В работе [8] рассматривалось свыше десяти вычислительных схем для системы, подобной (12), в случае чисто водного облака. Мы здесь использовали следующую (согласно [8]) наиболее оптимальную схему:

$$T^{j+1} = T^j + \frac{\alpha_1 \Delta t}{a_1 \Gamma_1} \tau_1^{-1} y_1^j + \frac{\alpha_2 \Delta t}{a_2 \Gamma_2} \tau_2^{-1} y_2^j - \gamma_a w \Delta t,$$

$$y_1^{j+1} = \left[y_1^j - \beta_1 a_1 \left(\alpha_2 \frac{\tau_2^{-1}}{\Gamma_2 a_2} y_2^j - \gamma_a w \right) \Delta t \right] / (1 + \tau_1^{-1} \Delta t), \quad (13)$$

$$y_2^{j+1} = \left[y_2^j - \beta_2 a_2 \left(\alpha_1 \frac{\tau_1^{-1}}{\Gamma_1 a_1} y_1^{j+1} - \gamma_a w \right) \Delta t \right] / (1 + \tau_2^{-1} \Delta t).$$

Допустим, что τ_i^{-1} , q_{mi} , Γ_i , β_i ($i=1, 2$) известны из предыдущего шага по времени. Определим условия, при которых система (13) будет устойчивой. Для этого используем спектральный признак устойчивости, представив решение системы (13) в виде $\Phi^{j+1} = \Lambda \Phi^j$.

Матрица перехода от схемы T^j , y_1^j , y_2^j к схеме T^{j+1} , y_1^{j+1} , y_2^{j+1} имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \frac{\alpha_1 \tau_1^{-1} \Delta t}{a_1 \Gamma_1} & \frac{\alpha_2 \tau_2^{-1} \Delta t}{a_2 \Gamma_2} \\ 0 & \frac{1}{1 + \tau_1^{-1} \Delta t} - \lambda & - \frac{\beta_1 a_1 \alpha_1 \tau_2^{-1} \Delta t}{\Gamma_2 a_2 (1 + \tau_1^{-1} \Delta t)} \\ 0 & - \frac{\beta_2 a_2 \alpha_1 \tau_1^{-1} \Delta t}{\Gamma_1 a_1 (1 + \tau_2^{-1} \Delta t)} \lambda & \frac{1}{1 + \tau_2^{-1} \Delta t} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Собственные числа матрицы удовлетворяют уравнению $(1 - \lambda)(\lambda^2 - ab\lambda + b) = 0$, где $b = \frac{1}{(1 + \tau_1^{-1} \Delta t)(1 + \tau_2^{-1} \Delta t)}$, $a = \frac{\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \Delta t^2}{\Gamma_1 \Gamma_2} + 2 + (\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1}) \Delta t$. Отсюда имеем $\lambda = 1$, $\lambda_{2,3} = ab/2 \pm \sqrt{a^2 b^2/4 - b}$. Если $a^2 b^2/4 - b < 0$, то, используя очевидное неравенство $0 \leq b \leq 1$, получаем $|\lambda|^2 = b < 1$. Если $a^2 b^2/4 - b > 0$, то после простых преобразований имеем $\lambda_{2,3} = (a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 1/b})^{-1}$. Откуда на основании соотношений $a^2/4 - 1/b > 0$, $a^2/4 > 1/b > 1$ получаем $\lambda_2 = (a/2 + \sqrt{a^2/4 - 1/b})^{-1} < 1$, $\lambda_3 \leq 1 \pm 0(\Delta t)$. Следовательно, схема (13) абсолютно устойчива, и выбор шага по времени определяется только соображениями точности.

Для расчета функций распределения f_i применялась схема

$$\frac{f_{ik}^{j+1} - f_{ik}^j}{\Delta t} + \dot{r}_{ik} \frac{f_{ik}^{j+1} - f_{ik-1}^{j+1}}{\Delta r_{ik}} + f_{ik}^{j+1} \frac{\dot{r}_{ik+1} - \dot{r}_{ik}}{\Delta r_{ik+1}} = 0 \quad (15)$$

при $\dot{r}_{ik} \geq 0$,

$$\frac{f_{ik}^{j+1} - f_{ik}^j}{\Delta t} + \dot{r}_{ik} \frac{f_{ik+1}^{j+1} - f_{ik}^{j+1}}{\Delta r_{ik}} + f_{ik}^{j+1} \frac{\dot{r}_{ik} - \dot{r}_{ik-1}}{\Delta r_{ik}} = 0 \quad (16)$$

