

УДК 52—657.523.61

Перенос излучения в сферической кометной атмосфере

Ю. В. Александров

Методом Соболева получено приближенное решение уравнения переноса излучения в сферической атмосфере с ортотропным ядром и степенным законом распределения плотности в атмосфере, освещенной плоскопараллельным потоком излучения. Это решение можно использовать для расчета фотометрических характеристик комет в тех случаях, когда необходим учет многократно рассеянного излучения.

TRANSFER OF RADIATION IN SPHERICAL COMETARY ATMOSPHERE, by Alexandrov Yu. V.—The approximate solution of transfer of radiation equation in the spherical atmosphere with an orthotropic nucleus and power law of optical density distribution in the atmosphere illuminated by the plane-parallel flux of radiation was obtained by Sobolev's method. The solution can be used to estimate cometary photometric characteristics in the cases when multiple scattering of light is taken into account.

В средних (а тем более в максимальных) моделях кометы Галлея [8, 9], построенных в период подготовки к ее исследованию с помощью космических аппаратов, принималось, что оптическая толщина ее атмосферы $\tau_0 \gg 1$. Это подтверждается предварительными результатами экспериментов на КА «Вега». Анализ данных [1, 4, 6] о пылевой составляющей приводит к оценкам числа пылевых частиц в единичном столбе атмосферы $(1-4) \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ при кубическом законе распределения плотности вдоль радиуса. При преобладании достаточно крупных частиц с фактором ослабления $C \approx 2$ значения $\tau_0 \gg 1$. В этом случае необходим учет многократного рассеяния излучения, что при расчетах фотометрических характеристик комет обычно не делается [2, 5]. Предлагаем метод расчета интенсивности излучения в сферической атмосфере при степенном законе радиального распределения плотности, характерного для комет. Задача решается методом В. В. Соболева [7], т. е. рассеяния высших порядков учитываются согласно двучленной индикатрисе вида

$$\chi(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma \quad (1)$$

при произвольном альbedo однократного рассеяния λ и ортотропной поверхности ядра с радиусом r_0 и альbedo a . Значения x_1 и λ вдоль радиуса постоянны. В общем случае интенсивность излучения \mathcal{J} зависит (рисунки) от радиального расстояния r , угла фазы ψ , зенитного расстояния ϑ , азимута φ и определяется уравнением

$$\frac{d\mathcal{J}}{ds} = \alpha(r)(B - \mathcal{J}), \quad (2)$$

где оператор производной по s есть

$$\frac{d\mathcal{J}}{ds} = \cos \theta \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg } \psi \sin \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi}. \quad (3)$$

Функция источников B в случае индикатрисы рассеяния (1) выражается через среднюю по направлениям интенсивность $J(r, \psi)$ и ее про-

изводные по r и ψ , а сама величина J определяется уравнением [7]:

$$\nabla^2 J - \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} J_r = \alpha^2 [k^2 J - f(r, \psi)], \quad (4)$$

