

УДК 52—64

Перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц.

Общая теория. «Рэлеевское» рассеяние

М. И. Мищенко, Э. Г. Яновский

Изучается перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц (бесконечных цилиндров). Предполагается, что внешнее линейно поляризованное излучение падает перпендикулярно осям частиц. Для нахождения поля излучения в полубесконечной однородной среде применяется метод Соболева. Приводятся результаты численных расчетов для случая очень тонких цилиндров («рэлеевское» рассеяние), которые сравниваются с соответствующими данными для чисто газовой планетной атмосферы.

POLARIZED LIGHT TRANSFER IN A MEDIUM CONTAINING PERFECTLY ORIENTED ELONGATE PARTICLES. GENERAL THEORY. «RAYLEIGH» SCATTERING, by Mishchenko M. I., Yanovitskij E. G.—Transfer of polarized light is studied in a plane parallel medium containing perfectly oriented elongate particles (infinite cylinders). External linearly polarized radiation is assumed to fall perpendicularly to the direction of particles orientation. The Sobolev method is applied in order to determine polarized radiation field in a semi-infinite homogeneous medium. Numerical results are represented for the case of very thin cylinders («Rayleigh» scattering) which are compared with corresponding results for purely gaseous planetary atmosphere.

В работе [4] показано, что векторное уравнение переноса излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц (бесконечных цилиндров), при падении внешнего линейно поляризованного излучения перпендикулярно направлению ориентации частиц расщепляется на два независимых двумерных скалярных уравнения переноса. Эти уравнения для плоскопараллельной среды имеют вид

$$\cos \theta \frac{dI_j(\tau_j, \theta, \theta_0)}{d\tau_j} = -I_j(\tau_j, \theta, \theta_0) + B_j(\tau_j, \theta, \theta_0), \quad j = l, r, \quad (1)$$

причем индексы l и r соответствуют компонентам излучения, поляризованному параллельно и перпендикулярно осям частиц. Границы среды считаются параллельными направлению ориентации частиц. Угол $\theta \in [-\pi, \pi]$ характеризует направление распространения рассеянного излучения. Внешнее излучение падает под углом $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. Углы θ и θ_0 отсчитываются от внутренней нормали к границе среды; отсчет против часовой стрелки соответствует положительному значению угла (рис. 1, плоскость которого перпендикулярна направлению ориентации частиц).

Настоящая работа — продолжение [4]. В ней рассматривается применение метода В. В. Соболева [6, гл. V] к решению уравнений (1) в случае полубесконечной однородной атмосферы. Подробно изучается случай «рэлеевского» рассеяния, которому соответствует условие $d \ll \tilde{\lambda}$ (d — диаметр частиц, $\tilde{\lambda}$ — длина волны света), и приводятся результаты некоторых численных расчетов.

Ссылки на формулы из работы [4] даются в виде (4. n), где n — номер формулы. Введенные там обозначения, как правило, здесь не поясняются.

Основные соотношения общей теории для полубесконечной атмосферы. В нашей задаче функция источников B_j зависит от двух угловых переменных: $\theta \in [-\pi, \pi]$ и $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. Для простоты будем считать, что $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, поскольку из соображений симметрии оче-

видно, что $I_j(\tau_j, \theta, -\theta_0) = I_j(\tau_j, -\theta, \theta_0)$. Используя метод Соболева [6, гл. V], функцию $B_j(\tau_j, \theta, \theta_0)$ можно выразить через суперпозицию функций, каждая из которых зависит лишь от одной угловой переменной.

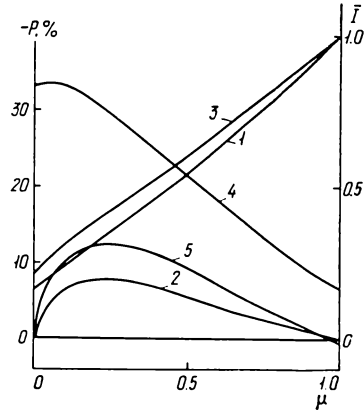
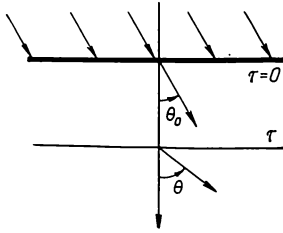


Рис. 1. Координаты в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации частиц

Рис. 2. Относительная интенсивность (ось ординат справа) и степень поляризации выходящего излучения при угле фазы $\alpha=0$ ($\mu=\mu_0$)

Опуская для краткости индекс j и обозначая $\mu_0 = \cos \theta_0$, $\mu_0 \in [0, 1]$, запишем исходное соотношение для функции источников:

$$B(\tau, \theta, \mu_0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \theta', \mu_0) \chi(\theta - \theta') d\theta' + \frac{\lambda}{2} S \chi(\theta - \theta_0) \exp(-\tau/\mu_0). \quad (2)$$

Представляя формулу (4.16) в виде

$$\chi[\cos(\theta - \theta_0)] = 1 + 2 \sum_{k=1}^n x_k [\cos k\theta \cos k\theta_0 + \sin k\theta \sin k\theta_0], \quad (3)$$

