



УДК 536.24

© 2010

А. П. Слесаренко, Д. А. Котульский

**Математическое моделирование ламинарного
изотермического течения жидкости в кольцевых
каналах при наличии эксцентриситета**

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Л. Шубенко)

Наведено результати обчислень полів швидкостей та коефіцієнтів гідравлічного опору для стійкого потоку в ексцентричних кільцях з різними відношеннями радіусів $r_1/r_2 = 0,1-1$ і відносним ексцентриситетом $\varepsilon = 0-1$. Дані щодо гідравлічного опору корельовано формулою (16).

В технике для решения ряда задач используются кольцевые каналы. Так, например, широкое распространение получили теплообменные аппараты типа “труба в трубе”. Для расчета теплообмена и гидродинамики в таких каналах необходимы данные о полях скоростей по сечению канала. Основные закономерности течения и теплообмена в кольцевых каналах достаточно подробно изучены и изложены в [1, 2]. При ламинарном стабилизированном течении жидкости в кольцевых каналах без эксцентриситета течение симметрично относительно оси канала, а профиль скоростей имеет следующий вид:

$$w = \frac{\Delta P}{4\mu l} \left[(r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - (r^2 - r_1^2) \right], \quad (1)$$

где w — составляющая скорости потока в направлении продольной оси канала; l — длина канала; r_1, r_2 — радиусы внутренней и наружной границ кольцевого канала; ΔP — перепад давлений в канале; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Максимум скорости имеет место примерно в средней части канала, при этом радиус, соответствующий максимальной скорости, равен

$$r_m = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}}. \quad (2)$$

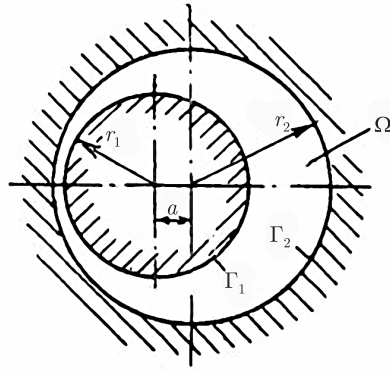


Рис. 1. Схема кольцевого канала

С уменьшением r_1/r_2 максимум скорости сдвигается к внутренней стенке канала, однако при $0,1 < r_1/r_2 < 1$ этот сдвиг невелик. Коэффициент сопротивления ξ находится из соотношения

$$\xi \text{Re}_{d_3} = \frac{64(1 - (r_1/r_2)^2)}{1 + (r_1/r_2)^2 + \frac{1 - (r_1/r_2)^2}{\ln r_1/r_2}}, \quad (3)$$

где Re_{d_3} — число Рейнольдса; $d_3 = 2(r_2 - r_1)$ — эквивалентный диаметр канала; $\xi = \Delta P / \frac{l}{d_3} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}$ — коэффициент гидравлического сопротивления; ρ — плотность жидкости, \bar{w} — средняя скорость по сечению канала. По данным [1], приведенная длина гидродинамического начального участка $l_{\text{нр}}$, определяемая при изотермическом течении как такое значение $x = \frac{1}{\text{Re}_{d_3}} \frac{l_{\text{нр}}}{d_3}$, при котором величина максимальной скорости отличается не более чем на 1% от максимальной скорости стабилизированного течения, составляет $x = 0,02 - 0,01$ при $r_1/r_2 = 0,02 - 1,0$.

На практике в кольцевых каналах из-за конструктивных особенностей каналов, неточностей сборки, изгиба возможны отклонения от концентрического размещения внутренней и внешней труб, т.е. появление эксцентриситета. В результате в канале возникают неравномерности скорости, температуры потока и теплоотдачи как по сечению, так и по длине. Эксцентриситетом принято называть расстояние между центрами труб a (рис. 1), а относительным эксцентриситетом — отношение $\varepsilon = a/(r_2 - r_1)$. Для концентрического канала $\varepsilon = 0$, в случае касания труб — $\varepsilon = 1$. Влияние эксцентриситета в кольцевых каналах проявляется сильнее при ламинарном течении жидкости. Неравномерность теплоотдачи по периметру кольцевого канала, особенности тепловой стабилизации и другие вопросы, согласно [1], связаны с неравномерностью распределения скорости потока в зазоре. Вместе с тем, в литературе недостаточно сведений о влиянии эксцентриситета на неравномерность распределения расхода в кольцевом канале. В связи с этим большой практический интерес представляют данные по полям скорости в кольцевом канале для различных значений эксцентриситета.

Для расчета поля скоростей в поперечном сечении кольцевого канала при наличии эксцентриситета целесообразно воспользоваться вариационно-структурным методом, который в последнее время широко применяется при решении широкого класса задач матема-

тической физики для областей сложной формы [3–7]. Чтобы определить стационарное поле скоростей в потоке несжимаемой жидкости на участке гидродинамической стабилизации при изотермическом течении, необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{\Delta P}{\mu l}, \quad (4)$$

$$w|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (5)$$

где r, φ — полярные координаты; Γ_1 — внутренняя граница кольцевого канала; Γ_2 — внешняя граница канала; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — полная граница кольцевого канала (см. рис. 1).

