УДК 528.81:502.330.15.

О возможности оптимального выбора сети станций для определения длин хорд между ними по синхронным измерениям дальностей до ИСЗ.

I. Модельная задача

Г. Т. Яновицкая

С помощью сингулярного анализа матрицы коэффициентов при неизвестных в геометрическом методе определения расстояний между точками на поверхности Земли и модельных синхронных измерений дальностей до ИСЗ с четырех станций для трех различных конфигураций сетей получен параметр оптимальной конфигурации сети.

ON A POSSIBILITY OF THE OPTIMUM CHOICE OF NETWORK OF STATIONS FOR DETERMINING THE CHORDS LENGTHS BETWEEN THEM USING THE SINCHRONOUS SATELLITE RANGING MEASUREMENTS. I. MODEL PROBLEM, by Yanovitskaya G. T. — A parameter of optimum network configuration is obtained using the singular analysis of the matrix of coefficients in the geometric method of determining the distances between points on the Earth's surface as well as the model sinchronous measurements of the distances to satellites from four stations for three different network configurations.

Существует несколько методов для определения расстояний между пунктами на поверхности Земли по наблюдениям ИСЗ (геометрический, динамический, полудинамический и др.). Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками. Геометрический метод, несмотря на свои недостатки (не может дать ни ориентировки, ни привязки созданной этим методом сети к заданному референц-эллипсоиду), обладает рядом преимуществ (может обеспечить внутреннюю согласованность сети; возможность использования малого количества наблюдений; точность полученных результатов не зависит от точности геофизических параметров). Поэтому в определенных ситуациях удобно воспользоваться именно этим методом. Однако не все существующие сети станций могут дать строгое геометрическое решение. Иногда встречаются критические конфигурации сетей станций. В связи с этим естественно возникает задача оптимального выбора сети станций для определения длин хорд между ними. Это особенно важно для сетей, в состав которых входят передвижные станции лазерной локации ИСЗ.

В настоящей работе решается модельная задача определения ошибок длин хорд ΔD_{ij} между четырьмя станциями (рис. 1), ведущими синхронные измерения дальностей до ИСЗ. Рассматриваются три различные конфигурации сетей станций (рис. 2). В качестве «измеренных» дальностей ρ_{is} принимаются дальности, вычисленные по программе «Киев — Геодинамика». [4] с учетом всевозможных возмущений значения дальностей до ИСЗ на синхронные моменты. Для решения поставленной задачи находим параметр, характеризующий оптимальную сеть станций.

Известно, что если четыре плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$$

проходят через одну и ту же точку, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

а левые части их уравнений линейно зависимы, т. е. линейно зависимы и элементы **уравнения (1).**

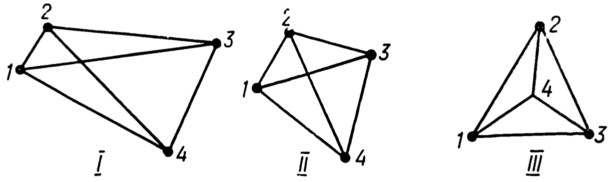
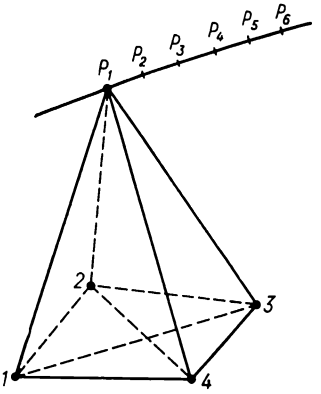


Рис. 2. Конфигурации сетей станций наблюдений ИСЗ



◄ *Рис. 1.* Модель четырех станций для синхронных измерений расстояний до ИСЗ

В сети, построенной по измеренным расстояниям до ИСЗ, это условие можно представить в другом виде — как условие между измеренными с четырех пунктов расстояниями до ИСЗ и длинами шести хорд между этими **пунктами [1]:**

$$F = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} & \cos\varphi_{14} \\ \cos\varphi_{21} & 1 & \cos\varphi_{23} & \cos\varphi_{24} \\ \cos\varphi_{31} & \cos\varphi_{32} & 1 & \cos\varphi_{34} \\ \cos\varphi_{41} & \cos\varphi_{42} & \cos\varphi_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где

$$\cos\varphi_{ij} = (\rho_{is}^2 + \rho_{js}^2 - D_{ij}^2)/2\rho_{is}\rho_{js}; \tag{3}$$