вместо (2) получим

$$B(\tau, \theta, \mu_0) = B_0(\tau, \mu_0) + 2 \sum_{k=1}^n x_k [B_k(\tau, \mu_0) \cos k\theta + \tilde{B}_k(\tau, \mu_0) \sin k\theta], \quad (4)$$

где

$$B_k(\tau, \mu_0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \theta', \mu_0) \cos k\theta' d\theta' + \frac{\lambda}{2} S \exp(-\tau/\mu_0) \cos k\theta_0, \quad (5)$$

$$\tilde{B}_k(\tau, \mu_0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \theta', \mu_0) \sin k\theta' d\theta' + \frac{\lambda}{2} S \exp(-\tau/\mu_0) \sin k\theta_0. \quad (6)$$

Обозначив $\mu = \cos \theta$,

$$I_k(\tau, \mu, \mu_0) = \int_0^{\tau} B_k(\tau', \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}, \quad \mu > 0, \quad (7)$$

$$I_k(\tau, \mu, \mu_0) = - \int_{\tau}^{\infty} B_k(\tau', \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}, \quad \mu < 0 \quad (8)$$

(аналогично представляются величины \tilde{I}_k), из (4) получим

$$I(\tau, \theta, \mu_0) = I_0(\tau, \mu, \mu_0) + 2 \sum_{k=1}^n x_k [I_k(\tau, \mu, \mu_0) \cos k\theta + \tilde{I}_k(\tau, \mu, \mu_0) \sin k\theta]. \quad (9)$$

Выполнив преобразования, аналогичные приведенным в [6, гл. V], имеем

$$B_k(\tau, \mu_0) = R_{k0}(\mu_0) D(\tau, \mu_0) + H(\mu_0) \int_0^1 Q_k(\mu_0, \mu) D(\tau, \mu) \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (10)$$

где обозначено $D(0, \mu) = \lambda SH(\mu)/2$,

$$Q_k(\mu_0, \mu) = \sum_{j=1}^n [q_j(\mu_0) + q_{j-2}(\mu_0)] g_{kj}(\mu), \quad (11)$$

а функция $D(\tau, \mu)$ определяется интегральным уравнением

$$D(\tau, \mu) = \int_0^\infty K(|t-\tau|) D(t, \mu) dt + \lambda S \exp(-\tau/\mu)/2, \quad (12)$$

ядро которого

$$K(\tau) = \int_0^1 \Psi_0(\mu) \exp(-\tau/\mu) \frac{d\mu}{\mu \sqrt{1-\mu^2}}. \quad (13)$$

Введенные нами полиномы $R_{kj}(\mu)$ являются аналогами соответствующих полиномов Соболева; определяются они из рекуррентного соотношения

$$R_{k+1,j}(\mu) + R_{k-1,j}(\mu) = (2 - \delta_{k0}) \mu (1 - \lambda x_k) R_{kj}(\mu) \quad (14)$$

и начальных условий $R_{kk}(\mu) = 1$, $R_{kj}(\mu) = 0$ при $k < j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Здесь δ_{kj} — символ Кронекера. Выражение для функций $g_{kj}(\mu)$ имеет вид

$$g_{kj}(\mu) = \Psi_0(\mu) R_{kj}(\mu) - \Psi_j(\mu) R_{k0}(\mu), \quad (15)$$

где

$$\Psi_j(\mu) = \frac{\lambda}{\pi} \left[\delta_{j0} + 2 \sum_{i=1}^n x_i R_{ij}(\mu) T_i(\mu) \right], \quad (16)$$

$T_j(\mu) = \cos [j \arccos \mu]$ — полиномы Чебышева первого рода. Характеристическая функция $\Psi_0(\mu)$, входящая в (13), является полиномом четной степени по μ . Что же касается величин $q_j(\mu_0)$, то они представляют собой полиномы степени n по μ_0 и определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$q_j(\mu_0) = R_{j0}(\mu_0) + \sum_{i=1}^n [q_i(\mu_0) + q_{i-2}(\mu_0)] \int_0^1 \frac{g_{ji}(\mu) H(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}. \quad (17)$$

При этом функция $H(\mu)$ считается известной.

Формулы для нахождения функций $\tilde{B}_k(\tau, \mu_0)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) аналогичны приведенным выше:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k(\tau, \mu_0) = & [R_{k1}(\mu_0) \tilde{D}(\tau, \mu_0) + \\ & + \tilde{H}(\mu_0) \int_0^1 \tilde{Q}_k(\mu_0, \mu) \tilde{D}(\tau, \mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu] \sqrt{1-\mu_0^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{D}(0, \mu) = \lambda SH(\mu)/2$,

$$\tilde{Q}_k(\mu_0, \mu) = \sum_{j=2}^n [\tilde{q}_j(\mu_0) + \tilde{q}_{j-2}(\mu_0)] \tilde{g}_{kj}(\mu), \quad (19)$$

$$\tilde{g}_{kj}(\mu) = \tilde{\Psi}_1(\mu) R_{kj}(\mu) - \tilde{\Psi}_j(\mu) R_{k1}(\mu), \quad (20)$$

$$\tilde{\Psi}_j(\mu) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^n x_i U_{i-1}(\mu) R_{ij}(\mu), \quad (21)$$