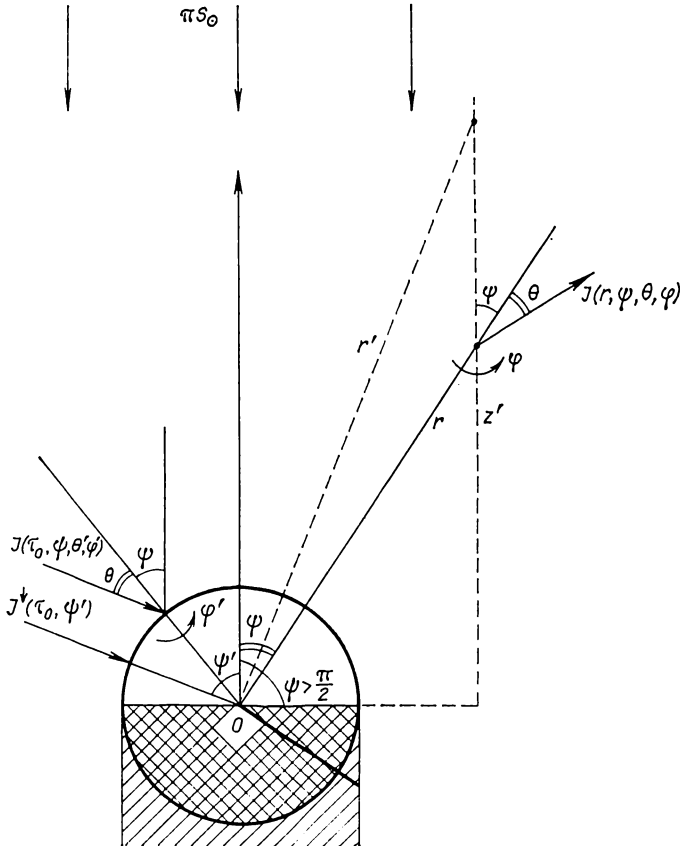
где коэффициент диффузии квантов

$$k = \sqrt{(1 - \lambda)(3 - \lambda x_1)}, \quad (5)$$

а функция

$$f(r, \psi) = 0.25 \lambda S_\odot [3 + (1 - \lambda) x_1] \exp[-T(r, \psi)]. \quad (6)$$

Коэффициент ослабления $\alpha(r)$ может быть представлен в виде $\alpha(r) = (n - 1) \tau_0 (r_0/r)^n$. Полагаем в дальнейшем радиус ядра r_0 равным 1, как и ве-



Геометрия рассеяния света в атмосфере

личину S_\odot , которая определяет поток πS_\odot солнечных лучей, освещающих атмосферу. Оптический путь солнечных лучей до точки (r, ψ) равен (согласно рисунку)

$$T(r, \psi) = \int_{r \cos \psi}^{\infty} \alpha(r') dz' = \int_{r \cos \psi}^{\infty} \alpha(r^2 \sin^2 \psi + z'^2)^{1/2} dz'. \quad (7)$$

При целочисленном n интеграл (7) можно найти в конечном виде и представить оптический путь как

$$T(r, \psi) = \tau_0 F_n(\psi) / r^{n-1}. \quad (8)$$

При этом, в частности,

$$F_2 = \frac{\psi}{\sin \psi}, \quad F_3 = \frac{2(1 - \cos \psi)}{\sin^2 \psi},$$

$$F_4 = \frac{3(\psi - \sin \psi \cos \psi)}{2 \sin^3 \psi}, \quad F_5 = \frac{4(2 - 3 \cos \psi + \cos^3 \psi)}{3 \sin^4 \psi}. \quad (9)$$

Если искать решение для средней интенсивности J в виде ряда по полиномам Лежандра $J(r, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} J_l(r) P_l(\cos \psi)$, то для коэффициентов J_l получим уравнение

$$J_l'' + \frac{2+n}{r} J_l' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \alpha^2 \right] J = -A \alpha^2 S_l^{(0)}(r), \quad (10)$$

где

$$A = \frac{\lambda}{4} [3 + (1 - \lambda) x_1],$$

$$S_l^{(0)}(r) = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\Psi} \exp[-T(r, \psi)] P_l(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (11)$$

Верхний предел интегрирования

$$\Psi = \pi/2 + \arccos(1/r) \quad (12)$$

определяется попаданием точки (r, ψ) на границу тени (рисунок). Введем оптическую глубину атмосферы τ , которая, как следует из (9) при $\psi=0$, равна

$$\tau = \tau_0/r^{n-1}, \quad (13)$$

и перейдем в уравнении (12) от независимой переменной r к переменной τ . Получим, учитывая (6) и (13), следующее уравнение для $J_l(\tau)$:

$$J_l'' - \frac{2}{(n-1)\tau} J_l' - \left[\frac{l(l+1)}{(n-1)^2 \tau^2} + k^2 \right] J = -A S_l^{(0)}(\tau). \quad (14)$$

Общее решение этого уравнения в однородном случае имеет вид [3]:

$$\tau^\mu [C_l^{(1)} I_\nu(k\tau) + C_l^{(2)} I_{-\nu}(k\tau)], \quad (15)$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя, а

$$\mu = \frac{n+1}{2(n-1)}; \quad \nu = \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 4l(l+1)}}{2(n-1)}. \quad (16)$$

