

УДК 521.95

О выборе системы координат при обработке перекрывающихся пластинок

А. П. Яценко

На математической модели показано, что при обработке большого массива перекрывающихся пластинок удобно пользоваться равнопромежуточной азимутальной полярной проекцией небесной сферы на вспомогательную плоскость. Координаты звезд на такой пластинке (с началом в северном полюсе небесного экватора) определяются через экваториальные координаты выражениями: $U = (\pi/2 - \delta) \sin \alpha$; $V = -(\pi/2 - \delta) \cos \alpha$. Эти координаты связаны с тангенциальными полярными координатами U' , V' соотношениями $U = U'(\pi/2 - \delta) \operatorname{tg} \delta$, $V = V'(\pi/2 - \delta) \operatorname{tg} \delta$.

ON THE CHOICE OF COORDINATE SYSTEM FOR THE REDUCTION OF OVERLAPPING PLATES, by Yatsenko A. I. Using the mathematical model it is shown that for the reduction of great number of overlapping plates the equiinterval azimuthal polar projection is better to apply for the projection of celestial sphere on the auxiliary plane. The coordinates of stars on the formal plate (with outset in the North Pole of celestial equator) are determined from equatorial coordinates by expressions: $U = (\pi/2 - \delta) \sin \alpha$; $V = -(\pi/2 - \delta) \cos \alpha$. These coordinates are connected with tangential polar coordinates U' , V' by expressions $U = U'(\pi/2 - \delta) \operatorname{tg} \delta$, $V = V'(\pi/2 - \delta) \operatorname{tg} \delta$.

Введение. В последнее время все чаще решаются задачи совместной обработки больших массивов перекрывающихся пластинок, охватывающих значительную часть небесной сферы. Вопросы, связанные с разработкой вида системы условных уравнений для совместного определения постоянных пластинок и поправок к координатам опорных звезд, детально рассматривались во многих работах [3—6]. При этом определяемые координаты звезд в некоторой системе приводятся к общему для всех пластинок началу отсчета. Такой системой может быть, например, идеальная система координат с началом в произвольно выбранной точке оптического центра, расположенной вблизи геометрического центра массива пластинок [5]. Условие, ограничивающее выбор системы координат для окончательного выравнивания, — сохранение вида распределения случайных ошибок измеренных координат звезд при переводе их в такую систему. Рассмотрим два варианта возможных систем координат звезд, общих для произвольного массива пластинок. Начало координат удобнее всего (из условий симметрии) расположить в полюсе небесного экватора. При этом значительно упрощается вид практически всех преобразований при переходе от одной системы координат к другой. Обязательным свойством системы координат для совместного выравнивания будем считать возможность перехода по точным формулам к тангенциальной системе координат, если начала координат совпадают. Кроме того, тангенциальные координаты с началом в северном полюсе небесного экватора рассмотрим как пример общей для некоторого массива пластинок системы координат.

Пусть U , V — координаты звезд в системе, выбранной для окончательного выравнивания. Если эпохи получения пластинок массива совпадают или близки между собой, то координаты U , V звезд, вычисленные по положениям из опорного каталога, будут одинаковыми для пластинок, на которые попадают изображения этих звезд. Для произвольной пластинки найдем постоянные связи идеальных координат звезд ξ , η (с началом в оптическом центре пластинки), вычисленных по опорному каталогу, с измеренными. После редукции измеренных координат (x, y) объектов к идеальным переведем их в общую систему координат (u, v) . Координаты объектов в общей системе координат,

найденные по измерениям, обозначены у нас строчными буквами, а выведенные из α , δ опорного каталога — прописными. В общей системе координат определим вид связи этих координат. Различие ошибок единицы веса, полученных при сравнении измеренных координат (x , y) с тангенциальными (ξ , η) и найденных из такого же сравнения в общей плоскости, будет характеризовать изменение параметров распределения случайных ошибок измерений после перехода к общей системе координат. С другой стороны, необходимо исследовать ход ошибок единицы веса по отдельным пластинкам в общей плоскости в зависимости от значений координат оптического центра пластинок. Чем меньше такой ход, тем лучше выбранная система координат для совместной обработки массива пластинок, поскольку веса отдельных наблюдений, включенных в обработку, должны быть близкими. Подобные сравнения ошибок единицы веса, полученных при редукции измеренных координат в различных плоскостях, были сделаны для тангенциальной и шмидтовской (названа условно) систем координат с началом в северном полюсе небесного экватора.