$U_{j-1}(\mu) = \sin [j \arccos \mu] / \sqrt{1 - \mu^2}$ — полиномы Чебышева второго рода. Функция $\tilde{D}(\tau, \mu)$ определяется уравнением (12), в котором

$$K(\tau) \equiv \tilde{K}(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Psi}_1(\mu) (1 - \mu^2) \exp(-\tau/\mu) \frac{d\mu}{\mu \sqrt{1 - \mu^2}}, \quad (22)$$

причем $\tilde{\Psi}_1(\mu) (1 - \mu^2)$ также оказывается четным полиномом по μ той же степени, что и $\Psi_0(\mu)$. Благодаря этому теория нахождения величин $\tilde{B}_k(\tau, \mu_0)$ формально ничем не отличается от теории, построенной для $B_k(\tau, \mu_0)$. Наконец, величины $\tilde{q}_j(\mu_0)$ являются полиномами степени $n - 1$ по μ_0 и находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{q}_j(\mu_0) = R_{j1}(\mu_0) + \sum_{i=2}^n [\tilde{q}_i(\mu_0) + \tilde{q}_{i-2}(\mu_0)] \int_0^1 \tilde{g}_{ji}(\mu) \tilde{H}(\mu) \sqrt{1 - \mu^2} d\mu. \quad (23)$$

Определив функции

$$\varphi_k(\mu) = \frac{2}{\lambda S} B_k(0, \mu), \quad \tilde{\varphi}_k(\mu) = \frac{2}{\lambda S} \tilde{B}_k(0, \mu), \quad (24)$$

нетрудно получить следующее выражение для вычисления коэффициента отражения света полубесконечной атмосферой:

$$\rho(\theta, \theta_0) = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\mu + \mu_0} \left\{ \varphi_0(\mu) \varphi_0(\mu_0) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k [\varphi_k(\mu) \varphi_k(\mu_0) \mp \tilde{\varphi}_k(\mu) \tilde{\varphi}_k(\mu_0)] \right\}. \quad (25)$$

Знак « \rightarrow » в (25) берется при $\theta \in [0, \pi/2]$, а знак « $+$ » — при $\theta \in [-\pi/2, 0]$. Функции $\varphi_k(\mu)$ и $\tilde{\varphi}_k(\mu)$ можно найти по формулам

$$\varphi_k(\mu) = q_k(\mu) H(\mu), \quad \tilde{\varphi}_k(\mu) = \tilde{q}_k(\mu) \tilde{H}(\mu) \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (26)$$

В свою очередь, для функций $H(\mu)$ и $\tilde{H}(\mu)$ могут быть получены соответствующие аналоги уравнений Амбарцумяна — Чандрасекара [6, гл. V, § 3]. Именно, функция $H(\mu)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(\mu) = 1 + \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{\Psi_0(\mu') H(\mu') d\mu'}{(\mu + \mu') \sqrt{1 - \mu'^2}}. \quad (27)$$

Поскольку отсюда следует, что

$$\int_0^1 \frac{H(\mu) \Psi_0(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = 1 - \left[1 - 2 \int_0^1 \frac{\Psi_0(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \right]^{1/2}, \quad (28)$$

то уравнению (27) можно придать следующую альтернативную форму:

$$\frac{1}{H(\mu)} = \left[1 - 2 \int_0^1 \frac{\Psi_0(\mu') d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} \right]^{1/2} + \int_0^1 \frac{H(\mu') \Psi_0(\mu') \mu' d\mu'}{(\mu + \mu') \sqrt{1-\mu'^2}}. \quad (29)$$

Имеет место также линейное сингулярное уравнение с ядром Коши

$$H(\mu) T(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{\Psi_0(\mu') H(\mu') d\mu'}{(\mu' - \mu) \sqrt{1-\mu'^2}}, \quad (30)$$

где

$$T(\mu) = 1 + \mu \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_0(\mu') d\mu'}{(\mu' - \mu) \sqrt{1-\mu'^2}}. \quad (31)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае в отличие от трехмерной среды функция $T(\mu)$ для $\mu \in [0, 1)$ есть полином по μ такой же степени, как и полином $\Psi_0(\mu)$, поскольку при $\mu \in [0, 1)$ $\int_{-1}^{+1} [(\mu - \mu')(1 - \mu'^2)]^{-1} d\mu' \equiv 0$.

Уравнения для нахождения функции $\tilde{H}(\mu)$ ничем не отличаются от приведенных выше. В последних, как уже отмечалось, достаточно заменить полином $\Psi_0(\mu)$ полиномом $\tilde{\Psi}_1(\mu)(1 - \mu^2)$, в котором функция $\tilde{\Psi}_1(\mu)$ определяется выражением (21).