При $k=0$ ($\lambda=1$) решение упрощается и приобретает вид

$$\tau^\mu (C_l^{(1)} \tau^\nu + C_l^{(2)} \tau^{-\nu}). \quad (17)$$

Учитывая, что вронскиан функций $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$

$$W = -(2 \sin \nu\pi)/(\pi x), \quad (18)$$

находим ограниченное при $\tau=0$ решение неоднородного уравнения (14):

$$J_l(\tau) = \tau^\mu \left\{ C_l I_\nu(k\tau) + \frac{\pi A}{2 \sin \nu\pi} \left[I_\nu(k\tau) \int_\tau^{\tau_0} \tau'^{1-\mu} I_{-\nu}(k\tau') S_l^{(0)}(\tau') d\tau' + \right. \right.$$

$$\left. + I_{-\nu}(k\tau) \int_0^\tau \tau'^{1-\mu} I_\nu(k\tau') S_l^{(0)}(\tau') d\tau' \right\}, \quad \lambda < 1; \quad (19)$$

$$J_l(\tau) = \tau^\mu \left\{ C_l \tau^\nu + \frac{A}{2\nu} \left[\tau^\nu \int_\tau^{\tau_0} \tau'^{1-\mu-\nu} S_l^{(0)}(\tau') d\tau' + \right. \right.$$

$$\left. + \tau^{-\nu} \int_0^\tau \tau'^{1-\mu+\nu} S_l^{(0)}(\tau') d\tau' \right\}, \quad \lambda = 1. \quad (20)$$

Используя два первых члена разложения функций $I_{\pm\nu}$ в степенной ряд, получим следующее асимптотическое выражение для $J_l(\tau)$ при $\lambda \rightarrow 1$:

$$J_l(\tau) = \tau^\mu \left\{ C_l \tau^\nu \left(1 + \frac{k^2 \tau^2}{4(1+\nu)} \right) + \frac{A}{2\nu} \left[\tau^\nu \int_{\tau}^{\tau_0} \tau'^{1-\mu-\nu} \left(1 - \frac{(\nu+1)\tau'^2 + (\nu-1)\tau^2}{4(\nu^2-1)} k^2 \right) S_l^{(0)}(\tau') d\tau' + \tau^{-\nu} \int_0^{\tau} \tau'^{1-\mu+\nu} \left(1 - \frac{(\nu+1)\tau'^2 - (\nu-1)\tau^2}{4(\nu^2-1)} k^2 \right) S_l^{(0)}(\tau') d\tau' \right] \right\}. \quad (21)$$

Необходимо отметить, что асимптотика (21) содержит члены порядка $1-\lambda$, а не $\sqrt{1-\lambda}$, как в случае плоской атмосферы. Следует также отметить, что в случае $n=3$ и $l=0$ величина $\nu=1$, и независимыми частными решениями однородного уравнения будут не функции $\tau^\mu I_{\pm\nu}$, а $\tau^\mu I_\nu$ и $\tau^\mu K_\nu$, соответственно изменится в этом случае и выражение (19).

Постоянные C_l в формулах (19)–(21) определяются из граничного условия на поверхности ядра [7], которое после разложения в ряд Лежандра дает

$$J_l(\tau_0) + 2H_l(\tau_0) = a [J_l(\tau_0) - 2H_l(\tau_0) + S_l^{(1)}(\tau_0)]. \quad (22)$$

Здесь коэффициенты Лежандра для освещенности прямым солнечным излучением перпендикулярной радиусу площадки

$$S_l^{(1)}(\tau) = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\psi} \exp[-T(\tau, \psi)] P_l(\cos \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi, \quad (23)$$

а коэффициенты Лежандра для потока излучения

$$H_l = (J'_l - 0.25\lambda x_1 S_l^{(1)}) / (3 - \lambda x_1). \quad (24)$$

Если среднюю интенсивность представить в виде

$$J_l = C_l R_l + Q_l, \quad (25)$$

то

$$C_l = \frac{\left(a + \frac{\lambda x_1 (1+a)}{2(3-\lambda x_1)} \right) S_l^{(0)}(\tau_0) - \left[(1-a) Q_l(\tau_0) + \frac{2(1+a)}{3-\lambda x_1} Q'_l(\tau_0) \right]}{(1-a) R_l(\tau_0) + \frac{2(1+a)}{3-\lambda x_1} R'_l(\tau_0)}. \quad (26)$$