при $\dot{r}_{ik} < 0$,

Как показано в [8], схема (15), (16) также абсолютно устойчива по времени и координатам и при постоянном шаге по радиусу имеет второй порядок точности по r .

$$\delta = 0(\Delta t) + 0[(\Delta r)^2] \pm \frac{1}{2} \left(\dot{r}_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2} - f_i \frac{\partial^2 \dot{r}_i}{\partial r^2} \right) \Delta r. \quad (17)$$

Результаты расчетов. Для иллюстрации описанного метода приведем результаты моделирования облачных образований в условиях атмосферы Юпитера. Исходной принята адиабатическая модель атмосферы. Параметры этой модели:

H_2/He	5:1	c_p , Дж/(г·К)	10.73
g , см/с	2450	L_1 , Дж/г	2500.6
T_0 , К	300	L_2 , Дж/г	1373.5
P_0 , Па	10^6	μ	2.33
γ_a , К/км	2.25		

Здесь H_2/He — отношение основных газовых составляющих атмосферы Юпитера. Расшифровка остальных параметров стандартная (дана в тексте статьи).

Динамические и микрофизические факторы варьировались. Так, для коэффициента турбулентности k задавались значения от 10^5 до

10^7 см²/с, а для скорости вертикального движения ω соответственно от 20 до 30 см/с. Содержания конденсирующихся компонентов (в нашем случае — водяной и аммиачный пар) изменялись от 10^{-4} до 10^{-3} для водяного пара и задавались постоянными (10^{-3}) для аммиачного. Что касается концентрации ядер конденсации N_{m1} и N_{m2} , а также параметров N_s и k_s , входящих в формулы (7) и (8), то на данном этапе для

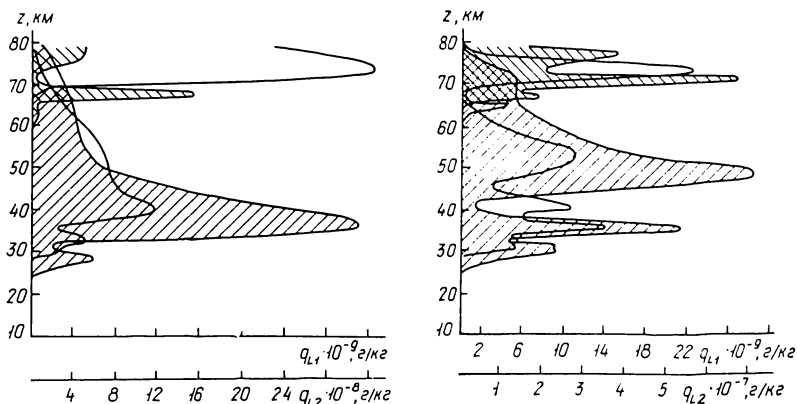


Рис. 1. Распределение водности q_{L1} и аммиачности q_{L2} на 30-м и 50-м (заштрихованная область) часах развития облачности. Параметры модели: $\omega=30$ см/с; $k=5 \times 10^6$ см²/с; $x_1=10^{-4}$; $x_2=10^{-3}$. Верхние кривые — аммиачные облака, нижние — водные

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но при $\omega=30$ см/с, $k=10^5$ см²/с, $x_1=10^{-4}$, $x_2=10^{-3}$

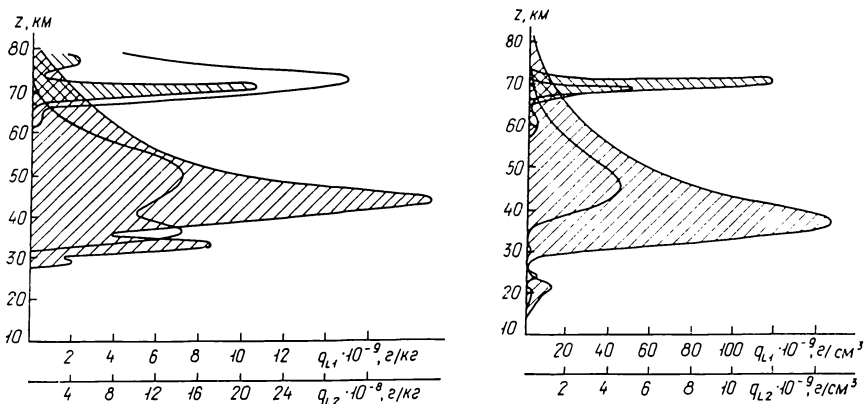


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, но при $\omega=20$ см/с; $k=5 \cdot 10^6$ см²/с, $x_1=10^{-4}$, $x_2=10^{-3}$