Таким образом, нахождение функций источника $B_{l,r}(\tau_{l,r}, \theta, \mu_0)$ в общем случае сводится к решению всего четырех интегральных уравнений типа (12), отдельно для функций $D_{l,r}(\tau_{l,r}, \mu)$ и $\tilde{D}_{l,r}(\tau_{l,r}, \mu)$.

Более того, как и в трехмерном скалярном случае [10], функции $I_k(\tau, \mu, \mu_0)$ и $\tilde{I}_k(\tau, \mu, \mu_0)$ могут быть выражены через соответствующие приведенные интенсивности излучения $J(\tau, \mu, \mu_0)$ и $\tilde{J}(\tau, \mu, \mu_0)$. Эти функции непосредственно выражаются через функции $D(\tau, \mu)$ и $\tilde{D}(\tau, \mu)$, заданные только на глубине τ и на верхней границе среды, т. е. какого-либо интегрирования по пространственной координате не требуется.

Итак, формальное отличие рассматриваемой здесь теории от скалярной трехмерной теории рассеяния света в планетных атмосферах [6] состоит лишь в том, что в первом случае основное интегральное уравнение (12)

имеет ядро вида (13), а во втором — вида $K(\tau) = \int_0^1 \Psi(\mu) \exp(-\tau/\mu) d\mu/\mu$,

т. е. не содержит под знаком интеграла в знаменателе величину $\sqrt{1-\mu^2}$.

«Рэлеевское» рассеяние. Применим полученные формулы в простейшем случае «рэлеевского» рассеяния, когда считается, что диаметр цилиндрических частиц намного меньше длины волны света. Как уже отмечалось, рассматриваемая трехмерная векторная задача переноса излучения разбивается на две независимые двумерные скалярные задачи, причем соответствующие индикатрисы рассеяния в нашем случае будут равны [1, гл. 8; 2, гл. 15] $\chi_l(\theta) \equiv 1$, $\chi_r(\theta) = 1 + \cos 2\theta$. Рассмотрим отдельно эти задачи.

1. Индикатриса рассеяния $\chi_l(\theta) = 1$. Опуская для простоты индекс l , имеем $\Psi_0(\mu) = \lambda/\pi$, $B(\tau, \theta, \mu_0) = B_0(\tau, \mu_0) = D(\tau, \mu_0)$,

$$D(\tau, \mu_0) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(|t - \tau|) D(t, \mu_0) dt + \lambda S \exp(-\tau/\mu_0)/2, \quad (32)$$

где

$$K_0(\tau) = \int_0^1 \frac{\exp(-\tau/\mu) d\mu}{\mu \sqrt{1-\mu^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\tau x) dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad (33)$$

— функция Макдональда.

Интересно отметить, что уравнение (32) с ядром (33) — это уравнение береговой рефракции электромагнитных волн, подробно рассмотренное в [3, 7]. К сожалению, причины, по которым две физически разные задачи сводятся к одному и тому же уравнению, нам пока не ясны.

Для коэффициента отражения получаем

$$\rho(\theta, \theta_0) = \lambda H(\mu) H(\mu_0)/[2(\mu + \mu_0)], \quad (34)$$

причем соответствующий аналог уравнения Амбарцумяна для H -функции имеет вид

$$\varphi_0(\mu) = H(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{\pi} \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{(\mu + \mu') \sqrt{1-\mu'^2}}. \quad (35)$$

Для нахождения численных значений функции $H(\mu)$ использовалось уравнение (29), в котором характеристическая функция $\Psi_0(\mu) = \lambda/\pi$. Уравнение решалось методом итераций. Для ускорения сходимости при консервативном, или почти консервативном, рассеянии применялась методика, предложенная в [11]. Результаты расчетов для некоторых значений λ_l приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения функции $H_l(\mu)$

μ	λ_l							
	1.000	0.995	0.975	0.950	0.900	0.800	0.700	0.500
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1912	1.1791	1.1634	1.1512	1.1336	1.1082	1.0885	1.0570
0.2	1.3530	1.3259	1.2922	1.2671	1.2320	1.1835	1.1475	1.0926
0.3	1.5074	1.4627	1.4090	1.3700	1.3169	1.2461	1.1951	1.1202
0.4	1.6582	1.5934	1.5176	1.4640	1.3926	1.3001	1.2354	1.1428
0.5	1.8067	1.7195	1.6200	1.5511	1.4613	1.3478	1.2703	1.1619
0.6	1.9537	1.8418	1.7171	1.6324	1.5241	1.3904	1.3009	1.1783
0.7	2.0997	1.9609	1.8095	1.7088	1.5820	1.4288	1.3281	1.1925
0.8	2.2449	2.0770	1.8979	1.7807	1.6356	1.4636	1.3525	1.2051
0.9	2.3895	2.1905	1.9825	1.8487	1.6855	1.4954	1.3745	1.2162
1.0	2.5337	2.3016	2.0636	1.9132	1.7321	1.5246	1.3945	1.2262