Теперь можно записать выражение для функции источников и затем для нахождения интенсивности в произвольном направлении каким-либо образом решать четырехмерное уравнение в частных производных (2) с учетом (3). Если ограничиться лишь плоскостью экватора интенсивности, то решение может быть найдено в квадратурах. В этом случае, согласно [7],

$$B = \lambda [J + x_1 H \cos \theta + x_1 G \sin \theta + 0.25(1 + \cos \gamma) \exp(-T)], \quad (27)$$

где

$$H = \frac{1}{3-\lambda x_1} \left[\frac{\partial J}{\partial \tau} - \cos \psi \exp(-T) \right], \quad (28)$$

$$G = \frac{1}{3-\lambda x_1} \left[\frac{1}{(n-1)\tau} \frac{\partial J}{\partial \psi} + \sin \psi \exp(-T) \right].$$

Интенсивность излучения в направлении, не пересекающем ядра, можно теперь записать как формальное решение уравнения (2):

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau(s), \theta, \psi) \exp[-(T(s, \theta) - T(s_0, \theta_0))] \alpha(s) ds, \quad (29)$$

где s_0 и θ_0 определяют положение наблюдателя. Если линия визирования определяется ее расстоянием от центра ρ и углом фазы $\beta = \pi - \gamma$, то переходя от переменной интегрирования s к переменной θ с учетом того, что $s = \rho \operatorname{ctg} \theta$ и $r = \rho \operatorname{cosec} \theta$, получим

$$\mathcal{I}(\rho, \beta, \theta_0) = \frac{(n-1)\tau_0}{\rho^n} \int_{\theta_0}^{\pi} B\left(\frac{\tau_0 \sin^{n-1} \theta}{\rho^{n-1}}, \theta, \psi\right) \exp\left\{-\frac{\tau_0}{\rho^{n-1}}[\sin^{n-1} \psi \cdot F_n(\psi) - \sin^{n-1} \psi_0 \cdot F_n(\psi_0)]\right\} \sin^{n-2} \theta d\theta, \quad (30)$$

причем $\psi = |\beta - \theta|$.

Если наблюдение ведется с расстояния гораздо большего, чем размер головы кометы, то (30) дает распределение яркости вдоль экватора интенсивности для значений $\rho > 1$, при этом $\theta_0 = 0$. При рассмотрении радиального направления ($\theta = 0$ или π) уравнение (2) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\cos \theta \frac{d\mathcal{I}_l}{d\tau} = \mathcal{I}_l - B_l, \quad (31)$$

где коэффициенты Лежандра для функции источников

$$B_l = \lambda [J + x_1 H_l \cos \theta + 0.25 (S_l^{(0)} - x_1 S_l^{(1)} \cos \theta)]. \quad (32)$$

Для коэффициентов Лежандра интенсивности нисходящего излучения $\mathcal{I}_l^\dagger(\tau)$ из уравнения (31) при $\theta = \pi$ и граничном условии $\mathcal{I}_l^\dagger(0) = 0$ получим, что

$$\mathcal{I}_l^\dagger(\tau) = \int_0^\tau B_l(\tau') \exp(\tau' - \tau) d\tau'. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражение (32) с учетом (24) и интегрируя по частям слагаемое, содержащее производную J'_l , найдем, что

$$\mathcal{I}_l^\dagger(\tau) = \frac{\lambda}{3 - \lambda x_1} \left\{ \int_0^\tau \left[(3 + (1 - \lambda) x_1) J_l(\tau') + \frac{3x_1}{4} S_l^{(1)}(\tau') + \frac{3 - \lambda x_1}{4} S_l^{(0)}(\tau') \right] \exp(\tau' - \tau) d\tau' - x_1 J_l(\tau) \right\}. \quad (34)$$

Чтобы получить граничное условие для восходящего излучения $\mathcal{I}^\dagger(\tau_0)$, нужно знать величину $\mathcal{I}^\dagger(\tau_0, \psi, \theta', \varphi')$ (см. рисунок). Однако в силу малости ядра (оно в 10^{-7} — 10^{-4} раз меньше атмосферы кометы) интенсивность на поверхности ядра в направлении (θ', φ') можно заменить интенсивностью в параллельном ему радиальном направлении $\mathcal{I}^\dagger(\tau_0, \psi', \pi, 0)$. При этом следует учесть, что различие между этими интенсивностями увеличивается с увеличением угла падения θ' , но вклад в освещенность поверхности ядра уменьшается пропорционально $\cos \theta'$. Тогда интенсивность отраженного излучения (с учетом падающего прямого солнечного)

$$\mathcal{I}^\dagger(\tau_0) = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^\pi \int_{2\pi} \mathcal{I}_l^\dagger(\tau_0) P_l(\cos \psi') \cos \theta' d\omega' + \pi S_l^{(1)}(\tau_0) P_l(\cos \psi) \right]. \quad (35)$$