Рис. 4. То же, что и на рис. 1, но при $\omega=20$ см/с, $k=10^7$ см²/с, $x_1=10^{-3}$, $x_2=10^{-3}$

них выбирались фиксированные значения ($N_{m1}=N_{m2}=5 \cdot 10^3$ см⁻³, $N_s=270$ см⁻³, $k_s=2$). Последнее связано с тем, что цель данной статьи — описать метод и показать его возможности для контрольных расчетов. Полный же анализ, связанный с поиском зависимости рассчитываемых параметров облачности от вариаций всех основных факторов, — предмет дальнейших исследований.

Наши результаты приведены в виде вертикальных распределений основных облачных характеристик и их эволюции со временем.

Из рисунков 1, 2 видно, что водность q_{L1} в обоих случаях со временем увеличивается, тогда как аммиачность q_{L2} при малых значениях k увеличивается, а при больших — уменьшается. Характерно также то, что увеличение коэффициента турбулентной диффузии приводит к большей однородности водных и аммиачных облаков. Это можно, по-види-

тому, объяснить тем, что интенсивное перемешивание, вызванное увеличением турбулентности, приводит к более равномерному (однородному) распределению конденсирующихся компонентов с высотой. Что касается скорости вертикального подъема, то ее вариации при постоянном коэффициенте турбулентности не приводят к качественному изменению общей картины эволюции облаков. Так, из сравнения рисунков 1 и 3 (они отличаются только значением ω) видно, что в принципе они подобны и различаются только по величине водности и аммиачности. Эти два параметра облаков увеличиваются с увеличением ω . Сравнение

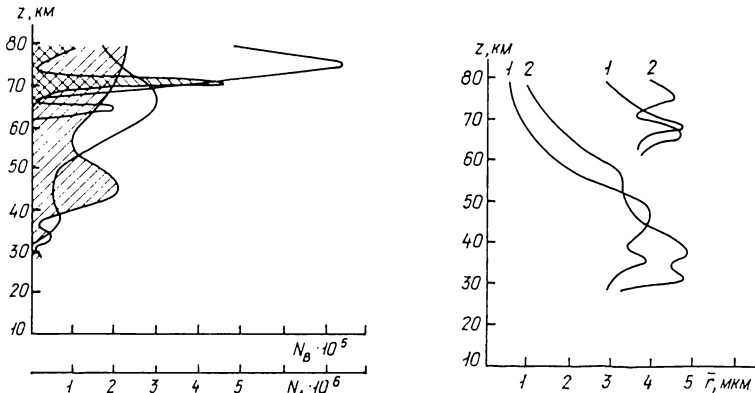


Рис. 5. Ход концентрации облачных частиц с высотой для модели, изображенной на рис. 1. Заштрихованная область относится к 50-му часу развития

Рис. 6. Изменение среднего размера частиц на 30-м (1) и 50-м (2) часах развития облачности. Параметры модели те же, что и на рис. 1

рисунков 1, 3 и 4 показывает, что турбулентное перемешивание достаточно сложно влияет на эволюцию облачности, особенно аммиачной. При этом, однако, вывод о большей однородности облаков в условиях повышенной турбулентности сохраняется. Так, если на рис. 2 при $k = 10^5$ см²/с четко прослеживается несколько водных и аммиачных слоев, то при увеличении k на два порядка (рис. 4) получаем фактически только два выраженных слоя облачности.

Таким образом, можно утверждать, что увеличение скорости вертикального переноса и турбулентного перемешивания приводит к количественному увеличению сконденсированной фазы компонентов и к более однородному распределению ее с высотой. Особо следует изучить характер совместного влияния ω и k на формирование и эволюцию облачности.

В заключение рассмотрим изменение микрофизических параметров облачности на примере одной из моделей. На рис. 5 даны кривые хода концентрации облачных частиц, а на рис. 6 — их средний размер. Параметры модели и моменты времени те же, что и на рис. 3. Из рис. 5 видно, что концентрация частиц при переходе от 30-го часа эволюции к 50-му претерпевает существенные изменения. Так, если основной максимум для водных частиц на 30-м часе находился в верхних слоях облака на высотах порядка 65—70 км, то к 50-му часу он сместился в нижнюю часть облака на высоту примерно 45 км. Кроме того, увеличилось число частиц на самой верхней границе облака. В аммиачном облаке наблюдается примерно то же самое, т. е. максимум концентрации смещается к нижней границе облака, с одновременным появлением вторичного максимума в верхних частях облачности.