В нашем случае для $\mu \in [0, 1)$ функция $T(\mu) = 1$. Поэтому методом, изложенным в [5, с. 150; 9], можно получить следующее явное выражение для функции $H(\mu)$:

$$H(\mu) = \left[\frac{(1 - k\mu)(1 + \mu)}{(1 + \lambda)(1 + k\mu)} \right]^{1/2} \exp[-\omega(\mu)], \quad (36)$$

где $k^2 = 1 - \lambda^2$,

$$\omega(\mu) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(|\eta - \mu|) d\eta}{(1 - k^2\eta^2) \sqrt{1 - \eta^2}}.$$

В консервативном случае ($\lambda=1$) формула (36) может быть приведена к виду

$$H^0(\cos \theta) = (1 + \cos \theta)^{1/2} \exp \{ [Cl_2(\pi/2 + \theta) + Cl_2(\pi/2 - \theta)]/\pi \}, \quad (37)$$

где $Cl_2(x) = - \int_0^x \ln [2\sin(y/2)] dy$ — интеграл Клаузена. В частности, при $\theta = 0$ имеем $H^0(1) = \sqrt{2} \exp(2G/\pi) = 2.5337 \dots$, где $G = Cl_2(\pi/2) = 0.91597 \dots$ — постоянная Каталана.

2. Индикатриса рассеяния $\chi_r(\theta) = 1 + \cos 2\theta$. В этом случае $x_1=0$, $x_2=1/2$, и вместо (25) имеем (индекс r для простоты опускаем)

$$\rho(\theta, \theta_0) = \lambda [\varphi_0(\mu) \varphi_0(\mu_0) + \varphi_2(\mu) \varphi_2(\mu_0) \mp \tilde{\varphi}_2(\mu) \tilde{\varphi}_2(\mu_0)] / [2(\mu + \mu_0)], \quad (38)$$

причем характеристические функции

$$\Psi_0(\mu) = 2\lambda [1 - (2 - \lambda)\mu^2 + 2(1 - \lambda)\mu^4] / \pi, \quad (39)$$

$$\tilde{\Psi}_1(\mu) = 4\lambda\mu^2 / \pi. \quad (40)$$

Для φ -функций можно получить выражения

$$\varphi_0(\mu) = [1 + q(\mu)(\alpha_0 - 2\alpha_2)/2 + q_1(\mu)(\alpha_1 - 2\alpha_3)] H(\mu), \quad (41)$$

$$\varphi_2(\mu) = [2(1 - \lambda)\mu^2 - 1 + \alpha_0 q(\mu)/2 + \alpha_1 q_1(\mu)] H(\mu), \quad (42)$$

где $q(\mu) = q_0(\mu) + q_2(\mu)$,

$$q(\mu) = \frac{2(1 - \lambda)[\alpha_1 - \alpha_3 + (1 - \alpha_0 + \alpha_2)\mu]\mu}{(1 - \alpha_0 + \alpha_2)^2 + (1 - \lambda)(\alpha_1 - \alpha_3)(2\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad (43)$$

$$q_1(\mu) = \frac{(1 - \lambda)[1 - \alpha_0 + \alpha_2 - (1 - \lambda)(2\alpha_3 - \alpha_1)\mu]}{(1 - \alpha_0 + \alpha_2)^2 + (1 - \lambda)(\alpha_1 - \alpha_3)(2\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad (44)$$

а через α_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) обозначены соответствующие моменты H -функции:

$$\alpha_n = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^1 \frac{H(\mu) \mu^n d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (45)$$

Справедливо также соотношение $\alpha_0 - (2 - \lambda)\alpha_2 + 2(1 - \lambda)\alpha_4 = 1 - [(1 - \lambda)(2 - \lambda)/2]^{1/2}$, вытекающее из (28) и (39).

В консервативном случае ($\lambda=1$) вместо (41) и (42) соответственно получаем

$$\varphi_0^0(\mu) = [1 + (2 - \alpha_0^0)\mu/\alpha_1^0] H^0(\mu); \quad \varphi_2^0(\mu) = (\alpha_0^0\mu/\alpha_1^0 - 1) H^0(\mu), \quad (46)$$

где верхним индексом «0» обозначены величины при $\lambda = 1$. Как можно показать, справедливы равенства $\alpha_0^0 - \alpha_2^0 = 1$, $\alpha_1^0 - \alpha_3^0 = 1/2$, $(\alpha_1^0)^2 - (\alpha_2^0)^2 = 1$.