ρ_{is} $(i=1, \ldots, 4)$ — измеренные расстояния спутник — станция; φ_{ij} — неизвестный угол, образованный в точке P_s пересечением дальностей ρ_{is} с двух концов P_i и P_j одной хорды; P_i $(i=1, \ldots, 4)$ — станция наблюдений; P_s — спутник в положении видимости со всех четырех станций; D_{ij} $(i, j=1, \ldots, 4;\ i \neq j)$ — расстояния (хорды) между станциями.

Уравнение (2) выражает нелинейную зависимость между шестью неизвестными хордами D_{ij} и измеренными дальностями ρ_{is} до ИСЗ. Шесть таких зависимостей, полученных из шести синхронных наблюдений положений ИСЗ P_s $(s=1, \ldots, 6)$, образуют систему нелинейных уравнений для определения длин хорд между станциями.

Решение такой системы в общем случае представляет значительные трудности. Будем считать, что длины хорд известны с точностью до некоторых малых поправок. Поэтому линеаризация уравнения (2) дает зависимость между неизвестными поправками к длинам хорд ΔD_{ij} и погрешностями $\Delta\rho_{is}$ наблюдаемой дальности до ИСЗ

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \frac{2M_{ij}D_{ij}}{\rho_{is}\rho_{js}} \Delta D_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\rho_{is}^2} \sum_{j=1}^{4} (1-\delta_{ij}) \frac{M_{ij}(\rho_{is}^2 + D_{ij}^2 - \rho_{js}^2)}{\rho_{js}} \Delta\rho_{is} + F_0, \tag{4}$$

где M_{ij} — минор соответствующего $\cos\varphi$ в определителе (2); δ_{ij} — символ Кронекера; F_0 — значение определителя (2), вычисленное по измеренным значениям дальностей ρ_{is} и предварительно известным значениям длин хорд D_{ij}.

Таким образом, s линейных уравнений (4) (при $s \geqslant 6$) позволяют определить неизвестные поправки к шести хордам в сети четырех станций из синхронных наблюдений дальностей до ИСЗ.

Как уже отмечалось, система s линейных уравнений (4) плохо обусловлена (определитель этой системы близок к нулю). Наиболее надежным методом для решения таких систем является метод матричной факторизации, называемой сингулярным разложением. Этот метод реализован программой [2] на языке ФОРТРАН. По определению [2], сингулярным разложением действительной $(m\times n)$-матрицы $\mathbf{A}$ называется всякая ее факторизация вида $\mathbf{A}=\mathbf{U\Sigma V^T}$, где $\mathbf{U}$ — ортогональная $(m\times m)$-матрица; $\mathbf{V}$ — ортогональная $(n\times n)$-матрица; $\mathbf{V^T}$ — соответствующая транспонированная матрица; $\mathbf{\Sigma}$ — диагональная $(m\times n)$-матрица, у которой $\sigma_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\sigma_{ii}=\sigma_i\geqslant 0$. Величины σ_i называются сингулярными числами матрицы $\mathbf{A}$.

В общем виде решение произвольной системы линейных уравнений с использованием сингулярного разложения можно представить следующим образом [2]. Пусть $\mathbf{A}$ — заданная $(m\times n)$-матрица, причем $m\geqslant n$, а $\mathbf{b}$ — заданный вектор размерности m. Нужно найти все векторы $\mathbf{x}$, для которых

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{5}$$

Используя сингулярное разложение матрицы $\mathbf{A}$, линейную систему (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{U\Sigma V^T x} = \mathbf{b}. \tag{6}$$

Введем замену

$$\mathbf{z} = \mathbf{V^T x} \quad \text{и} \quad \mathbf{d} = \mathbf{U^T b}, \tag{7}$$