Что касается среднего радиуса частиц, то для водного облака размеры монотонно уменьшаются с высотой, при этом испытывают некоторые колебания вблизи нижней (основной) части облака. Для аммиачных капель в начальный момент эволюции облака характерно моно-

тонное уменьшение среднего радиуса частиц, переходящее в дальнейшем (к 50-му часу) к весьма нерегулярным колебаниям по всей толще облака. Это прослеживается во всех рассчитанных моделях.

Наконец, сравнение рисунков 5 и 6 дает четкую корреляцию между концентрацией частиц и их средним радиусом. Уменьшение размеров капель приводит к увеличению концентрации. При этом взаимосвязь прослеживается на всех уровнях облачности (водной и аммиачной).

В заключение необходимо отметить следующий важный момент. В процессе возникновения и дальнейшей эволюции облачных слоев происходит взаимопроникновение облаков разной химической природы, что, по-видимому, должно привести к взаимодействию облачных частиц в зоне перекрытия с образованием в ней области с частицами, состоящими из растворов той или иной концентрации. При этом дальнейшее увеличение подобных частиц будет определяться не только содержанием компонентов, но и упругостью насыщения над каплей раствора, которая в свою очередь будет зависеть от концентрации растворенного вещества. С другой стороны, в зоне перекрытия облаков удельные содержания сконденсированных фаз различаются в большинстве случаев (исключение составляет модель, приведенная на рис. 4, с заведомо завышенным начальным содержанием водяных паров, $x_1=10^{-3}$) более чем на порядок по водности или по аммиачности. Кроме того, пространственная плотность капель обоих видов в этой области сравнительно невелика (10^5-10^6 см⁻³ при среднем радиусе порядка единиц микрометров). Оба эти фактора, вероятно, будут способствовать возникновению частиц с очень малой концентрацией растворов (в принципе они могут быть бесконечно разбавленными). Если это так, то дополнительное усложнение исходной системы уравнений за счет учета взаиморастворимости вряд ли будет целесообразным. В противном же случае подобный неучет может исказить результаты моделирования, особенно в зоне перекрытия облачности.

В обоих случаях следует провести дополнительные исследования, связанные с эффектом взаиморастворимости, в частности для Юпитера, поскольку у других планет-гигантов облачные слои не перекрываются [3, 5].

1. Буйков М. В., Ибрагимов К. Ю., Пирнач А. М., Сорокина Л. П. Исследование двухфазных слоистообразных облаков в атмосфере Юпитера // Астрон. журн.— 1976.— 53, вып. 3.— С. 596—602.
2. Буйков М. В., Ибрагимов К. Ю., Пирнач А. М., Сорокина Л. П. О моделировании слоистообразных облачных образований на Юпитере // Письма в Астрон. журн.— 1976.— 2, № 3.— С. 166—170.
3. Ибрагимов К. Ю., Кириенко Г. А., Солодовник А. А. О формировании многоярусной слоистообразной облачности в атмосфере Сатурна.— Алма-Ата, 1984.— 33 с.— (Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5914-84 Деп.).
4. Ибрагимов К. Ю., Кириенко Г. А., Солодовник А. А. Моделирование многослойной облачности в атмосфере Юпитера // Астрон. вестн.— 1986.— 20, № 3.— С. 228—234.
5. Ибрагимов К. Ю., Кириенко Г. А., Солодовник А. А. Моделирование облачности в атмосферах Урана и Нептуна // Астрон. циркуляр.— 1986.— № 1445.— С. 6—8.
6. Ибрагимов К. Ю., Солодовник А. А. Моделирование двухфазных слоистообразных облаков при наличии двух конденсатов в атмосфере Юпитера // Письма в Астрон. журн.— 1983.— 9, № 11.— С. 686—690.
7. Марчук Г. И. Численные методы прогноза погоды.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.— 356 с.
8. Пирнач А. М. О некоторых особенностях численного решения уравнений, описывающих конденсационный (сублимационный) рост частиц в смешанном облаке // Физика облаков и активных воздействий.— М.: Гидрометеиздат, 1980.— С. 15—25.— (Тр. Укр. регион. НИИ Гидромет СССР; Т. 178).
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.— 415 с.