Наконец,

$$\tilde{\varphi}_2(\mu) = 2\mu\tilde{H}(\mu)\sqrt{1 - \mu^2}. \quad (47)$$

Значения функций $H_r(\mu)$ и $\tilde{H}_r(\mu)$ и соответствующих моментов приведены в таблицах 2 и 3. Они получены путем численного решения уравнения (29), в которое подставлялись соответственно характеристическая функция (39) и полином $\tilde{\Psi}_1(\mu)(1 - \mu^2)$, где $\tilde{\Psi}_1(\mu)$ дается выражением

Таблица 2. Значения функции $H_r(\mu)$ и ее моментов

μ	λ_r							
	1.000	0.995	0.975	0.950	0.900	0.800	0.700	0.500
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.2900	1.2761	1.2562	1.2396	1.2142	1.1755	1.1443	1.0934
0.2	1.5255	1.4935	1.4502	1.4158	1.3653	1.2920	1.2357	1.1484
0.3	1.7480	1.6940	1.6241	1.5705	1.4941	1.3875	1.3085	1.1903
0.4	1.9639	1.8845	1.7851	1.7110	1.6082	1.4695	1.3696	1.2244
0.5	2.1760	2.0676	1.9362	1.8407	1.7113	1.5414	1.4222	1.2530
0.6	2.3856	2.2450	2.0792	1.9616	1.8054	1.6055	1.4683	1.2774
0.7	2.5933	2.4173	2.2152	2.0748	1.8921	1.6633	1.5092	1.2987
0.8	2.7998	2.5853	2.3449	2.1814	1.9722	1.7156	1.5459	1.3175
0.9	3.0052	2.7492	2.4691	2.2821	2.0467	1.7634	1.5789	1.3341
1.0	3.2099	2.9095	2.5881	2.3774	2.1163	1.8072	1.6089	1.3490
α_0	2.4492	2.2693	2.0396	1.8648	1.6174	1.2734	1.0180	0.6335
α_1	1.7607	1.6148	1.4338	1.2996	1.1138	0.8627	0.6815	0.4163
α_2	1.4492	1.3231	1.1687	1.0554	0.9001	0.6928	0.5448	0.3306
α_3	1.2607	1.1480	1.0112	0.9112	0.7752	0.5946	0.4665	0.2821

Таблица 3. Значения функции $\tilde{H}_r(\mu)$

μ	λ_r							
	1.000	0.995	0.975	0.950	0.900	0.800	0.700	0.500
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.0425	1.0422	1.0412	1.0399	1.0374	1.0325	1.0278	1.0191
0.2	1.0760	1.0755	1.0736	1.0712	1.0665	1.0576	1.0492	1.0335
0.3	1.1035	1.1028	1.1001	1.0967	1.0903	1.0779	1.0663	1.0450
0.4	1.1266	1.1257	1.1223	1.1182	1.1101	1.0948	1.0805	1.0544
0.5	1.1464	1.1453	1.1414	1.1365	1.1270	1.1091	1.0925	1.0622
0.6	1.1635	1.1624	1.1579	1.1523	1.1416	1.1214	1.1027	1.0689
0.7	1.1785	1.1773	1.1723	1.1662	1.1544	1.1321	1.1116	1.0747
0.8	1.1918	1.1905	1.1850	1.1784	1.1656	1.1415	1.1194	1.0797
0.9	1.2037	1.2022	1.1964	1.1893	1.1756	1.1499	1.1263	1.0841
1.0	1.2143	1.2127	1.2066	1.1990	1.1845	1.1573	1.1324	1.0880

(40). Кроме того, с помощью уравнения (4.21) вычислены следующие значения показателя диффузии k_r :

λ_r	1.000	0.995	0.975	0.950	0.900	0.800	0.700	0.500
k_r	0.0000	0.0998	0.2209	0.3086	0.4265	0.5781	0.6818	0.8250

Они могут понадобиться при использовании асимптотических формул, приведенных в [4].

3. Задача Милна при консервативном рассеянии. С помощью формул (4.35), (34) и (35) не представляет труда получить, что $u_i^0(\text{arccos } \mu) = H_i^0(\mu)/\sqrt{2}$. Аналогично из (4.35), (38) и (46) находим $u_r^0(\text{arccos } \mu) = [\varphi_{r0}^0(\mu) + \varphi_{r2}^0(\mu)]/(2\mu) = H_r^0(\mu)/\alpha_{r1}^0$.

Таким образом, мы имеем все необходимые формулы и таблицы для того, чтобы в рамках рассматриваемой векторной задачи переноса найти параметры Стокса I_l и I_r излучения, выходящего из полубесконечной однородной среды при «рэлеевском» рассеянии.

Сравнение характеристик излучения, выходящего из изотропной и анизотропной рэлеевских атмосфер. Известно, что многие рассеивающие среды (в частности, планетные атмосферы) содержат значительное

количество частично или полностью ориентированных несферических частиц. Расчет поля излучения в таких средах — задача чрезвычайно сложная. Поэтому представляет несомненный интерес провести на основании точных расчетов сравнение интенсивности и степени поляризации излучения в двух частных предельных случаях: в изотропной среде, рассеивающей по закону Рэлея; в анизотропной среде, состоящей из полностью ориентированных тонких («рэлеевских») цилиндров. Это сравнение позволит строго оценить степень влияния анизотропии среды на характеристики рассеянного излучения.