Введя безразмерную скорость

$$W = \frac{\mu l}{(r_2 - r_1)^2} \frac{w}{\Delta P},$$

задачу (4), (5) можно свести к следующей:

$$\nabla^2 W = -1, \quad (6)$$

$$W|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0. \quad (7)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа.

Структуру решения данной задачи можно представить в виде

$$W = \omega \Phi, \quad (8)$$

где $\omega = (R_2 - R)(R^2 + 2\varepsilon R \cos \varphi + \varepsilon^2 - R_1^2)$ — уравнение границы области — функция, обращающаяся в нуль на границе области и изменяющая свой знак при переходе через нее, $R_1 = r_1/(r_2 - r_1)$, $R = r/(r_2 - r_1)$, $R_2 = r_2/(r_2 - r_1)$.

Структура (8) представляет собой некоторую функцию, удовлетворяющую граничному условию [7] при произвольном выборе Φ . Поэтому функцию Φ целесообразно выбрать в виде ряда по некоторой полной системе координатных функций $\chi_{ij}(r, \vartheta)$, т. е.

$$\Phi = \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \chi_{ij}(r, \vartheta). \quad (9)$$

При этом коэффициенты C_{ij} должны быть выбраны так, чтобы функция (8) удовлетворяла не только граничному условию (7), но и исходному уравнению (6). Исходная задача (6), (7) эквивалентна вариационной задаче о минимуме некоторого функционала

$$I = \iint_{\Omega} (\nabla^2 W - 2W) d\Omega. \quad (10)$$

Минимизация же функционала (10) сводится к некоторой линейной системе алгебраических уравнений Ритца относительно искомых коэффициентов C_{ij} :

$$C_{ij} A_{ijkl} = B_{kl}, \quad k + l = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

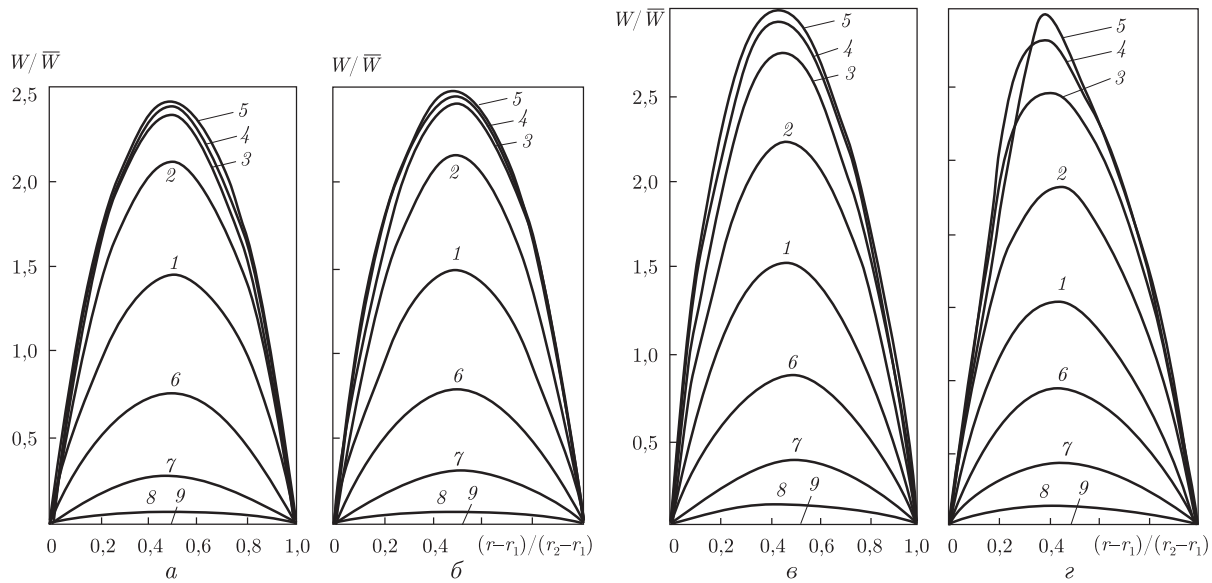


Рис. 2. Поле скоростей в широкой (кривые 2–5) и узкой (кривые 6–9) частях кольцевого канала для различных значений эксцентриситета и отношения радиусов r_1/r_2 : a – d – $r_1/r_2 = 0,989; 0,8; 0,4$ и $0,2$ соответственно; 1 – кольцевой канал без эксцентриситета ($\varepsilon = 0$); 2–5 – $\varepsilon = 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ (широкая часть канала); 6–9 – $\varepsilon = 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ (узкая часть канала)

$$A_{ijkl} = \iint_{\Omega} \nabla Y_{ij} \nabla Y_{kl} d\Omega, \quad (12)$$

$$B_{kl} = \iint_{\Omega} Y_{kl} d\Omega, \quad (13)$$

$$Y_{ij} = \omega \chi_{ij}, \quad (14)$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

По изложенному алгоритму была составлена машинная программа на объектно-ориентированный язык программирования Delphi для персонального компьютера Pentium 4. Расчеты полей скоростей были выполнены для различных значений эксцентриситета: $\varepsilon = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ и отношения радиусов $r_1/r_2 = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,989$. Расчет велся для базисных функций вида $\chi_{ij} = r^i \cos 2j\vartheta$, $i + j = 0, 1, 2$.