Модель пластинки. При решении этой задачи за основу бралась математическая модель пластинки, аналогичная по основным свойствам пластинке широкоугольного астрографа Цейса ($D=40$ см, $F=2$ м). Методика построения такой модели детально описана в работе [2]. На поле $4 \times 4^\circ$ брали 96 равномерно расположенных звезд, случайные ошибки измерений которых задавались генератором нормально распределенных случайных чисел со стандартным отклонением ± 3 мкм по обоим координатам. Случайные ошибки ориентировки пластинки в фиктивном приборе составляли $\pm 30''$. Дисторсия объектива принималась равной $+5 \cdot 10^{-8}$ мм $^{-2}$. Считалось, что такие эффекты, как уравнение блеска, кома, дифференциальные рефракция и абберация, учтены заранее.

При создании модели опорного каталога случайные ошибки координат звезд задавались генератором нормально распределенных случайных чисел со средним значением нуль и стандартным отклонением $\pm 0.3''$. Такие случайные ошибки содержат, например, положения звезд AGK3 на эпоху 1986.0. Поскольку на практике положение оптического центра пластинки точно не известно, то при вычислении идеальных координат звезд в истинные значения α_0 , δ_0 вводились ошибки, соответствующие смещению этой точки на пластинке на $+10$ мм по обоим координатам. Как показывает практика, при таких ошибках квадратичные члены в уравнениях связи измеренных и идеальных координат будут значимы. Истинные координаты оптического центра пластинки по δ последовательно принимали значения 87, 63, 43, 23, 3, 0° , а по α изменялись от 0 до $6^h 40^m$ через каждые 40^m .

Формулы редукции измеренных координат изображений звезд на пластинке к идеальным имели вид

$$\xi_i = a + bx_i + cy_i + dx_i^2 + ex_iy_i + fx_i^3 + gx_iy_i^2, \quad (1)$$

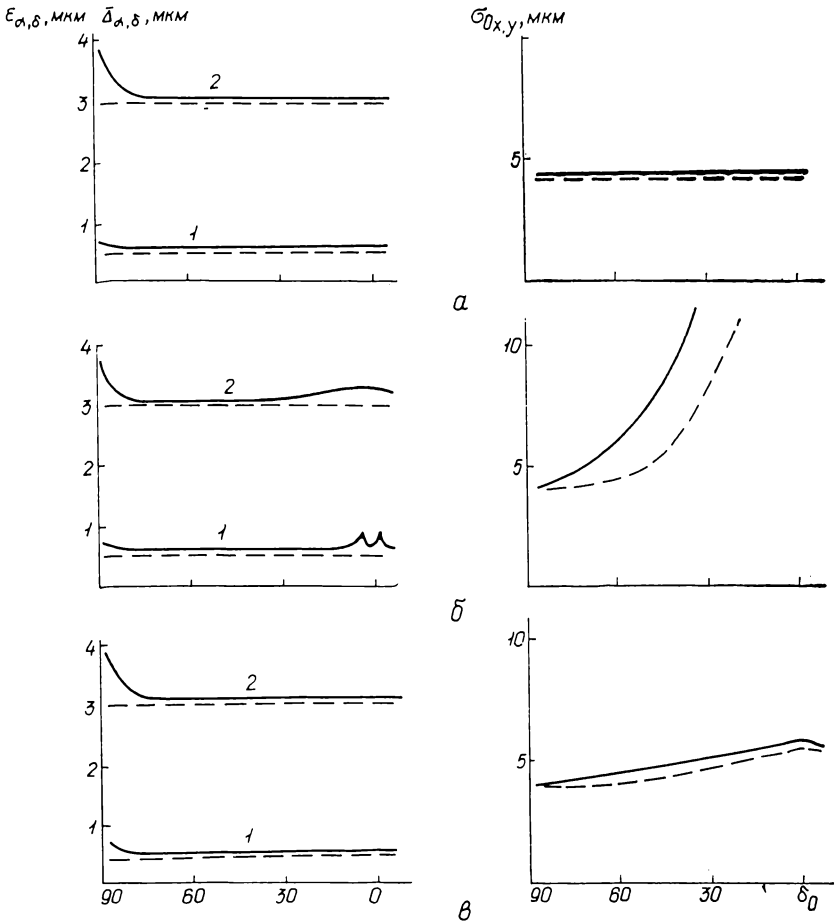
$$\eta_i = a' + b'y_i + c'y_i + d'y_i^2 + e'x_iy_i + f'y_i^3 + g'y_i^2x_i^2,$$

где x_i , y_i — измеренные координаты; ξ_i , η_i — идеальные координаты звезд. Постоянные связи a , a' , b , b' , ... находились из решения соответствующих систем условных уравнений (1), составленных по 96 звездам, выступающим в этом случае как опорные. Ошибки единицы веса составили ± 4.2 мкм по обоим координатам независимо от расположения пластинки на небесной сфере. Затем те же звезды рассматривались как определяемые, т. е. в правые части уравнений (1) были подставлены значения постоянных пластинки и измеренных координат. По найденным таким путем значениям ξ' и η' определялись экваториальные координаты звезд, которые затем сравнивались с их истинными значе-