Вследствие различия геометрии рассеяния света в изотропной и анизотропной средах можно сравнивать лишь безразмерные характеристики излучения — относительную интенсивность (распределение яркости) и степень поляризации. Действительно, свет, падающий по нормали к оси бесконечного цилиндра, рассеивается только в плоскости, перпендикулярной оси, а не по всем направлениям, как в случае частицы конечных размеров. Следовательно, изменяется сама размерность параметров Стокса: Дж/(см²·с·рад) в анизотропном случае вместо Дж/(см²·с·ср) в изотропном.

Как известно [8, гл. I], интенсивность I и степень поляризации P излучения находятся по формулам

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel}, \quad P = (I_{\perp} - I_{\parallel})/I, \quad (48)$$

где индексы \perp и \parallel относятся к излучению, поляризованному соответственно перпендикулярно и параллельно плоскости, проходящей через направление распространения света и нормаль к границе среды (меридиональная плоскость). В рассматриваемой анизотропной среде меридиональная плоскость перпендикулярна осям частиц. Поэтому формулы (48) приобретают вид $I_a = I_{Ia} + I_{ra}$, $P_a = (I_{Ia} - I_{ra})/I_a$. Здесь и далее индексом a будем отмечать характеристики излучения в анизотропной среде, индексом i — в изотропной.

Сравним характеристики излучения, выходящего из полубесконечной однородной консервативно рассеивающей среды. Падающее на среду излучение считается неполяризованным. В случае анизотропной среды излучение падает перпендикулярно направлению ориентации частиц. Величины $I_a(0, \theta, \theta_0)$ и $P_a(0, \theta, \theta_0)$ рассчитываются по приведенным выше формулам и таблицам, $I_i(0, \mu, \mu_0, \varphi)$ и $P_i(0, \mu, \mu_0, \varphi)$ — по формулам и таблицам из [8, гл. X].

На рис. 2 кривыми 1 и 2 показаны величины $\bar{I}_i(\mu) = I_i(0, -\mu, \mu, \pi)/I_i(0, -1, 1, \pi)$ и $P_i(0, -\mu, \mu, \pi)$, $\mu \in [0, 1]$, которые описывают распределения яркости и степени поляризации отраженного излучения вдоль экватора интенсивности планеты с чисто газовой атмосферой при угле фазы $\alpha = 0$. Кривыми 3 и 4 показаны анизотропные аналоги этих величин $\bar{I}_a(\mu) = I_a(0, \pi - \arccos \mu, -\arccos \mu)/I_a(0, \pi, 0)$ и $P_a(0, \pi - \arccos \mu, -\arccos \mu)$. Видно, что кривые распределения яркости различаются сравнительно слабо. В то же время различие кривых поляризации сильное, причем это различие становится принципиальным при $\mu = 0$ и $\mu = 1$. Суть в том, что при $\mu = 0$ вклад в отраженное излучение дает только рассеяние первого порядка, которое в изотропном случае неполяризовано, а в анизотропном — имеет степень поляризации 33.3 (3) %. При $\mu = 1$ изотропная среда обладает осевой симметрией, в силу чего выходящее излучение оказывается неполяризованным. Анизотропная среда при $\mu = 1$ такой симметрией не обладает. Поэтому степень поляризации выходящего излучения отлична от нуля.

Для сравнения на рис. 2 дан график величины $P'_a = [I_{Ia} - I_{ra} - (I_{Ia}^{(1)} - I_{ra}^{(1)})]/I_a$ (кривая 5), где $I_{Ia}^{(1)}$ и $I_{ra}^{(1)}$ описывают вклад рассеяния первого порядка. График аналогичной величины P'_i в данном случае совпадает с

кривой 2. Величина P' равна степени поляризации отраженного излучения при условии, что однократно рассеянное выходящее излучение неполяризовано. Видно, что качественно кривые 2 и 5 ведут себя практически одинаково. В частности, величина P'_a в точке $\mu=1$ близка к нулю. Это свидетельствует о том, что фотоны, рассеянные два и более раз, слабо «помнят» об анизотропии среды.

На рис. 3 приведены графики тех же величин, но для случая падения света по нормали к границе среды ($\mu_0=1$). Относительные интенсивности $\bar{I}_i(\mu) = I_i(0, -\mu, 1, 0)/I_i(0, -1, 1, 0)$ и $\bar{I}_a(\mu) = I_a(0, \pi - \arccos \mu, 0)/I_a(0, \pi, 0)$ совпали в пределах точности нанесения гра-