Используя теорему сложения для полиномов Лежандра и интегрируя (35) почленно, получим, что

$$\mathcal{F}_{2m}^\dagger(\tau_0) = a \left[\frac{(-1)^{m+1} (2m)! \mathcal{F}_{2m}^\dagger(\tau_0)}{2^{2m} (2m-1)! (m+1)!} + S_{2m}^{(1)}(\tau_0) \right], \quad (36)$$

$$\mathcal{F}_1^\dagger(\tau_0) = a \left[\frac{2}{3} \mathcal{F}_1^\dagger(\tau_0) + S_1^{(1)}(\tau_0) \right]; \quad \mathcal{F}_{2m+1}^\dagger(\tau_0) = a S_{2m+1}^{(1)}(\tau_0).$$

Решая уравнение (31) при $\theta = 0$ и граничном условии (36), получаем

$$\mathcal{F}_l^\dagger(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} B_l(\tau') \exp(\tau - \tau') d\tau' + \exp(\tau - \tau_0) \mathcal{F}_l^\dagger(\tau_0). \quad (37)$$

Подставляя (24) и (32) в (37), найдем коэффициенты Лежандра интенсивности восходящего излучения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l^\dagger(\tau) = & \frac{\lambda}{3 - \lambda x_1} \left\{ \int_{\tau}^{\tau_0} \left[(3 + (1 + \lambda) x_1) J_l(\tau') - \frac{3}{4} x_1 S_l^{(1)}(\tau') + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3 - \lambda x_1}{4} S_l^{(0)}(\tau') \right] \exp(\tau - \tau') d\tau' + x_1 [J_l(\tau_0) \exp(\tau - \tau_0) - J_l(\tau)] \right\} + \\ & + \exp(\tau - \tau_0) \mathcal{F}_l^\dagger(\tau_0). \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что выражения (35) и (36), взятые без множителя a/π , дают освещенность ядра рассеянным в атмосфере излучением. Освещенность ядра прямым солнечным излучением равна, очевидно, величине $\text{лехр}(-\tau_0 F_n(\psi))$. Сравнение (34) с (30) при $\rho = 1$ позволяет оценить контраст «ядро — атмосфера».

Интегрируя (35) по поверхности ядра и заменяя a/π на $1 - a$, получаем количество поглощенной ядром энергии

$$E = 4\pi(1 - a) [\mathcal{F}_0^\dagger(\tau_0) + \pi S_0^{(1)}(\tau_0)] r_0^2. \quad (39)$$

Окончательно значения интенсивностей нисходящего и восходящего излучения равны

$$\mathcal{F}^{\dagger\dagger}(\tau, \psi) = \sum_{l=0}^L \mathcal{F}_l^{\dagger\dagger} P_l(\cos \psi) + \Delta \mathcal{F}_l^{\dagger\dagger}(\tau, \psi), \quad (40)$$

Значения первых шести коэффициентов разложений для интенсивностей

τ_0	l	$a=0.1$		$a=1.0$		$S_l^{(1)}(\tau_0)$
		$\mathcal{F}_{\downarrow}(\tau_0)$	$\mathcal{F}_{\uparrow}(0)$	$\mathcal{F}_{\downarrow}(\tau_0)$	$\mathcal{F}_{\downarrow}(0)$	
0.5	0	0.064	0.076	0.068	0.193	0.142
	1	0.094	-0.031	0.101	0.168	0.289
	2	0.011	-0.032	0.014	0.080	0.194
	3	-0.009	0.025	-0.009	0.035	0.018
	4	0.005	-0.014	0.005	-0.040	-0.047
1.0	5	-0.001	0.005	-0.001	0.002	-0.006
	0	0.085	0.096	0.089	0.158	0.080
	1	0.119	-0.052	0.125	0.039	0.167
	2	0.022	-0.054	0.025	-0.010	0.119
	3	-0.010	0.027	-0.009	0.034	0.021
3.0	4	0.004	-0.013	0.003	-0.021	-0.022
	5	0.000	0.007	-0.001	0.005	-0.006
	0	0.092	0.127	0.101	0.138	0.008
	1	0.087	-0.051	0.091	-0.044	0.019
	2	0.021	-0.066	0.022	-0.064	0.016
	3	-0.001	0.024	0.001	0.024	0.007
	4	0.000	-0.012	0.000	-0.012	0.000
	5	0.000	0.007	0.000	0.007	-0.001