ниями, задаваемыми при построении модели. Систематические ($\bar{\Delta}$) и случайные (ϵ) ошибки координат находились по формулам

$$\bar{\Delta}_\beta = \sum_{i=1}^N \Delta\beta_i / N, \quad \epsilon_\beta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^N \Delta\beta_i^2 / (N-1)}, \quad (2)$$

причем $\Delta\beta_i = \delta_i - \delta_{i_{\text{нст}}}$ или $\Delta\beta_i = (\alpha_i - \alpha_{i_{\text{нст}}}) \cos \delta_i$, где N — количество звезд. На рисунке (а) показаны значения ошибок $\bar{\Delta}_\alpha$, $\bar{\Delta}_\delta$, ϵ_α , ϵ_δ в зависимости от координаты δ_0 оптического центра пластинки. Ошибки опре-



Систематические ($\bar{\Delta}$, кривые 1) и случайные (ϵ , кривые 2) ошибки вычисленных значений координат α (сплошная линия) и δ (штриховая), а также ошибки единицы веса (σ_0) решения систем условных уравнений (1), (5) по координатам x (сплошная линия), y (штриховая) в зависимости от δ_0 оптического центра пластинки: а — обработка единичного снимка в тангенциальной плоскости, связанной с оптическим центром пластинки (центральная проекция); б, в — обработка снимка, переведенного в тангенциальную полярную плоскость (б — центральная, в — азимутальная проекции)

деляемых координат не зависят от α_0 . Кривые получены путем усреднения результатов для пяти вариантов начальных данных генератора нормально распределенных случайных чисел, задающих случайные ошибки измерений и каталожных положений звезд. Из рисунка видно, что точность определения координат α у полюса падает, а начиная с $\delta_0 \leq 70^\circ$ ошибки положений звезд практически не зависят от расположения пластинок на небесной сфере. Рассмотрим результаты определения координат звезд по измерениям одной пластинки, переведенным в общую плоскость.

Центральная проекция небесной сферы на тангенциальную полярную плоскость. Положения звезд на такой пластинке получаются в результате центральной полярной проекции на нее небесной сферы. Идеальные координаты звезд находим по каталожным данным из выражений

$$U = \operatorname{ctg} \delta \sin \alpha, \quad V = -\operatorname{ctg} \delta \cos \alpha, \quad (3)$$

которые получаются из известных формул для тангенциальных координат звезд на пластинке, если принять значения координат оптического центра равными $\alpha_0 = 00^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}$, $\delta_0 = 90^{\circ}00'00''$. Измеренные координаты звезд на пластинке переводятся в общую плоскость после выполнения их редукции к идеальным координатам по формулам (1). Для этого выполняются следующие преобразования:

$$u = r/t; \quad v = s/t,$$

где

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \delta_0 \sin \alpha_0 & \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 & \sin \delta_0 \cos \alpha_0 & -\cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ 0 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В формулах (4) u, v — «измеренные» координаты, приведенные в общую тангенциальную полярную плоскость; r, s, t — веномогательные величины; ξ, η — измеренные координаты звезд на пластинке, редуцированные к идеальной системе с началом в оптическом центре; α_0, δ_0 — экваториальные координаты оптического центра пластинки.

В результате определения значимости линейных, квадратичных и кубических членов связи «измеренных» и идеальных координат установлено, что в общей плоскости между ними существует только линейная зависимость

$$a + bu_i + cv_i = U_i, \quad a' + b'u_i + c'v_i = V_i. \quad (5)$$

Ошибки единицы веса решения систем уравнений типа (5) в зависимости от координаты δ_0 оптического центра пластинки приведены на рисунке (б), на котором показаны также случайные ошибки определения координат звезд по формулам, обратным выражениям (3). Видно, что точность определения координат звезд мало зависит от того, в какой плоскости происходит окончательное сравнение измеренных координат с идеальными. Однако стремительное увеличение ошибок единицы веса при удалении пластинки от центра общей плоскости (в данном случае от полюса) делает тангенциальную плоскость непригодной в качестве общей для некоторого массива перекрывающихся пластинок. Это следует из значительных различий весов наблюдений даже на отдельно взятой пластинке, если она находится вблизи небесного экватора. Полученные результаты объясняются свойствами центральной полярной проекции [1], поскольку ее масштаб зависит от полярного расстояния ($90^\circ - \delta$) рассматриваемой точки. Так, масштаб по меридианам $m = \sec^2(\pi/2 - \delta)$, а по параллелям $n = \sec(\pi/2 - \delta)$.