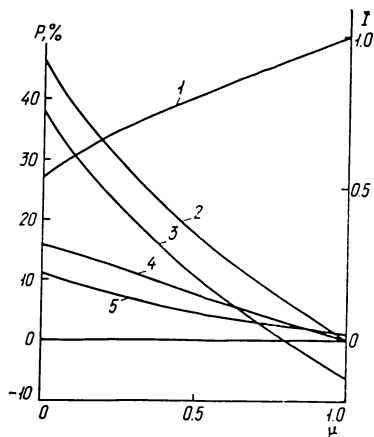


Рис. 3. То же, что на рис. 2, при $\mu_0=1$

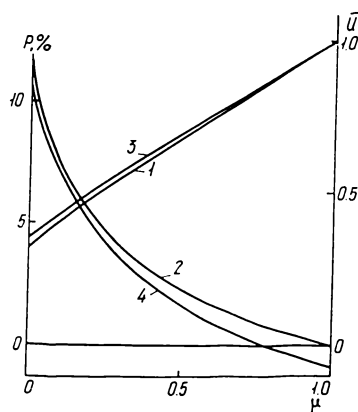


Рис. 4. То же, что на рис. 2, в задаче Милна

фика (кривая 1). Степени поляризации $P_i(0, -\mu, 1, 0)$ (кривая 2) и $P_a(0, \pi - \arccos \mu, 0)$ (кривая 3) различаются незначительно, но опять при $\mu=1$ различие становится принципиальным. Кривыми 4 и 5 показаны величины $P'_i(0, -\mu, 1, 0)$ и $P'_a(0, \pi - \arccos \mu, 0)$, в которых не учтен вклад рассеяния первого порядка в поляризацию выходящего излучения. Качественное поведение этих величин оказывается практически одинаковым (в частности, вблизи $\mu=1$), что также подтверждает наш вывод об определяющем влиянии анизотропии среды на поляризацию только однократно рассеянного света.

Рассмотрим, наконец, задачу Милна, численные результаты для которой представлены на рис. 4. В этом случае все фотоны, выходящие из среды, оказываются многократно рассеянными. Видно, что как относительные интенсивности $\bar{u}_i(\mu) = u_i(\mu)/u_i(1)$ (кривая 1) и $\bar{u}_a(\mu) = \bar{u}_a(\arccos \mu)/u_a(0)$ (кривая 3), так и степени поляризации $P_i(\mu)$ (кривая 2) и $P_a(\arccos \mu)$ (кривая 4) практически совпали. Величина P_a при $\mu=1$ хоть и не равна нулю (что объясняется отсутствием осевой симметрии), но тем не менее оказывается достаточно малой.

Итак, из приведенных численных результатов можно сделать следующие выводы о влиянии анизотропии среды на характеристики выходящего излучения в случае консервативного рэлеевского рассеяния: 1) анизотропия среды оказывает сильное влияние на степень поляризации только однократно рассеянного излучения, качественное поведение степени поляризации света, рассеянного два и более раз в анизотропной среде, оказывается практически таким же, как и в изотропной; 2) анизотропия среды практически не влияет на относительную угловую зависимость интенсивности выходящего излучения.

Конечно, эти выводы требуют дальнейшего тщательного изучения в случаях, когда свет рассеивается на достаточно крупных поглощаю-

щих и непоглощающих частицах. Можно ожидать, что в этом случае разница между изотропными и анизотропными средами будет заметно меньшей (см., например, [1, гл. 8]). Во всяком случае следует отметить, что приведенные выше оценки степени влияния анизотропии среды на характеристики выходящего излучения в рэлеевском случае основаны на строгих расчетах и ранее, насколько нам известно, не проводились.

1. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.— 664 с.
2. *ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 536 с.
3. *Минин И. Н.* О решении интегрального уравнения береговой рефракции электромагнитных волн // Докл. АН СССР.— 1960.— 133, № 3.— С. 558—560.
4. *Мищенко М. И.* Перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц // Кинематика и физика небес. тел.— 1987.— 3, № 1.— С. 48—56.
5. *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: Гостехиздат, 1956.— 392 с.
6. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.— 336 с.
7. *Фок В. А.* О некоторых интегральных уравнениях математической физики // Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.— С. 401—454.
8. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 432 с.
9. *Яновицкий Э. Г.* К задаче о диффузном отражении монохроматического излучения // Астрометрия и астрофизика.— 1968.— Вып. 1.— С. 165—177.
10. *Яновицкий Э. Г.* Поле излучения в полубесконечной атмосфере при анизотропном рассеянии // Астрон. журн.— 1976.— 53, вып. 5.— С. 1063—1074.
11. *Bosma P. B., de Rooij W. A.* Efficient methods to calculate Chandrasekhar's H -functions // Astron. and Astrophys.— 1983.— 126, N 2.— P. 283—292.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 13.11.86,
после доработки 25.12.86

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 523.44—323

ПОЛОЖЕНИЯ ИЗБРАННЫХ МАЛЫХ ПЛАНЕТ В 1977—1978 ГГ. ПО НАБЛЮДЕНИЯМ, ВЫПОЛНЕННЫМ В ГАО АН УССР С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНОГО АСТРОГРАФА 400/2000 / Головня В. В., Ижакевич Е. М., Майор С. П., Мороз Г. В., Середа Е. М.
(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 7136-B87)

Приведены 46 точных положений 11 избранных малых планет и результаты сравнения их с эфемеридами, публикуемыми ИТА АН СССР. Координаты опорных звезд взяты из каталогов SAO и AGK3. Случайная ошибка одного наведения на изображение опорной звезды или малой планеты составляет 1—2 мкм. Даны моменты наблюдений по всемирному времени, топоцентрические экваториальные координаты, разности ($O - C$), каталожные сведения об опорных звездах и их средние депенденсы.