тогда вместо (6) получаем

$$\mathbf{\Sigma z} = \mathbf{d}. \tag{8}$$

Эта система диагональная и, следовательно,

$$z_j = d_j/\sigma_j, \quad \text{если } \sigma_j \neq 0. \tag{9}$$

Средние значения поправок к длинам хорд и их средние квадратичные ошибки (в м)

Сеть	σ_ρ	$\overline{\Delta D}_{12}\pm\sigma_1$	$\overline{\Delta D}_{13}\pm\sigma_2$	$\overline{\Delta D}_{14}\pm\sigma_3$
I	0.03	1.20±0.10	3.57±0.41	5.27±0.36
	0.1	1.14±0.35	3.35±1.37	5.07±1.20
	0.2	1.06±0.70	3.03±2.73	4.78±2.39
	0.5	0.82±1.76	2.10±6.23	3.93±5.98
II	0.03	5.44±0.40	−2.48±0.52	−12.78±0.47
	0.1	5.57±1.33	−2.32±1.72	−12.63±1.56
	0.2	5.74±2.65	−2.09±3.44	−12.39±3.12
	0.5	6.27±6.62	−1.42±8.59	−11.75±7.81
III	0.03	1.86±0.24	11.29±0.21	5.47±0.12
	0.1	1.93±0.79	11.36±0.71	5.51±0.41
	0.2	2.03±1.59	11.46±1.42	5.56±0.83
	0.5	2.34±3.97	11.76±3.54	5.73±2.06

Подстановка (9) в (7) дает

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}. \tag{10}$$

Основная цель — найти такие ортогональные матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, чтобы матрица $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V}=\Sigma$ стала диагональной. Алгоритм [2] нахождения такой матрицы включает два этапа. Первый этап заключается в приведении $\mathbf{A}$ к двухдиагональной форме, т. е. матрице, у которой ненулевыми могут быть лишь элементы диагонали и первой наддиагонали. Второй этап — итерационный процесс, в котором наддиагональные элементы уменьшаются до пренебрежимо малой величины, что дает требуемую диагональную матрицу.

Правильное использование сингулярного разложения матрицы заключается во введении границы τ, отражающей точность исходных данных и точность используемой в ЭВМ плавающей арифметики. Всякое сингулярное число $\sigma_j > \tau$ приемлемо. Любое $\sigma_j < \tau$ рассматривается как пренебрежимо малое, и соответствующему значению неизвестного может быть придано произвольное значение. В таких случаях обычно полагают $x_j=0$, если $\sigma_j \leqslant \tau$.

Используя описанный алгоритм, мы составили программное обеспечение, позволяющее по синхронным наблюдениям на четырех станциях определять поправки к хордам сети, их средние квадратичные ошибки и число C обусловленности системы уравнений (4) [2]: $C=\sigma_{max}/\sigma_{min} \geqslant \geqslant 1$, где σ_{max} и σ_{min} — соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа. Число обусловленности C — мера вырожденности матрицы коэффициентов при неизвестных. Так как система линейных уравнений (4) определяется той или иной сетью станций, то величина $H=1/C=\sigma_{min}/\sigma_{max}$ может быть сравнительной характеристикой конфигурации сети станций. Назовем число H мерой надежности сети. Чем больше это число, тем сеть станций более пригодна для определения поправок к длинам хорд по синхронным наблюдениям с четырех станций и тем более надежно полученное решение. Число H (как сравнительную характеристику конфигурации сети станций) можно использовать при планировании эксперимента по созданию такой сети.

Для примера использования описанной методики определим поправки к длинам хорд трех различных конфигураций сетей станций, входящих в состав спутниковой системы ГЕОСС — РЕА [3]: I. Четыре станции расположены по углам сильно вытянутого четырехугольника площадью $S_1=14.87$ Мм^2 (рис. 2, *I*); II. Четыре станции расположены по углам четырехугольника с примерно равными сторонами и диагоналями и площадью $S_2=0.97$ Мм^2 (рис. 2, *II*); III. Три станции образуют вокруг центральной станции почти равносторонний треугольник площадью $S_3=0.55$ Мм^2 (рис. 2, *III*).