Результаты расчетов полей скоростей в узкой и широкой частях кольцевого канала для различных значений эксцентриситета и отдельных значений r_1/r_2 представлены на рис. 2. Расчеты показывают, что поле скоростей в кольцевом канале характеризуется значительной неравномерностью. Скорость потока в широкой части канала значительно больше, чем в узкой. Неравномерность поля скоростей возрастает с увеличением эксцентриситета и слабо зависит от отношения радиусов r_1/r_2 . Поле скоростей в кольцевом канале без эксцентриситета соответствует данным, приведенным в [1]. Максимум скорости для различных значений эксцентриситета и отношения радиусов соответствует среднему радиусу канала.

Наряду с полями скоростей для каждого канала были получены величины средних скоростей \overline{W} . Поскольку

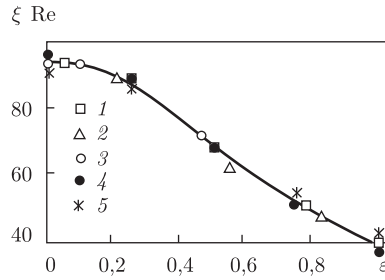


Рис. 3. Зависимость гидравлического сопротивления кольцевого канала от величины эксцентриситета при ламинарном течении: 1–3 — $r_1/r_2 = 0,67; 0,837; 0,882$, соответственно [2]; 4, 5 — результаты настоящих расчетов при $r_1/r_2 = 0,989$ и $0,2$, соответственно

$$\overline{W} = \frac{\mu l}{(r_2 - r_1)\Delta P} \iint_{\Omega} w d\Omega, \quad (15)$$

то соотношение (15) может быть представлено в виде

$$\xi \text{Re} = C(\varepsilon),$$

где $C(\varepsilon)$ — некоторая константа, зависящая от эксцентриситета. Зависимость $\xi \text{Re} = f(\varepsilon)$ представлена на рис. 3. Расчеты показали, что гидравлическое сопротивление кольцевого канала существенно зависит от эксцентриситета. С увеличением эксцентриситета в пределах $\varepsilon = 0 - 1$ коэффициент гидравлического сопротивления снижается примерно в 2,4 раза. Сравнение с экспериментальными данными [2] показывает, что гидравлическое сопротивление, полученное расчетным путем, хорошо совпадает с данными экспериментов. Для расчета гидравлического сопротивления можно рекомендовать формулу

$$\xi \text{Re} = 29,4 + 56 \cos\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right) + 42,4(\varepsilon - 0,5)^2. \quad (16)$$

Таким образом, получены поля скоростей по сечению кольцевых каналов с эксцентриситетом в широком диапазоне изменения параметров — относительного эксцентриситета, отношения радиусов для ламинарного течения жидкости на участке гидродинамической стабилизации потока, а также данные по гидравлическому сопротивлению в таких каналах. Эти результаты могут быть использованы для тепловых и гидравлических расчетов в кольцевых каналах с эксцентриситетом.

1. Галицейский Б. М., Данилов Ю. И., Дрейцер Г. А., Кошкин В. Н. Теплообмен в энергетических установках космических аппаратов. — Москва: Машиностроение, 1975. — 272 с.
2. Старовойтенко Е. И., Минаев Б. П. Теплообмен и сопротивление в каналах при ламинарном течении жидкости // Тепло- и массоперенос. — Минск, 1972. — Т. 1, ч. 1. — С. 245–249.
3. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебрологические и проекционные методы в задачах теплообмена. — Киев: Наук. думка, 1978. — 137 с.
4. Слесаренко А. П. Развитие алгебрологического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Москва, 1984. — 36 с.
5. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Пробл. машиностроения. — 2002. — 5, № 4. — С. 72–80.
6. Слесаренко А. П., Котульский Д. А. Регионально-аналитическое моделирование конвективного теплообмена с учетом взаимного влияния стенок трубы и движущейся жидкости // Доп. НАН України. — 2003. — № 4. — С. 77–82.

7. Слесаренко А. П., Котульский Д. А. R-функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения // Пробл. машиностроения. – 2001. – 4, № 3–4. – С. 72–79.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 16.07.2009

A. P. Slesarenko, D. A. Kotulsky

Simulation of a laminar isothermal liquid flow in annular channels in the presence of eccentricity

The results of calculating the velocity fields and the hydraulic resistance coefficients for a stabilized flow in eccentric annuli with different ratios of radii $r_1/r_2 = 0.1-1$ and the relative eccentricity $\varepsilon = 0-1$ are presented. The data on the hydraulic resistance are correlated by formula (16).