где разность интенсивностей, обусловленных рассеянием первого порядка согласно точной индикатрисе $\chi(\psi)$ и индикатрисе (1), есть

$$\Delta \mathcal{I}_1^\dagger = \frac{\lambda}{4} [\chi(\pi - \psi) - 1 + x_1 \cos \psi] \frac{\exp(-\tau) - \exp[-\tau F_n(\psi)]}{F_n(\psi) - 1} \quad (41)$$

и

$$\Delta \mathcal{I}_1^\dagger = \frac{\lambda}{4} [\chi(\psi) - 1 - x_1 \cos \psi] \frac{1 - \exp[-\tau(F_n(\psi) + 1)]}{F_n(\psi) + 1}. \quad (42)$$

При этом нужно учесть, что при $\psi > \pi/2$ величина τ изменяется от 0 до τ^* на границе тени от ядра, где $\tau^* = \tau_0 \sin^{n-1} \psi$, как следует из рисунка и формулы (16).

В заключение приведены значения первых шести коэффициентов $\mathcal{I}^\dagger(\tau_0)$, $\mathcal{I}_1^\dagger(0)$ для трех значений оптической толщины атмосферы τ_0 , двух значений альbedo поверхности ядра a , значений степени вытянутости индикатрисы рассеяния $x_1 = 1$ и альbedo однократного рассеяния $\lambda = 1$ (таблица).

Сравнение точных значений освещенности на поверхности ядра с вычисленным по данным последней графы таблицы показывает, что при $l \leq 5$ можно ожидать погрешности не более 5%, причем точность увеличивается с увеличением τ_0 .

1. Вайсберг О. Л., Смирнов В. Н., Горн Л. С. и др. Структура пылевой оболочки кометы Галлея (детектор СП-1 на КА «Вега») // Письма в Астрон. журн.— 1986.—12, № 8.— С. 631—638.
2. Драневич В. А. Исследование «векторной» модели кометных атмосфер // Там же.— 1984.—10, № 9.— С. 710—715.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.—576 с.
4. Мазец Е. П., Аптекарь Р. Л., Голенецкий С. В. Изучение пыли в комете Галлея со станции «Вега»: предварительные результаты эксперимента СП-2 // Письма в Астрон. журн.— 1986.—12, № 8.— С. 624—630.
5. Мохнач Д. С. Распределение видимой плотности в голове кометы и его влияние на определение элементов орбиты // Бюл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР.— 1956.— 6, № 5.— С. 269—311.
6. Симпсон Дж. А., Сагдеев Р. З., Туззолино Э. Д. и др. Пылевая кома кометы Галлея: измерения с помощью счетчика и масс-анализатора пыли ДУСМА // Письма в Астрон. журн.— 1986.—12, № 8.— С. 639—646.
7. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.—335 с.
8. Hellmich R., Keller H. U. On the visibility of nuclei of dusty comets // Icarus.— 1981.—47, N 3.— P. 321—332.
9. Newburn R. L. Physical models of comet Halley based upon dualitative data from the 1910 apparation.// The comet Halley micrometeoroid hazard.— ESA,1979.— P. 35—50.

Астрон. обсерватория
Харьков. ун-та им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 06.02.87,
после доработки 28.09.87

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 523.24:521.1/3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОЗМУЩАЕМОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ТЕЙЛОРА / Заусаев А. Ф.

(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 8028-В87)

Предлагается метод разложения в ряд Тейлора для интегрирования уравнений движения возмущаемого тела. Производные вычисляются непосредственно от правых частей уравнений движения. Проведено интегрирование уравнений движения больших планет. Полученные результаты сопоставлены с результатами других исследований.