$\overline{\Delta D}_{23} \pm \sigma_4$	$\overline{\Delta D}_{24} \pm \sigma_5$	$\overline{\Delta D}_{34} \pm \sigma_6$	Мера надежности сети станций (H)
3.60±0.34	6.28±0.35	3.43±0.22	$0.32 \cdot 10^{-4}$
3.42±1.14	6.08±1.16	3.32±0.72	
3.16±2.28	5.81±2.32	3.16±1.44	
2.37±5.70	4.98±5.80	2.68±3.60	
−11.17±0.36	−3.26±0.72	6.69±0.55	$0.17 \cdot 10^{-4}$
−11.05±1.19	−3.03±2.39	6.86±1.83	
−10.88±2.38	−2.69±4.78	7.10±3.66	
−10.39±5.94	−1.70±11.95	7.85±9.15	
−6.98±0.24	−2.88±0.14	0.38±0.15	$0.44 \cdot 10^{-3}$
−6.90±0.81	−2.84±0.45	0.43±0.48	
−6.80±1.62	−2.78±0.90	0.49±0.97	
−6.48±4.05	−2.60±2.26	−0.69±2.42	

Разумеется, можно выбрать и любую другую модель четырех станций при условии, что ИСЗ, находящийся на высоте h над поверхностью Земли, будет синхронно наблюдаться со всех станций сети.

Изложенный алгоритм и программы использованы для определения поправок к длинам шести хорд каждой из трех описанных сетей по модельным синхронным наблюдениям дальностей до ИСЗ, летящего на высоте 12 200 км над поверхностью Земли и наблюдаемого одновременно с каждой из станций сети на трех прохождениях. Продолжительность каждого прохождения выбрана равной примерно 95 мин. На каждом из них взято 20 равномерно распределенных положений ИСЗ. Система линейных уравнений (4) решалась для каждой из описанных сетей станций в предположении, что погрешности $\Delta\rho_{is}$ моделируются датчиком случайных чисел на интервале (0, ± 1 м), заданным стандартным отклонением σ_ρ и средним нормального распределения, равным нулю.

В таблице приведены средние (по 20 вариантам) значения поправок к длинам хорд и их средние квадратичные ошибки. В последней графе приведены значения меры надежности H сетей станций.

Анализ приведенных результатов позволяет сделать следующие выводы: 1. Чем точнее определены дальности до ИСЗ, тем меньше ошибки определения приправок к длинам хорд. 2. Конфигурация сети типа III — наилучшая из рассматриваемых, так как для нее отношение средней квадратичной ошибки определения поправок к длинам хорд к средней квадратичной ошибке расстояния до ИСЗ изменяется для различных хорд от 4 до 8, тогда как для конфигурации I эта величина меняется от 4 до 14 и для сети II — от 12 до 24. Поэтому второе место занимает конфигурация сети станций I, а затем — II. 3. Вывод 2 можно было сделать и не решая систему уравнений (4), а лишь определив меру надежности H. Действительно, H — наибольшее у сети станций III и наименьшее — у сети II (таблица).

Следовательно, введенная нами мера H надежности сети позволяет на этапе планирования сети выбрать оптимальную ее конфигурацию.

Во второй части работы мы приведем результаты определения длин хорд между станциями сетей по конкретным измерениям дальности до ИСЗ всеми станциями ГЕОСС — РЕА.

Автор выражает благодарность Я. С. Яцкиву и К. Х. Нурутдинову за помощь и полезные советы при выполнении настоящей работы.

1. *Аардом Л.* Точность геометрической сети, получаемой из синхронных измерений расстояний до ИСЗ // Использование искусственных спутников для геодезии.— М.: Мир, 1975.— С. 20—35.
2. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.— 279 с.
3. *Яцкив Я. С., Монтаг Х.* О создании сети опорных геодинамических станций на территории Восточной Европы и Азии // Наблюд. искусств. спутников Земли.— 1984.— Вып. 21.— С. 538—552.
4. *Яцкив Я. С., Тарадий В. К., Цесис М. Л. и др.* Вращение Земли по данным лазерных наблюдений ИСЗ «LAGEOS» // Там же.— С. 461—466.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 05.05.86,
после доработки 02.07.86