Равнопромежуточная азимутальная полярная проекция. Координаты звезд в этой плоскости определяются через экваториальные координаты α, δ :

$$U = (\pi/2 - \delta) \sin \alpha, \quad V = -(\pi/2 - \delta) \cos \alpha. \quad (6)$$

Подобный вид проекции небесной сферы реализуется на пластинках телескопов системы Шмидта.

Из выражений (6) следует, что расстояние ρ от начала координат до какой-либо звезды в этой проекции будет равно $(\pi/2 - \delta)$. Тогда параллели в общей плоскости изобразятся концентрическими окружностями с радиусами, равными выпрямленным дугам меридианов от полюса до параллели, а масштаб по меридианам будет постоянным и равным

единице. Из математической картографии известно, что масштаб по параллели будет равным $(\pi/2 - \delta) / \sin(\pi/2 - \delta)$. Следовательно, в зависимости от δ он будет изменяться от 1 (полюс) до $\pi/2$ (экватор) [1].

Измеренные координаты звезд в общей плоскости получим путем последовательного перехода сначала к центральной полярной проекции, а от нее — к азимутальной полярной проекции. Из сравнения формул (3) и (6) видно, что справедливы соотношения $U = U'(\pi/2 - \delta) \times \times \text{tg } \delta$, $V = V'(\pi/2 - \delta) \text{tg } \delta$, где U, V — координаты звезд в азимутальной, а U', V' — в центральной полярных проекциях.

Поскольку для измеренных координат $\text{ctg } \delta$ можно заменить на $1 / \sqrt{u'^2 + v'^2}$ (где u', v' — измеренные координаты звезд, редуцированные к плоскости центральной полярной проекции), для измеренных координат в азимутальной проекции получим выражения

$$\begin{aligned} u &= u' \arctg(1 / \sqrt{u'^2 + v'^2}) / \sqrt{u'^2 + v'^2}, \\ v &= v' \arctg(1 / \sqrt{u'^2 + v'^2}) / \sqrt{u'^2 + v'^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Связь между найденными по формулам (7) измеренными и идеальными координатами U, V для азимутальной проекции также описывается линейными формулами. Ход и значения систематических и случайных ошибок определения координат после выполнения редукции измеренных координат (5) изображены на рисунке (в). Ход ошибок единицы веса решения систем уравнений типа (5) с изменением δ_0 оптического центра пластинки оказался незначительным, что видно из рисунка. Отношения σ_0 для $\delta_0 = 0^\circ$ и $\delta_0 = 87^\circ$ не превысили 1.36 для пяти различных наборов случайных ошибок измерений и положений звезд из опорного каталога.

Выводы. Преобразования, с помощью которых можно измеренные координаты звезд на пластинке перевести в общую плоскость, полученную азимутальной полярной проекцией небесной сферы на нее, представляются нам несложными. Кроме того, вес отдельных наблюдений практически не зависит от прямого восхождения оптического центра пластинки и лишь незначительно зависит от склонения центра пластинки. Это позволяет выбрать систему координат, описываемую выражениями (6), в качестве общей для совместной обработки массива перекрывающихся пластинок, оптические центры которых могут находиться на разных расстояниях от полюса или экватора небесной сферы. В дальнейшем задача будет сводиться к решению методом последовательных приближений системы условных уравнений типа [3]:

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{V} + \sum_m \mathbf{C}_m \Delta\mathbf{P}_m = \mathbf{F}_0,$$

где $\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{V}$ — векторы поправок к идеальным координатам опорных звезд, вычисленных по каталожным данным; $\Delta\mathbf{P}_m$ — вектор поправок к линейным параметрам модели m -й пластинки. Элементы матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_m, \mathbf{F}_0$ зависят от значений измеренных координат звезд, переведенных в общую плоскость (u, v), и принятых исходных значений постоянных пластинок и идеальных координат звезд. Их конкретный вид приведен в [3].

1. Граур А. Е. Математическая картография. — Л.: Учпедгиз, 1938. — 312 с.
2. Яценко А. П. // Кинематика и физика небес. тел. — 1985. — 1, № 3. — С. 46—52.
3. Яцкив Я. С., Курьянова А. П. // Там же. — 1, № 1. — С. 18—26.
4. Eichhorn H. The direct use of spherical coordinates in focal plane astrometry // Astron. and Astrophys. — 1985. — 150, N 2. — P. 251—255.
5. Eichhorn H., Goode W. D., Lukac C. F., Murphy J. K. Accurate positions of 502 stars in the region of the Pleiades // Mem. Roy. Astron. Soc. — 1970. — 73, N 2. — P. 125—151.
6. Stock J. Block adjustment in photographic astrometry // Rev. mex. astron. y astrofis. — 1982. — 6. — P. 115—118.

Глав. астроном. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 11.05.86,
после доработки 08.01.87