

УДК 52—64

## Перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц

М. И. Мищенко

Изучается перенос поляризованного излучения в однородной плоскопараллельной среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц (бесконечных цилиндров), при падении внешнего линейно поляризованного излучения перпендикулярно направлению ориентации частиц. Показано, что такая задача рассеяния является двумерной по геометрии; векторное уравнение переноса расщепляется на два независимых скалярных двумерных уравнения переноса, которые допускают строгое аналитическое решение. Приведены основные уравнения и формулы для случая полубесконечной среды.

*POLARIZED LIGHT TRANSFER IN A MEDIUM CONTAINING PERFECTLY ORIENTED ELONGATED PARTICLES, by Mishchenko M. I.*— Transfer of polarized light is studied in a plane parallel medium containing perfectly oriented very elongated particles (infinite cylinders). External linearly polarized radiation is assumed to fall perpendicularly to the direction of particles' orientation. It is shown that the transfer problem is two-dimensional one, and the vectorial transfer equation is decomposed into the set of two independent scalar transfer equations which admit explicit analytical solution. The main formulae are derived for the case of semi-infinite medium.

**Введение.** Изучение оптических свойств анизотропных сред, содержащих частично или полностью ориентированные несферические частицы, — важная часть многих задач астрофизики и атмосферной оптики. Поскольку рассчитать характеристики электромагнитного излучения, рассеянного на несферических частицах произвольной формы и ориентации, очень сложно, определенное значение приобретает аппроксимация этих частиц простейшей несферической частицей, для которой задача рассеяния решена строго, — бесконечным цилиндром кругового сечения [3, 7]. Разумеется, такая аппроксимация достаточно грубая, однако в природе встречаются частицы сильно вытянутой формы, для которых это приближение дает хорошие результаты. Такими, например, являются ледяные иглы в земных кристаллических облаках, достигающие в длину 3 мм при диаметре до 150 мкм [3]. Приближение бесконечных цилиндров часто используется при изучении оптических свойств межзвездных пылинок, имеющих в основном несферическую форму и частично ориентированных, о чем свидетельствует факт межзвездной поляризации света [6, 9].

Известно [17], что при падении плоской электромагнитной волны под углом  $\alpha$  к оси бесконечного кругового цилиндра рассеянное излучение лежит на поверхности конуса с углом  $2\alpha$  при вершине. Ось этого конуса совпадает с осью цилиндра. Если цилиндр того же диаметра имеет конечную длину  $L$ , то результатом рассеяния будет расходящаяся сферическая волна, причем амплитудные функции для конечного цилиндра при  $L \gg \tilde{\lambda}$  и  $L \gg d$  ( $\tilde{\lambda}$  — длина световой волны,  $d$  — диаметр цилиндра) отличаются от аналогичных характеристик света, рассеянного бесконечным цилиндром, лишь дополнительным множителем [3]

$$R(L) = \frac{\sin [(\pi L/\tilde{\lambda})(\cos \varphi - \cos \alpha)]}{(\pi L/\tilde{\lambda})(\cos \varphi - \cos \alpha)} \cdot \frac{2\pi L}{\tilde{\lambda}}, \quad (1)$$

обусловленным дифракцией на концах цилиндра и имеющим асимптотику  $R(L) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 2\pi\delta(\cos \varphi - \cos \alpha)$ . Здесь  $\varphi$  — угол, образованный рассеянным излучением с осью цилиндра;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом, интенсивность рассеянного излучения имеет максимум в направлениях, лежащих на поверхности конуса, вдоль которого рассеивает свет бесконечный цилиндр. Этот максимум оказывается тем более резким, чем больше длина цилиндра. Такая простая зависимость и позволяет оценить точность результатов при замене конечной сильно вытянутой частицы бесконечным цилиндром.

В облаках межзвездной пыли и в атмосферах некоторых планет отмечается ориентация несферических частиц. При изучении оптических свойств таких сред часто используется модель бесконечных цилиндров, ориентированных либо в некоторой плоскости [3, 4, 6, 7], либо полностью ориентированных вдоль некоторого выделенного направления [4, 5, 7, 16].

Задача переноса поляризованного излучения в анизотропных средах настолько сложна, что трудно ожидать серьезных успехов от аналитических методов ее решения в общем случае. Поэтому важное значение приобретают те редкие частные случаи, когда указанные методы позволяют решить задачу до конца. С одной стороны, точные решения векторного уравнения переноса при некоторых упрощающих предположениях в той или иной степени применимы на практике, а с другой — являются предельным случаем строго поставленных более общих задач и необходимы при проверке численных и приближенных методов.

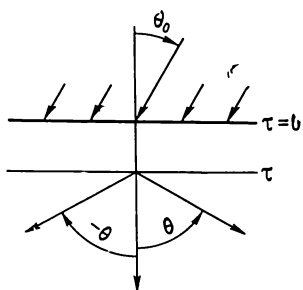
Один из таких предельных случаев — изотропная среда, состоящая из сферических частиц, — приближение, обычно используемое при интерпретации поляриметрических наблюдений планет. Аппроксимация сильно вытянутых полностью ориентированных частиц бесконечными цилиндрами позволяет рассмотреть другой частный случай, допускающий простое и точное решение векторного уравнения переноса.

Бесконечные цилиндры произвольного сечения обладают замечательным свойством: при падении плоской электромагнитной волны перпендикулярно их оси рассеянная волна на больших расстояниях является цилиндрической, плоскость рассеяния — перпендикулярной оси цилиндра, а задача рассеяния — двумерной по геометрии. Здесь под двумерностью мы понимаем зависимость характеристик рассеянного излучения только от двух координат, заданных в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Если рассеивающая среда состоит из полностью ориентированных цилиндров и свет падает перпендикулярно их осям, то указанная двумерность будет сохраняться при каждом акте рассеяния, приводя к двумерности задачи переноса поляризованного излучения. Поскольку в данном случае плоскость рассеяния всегда сохраняет неизменное положение, перпендикулярное осям частиц, то фазовая матрица совпадает с матрицей рассеяния. Если цилиндры имеют круговые (или хаотически ориентированные) сечения, перпендикулярные направлению ориентации, то фазовая матрица, соответствующая набору параметров Стокса  $\{I_l, I_r, U, V\}$  будет иметь вид [1, гл. 8; 2, гл. 15]:

$$\hat{F}(\theta) = \begin{bmatrix} \chi_l(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_r(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi(\theta) & \gamma(\theta) \\ 0 & 0 & -\gamma(\theta) & \xi(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния. Конкретный вид функций, входящих в матрицу (2), определяется показателем преломления цилиндров и их распределением по диаметрам.

Таким образом, если в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц, аппроксимировать эти частицы бесконечными цилиндрами и рассмотреть случай, когда внешнее линейно поляризованное излучение ( $U=V=0$ ) падает перпендикулярно направлению ориентации частиц, то фазовая матрица будет иметь вид (2), и рассеянное излучение также будет линейно поляризованным. При этом свет, поляризованный параллельно осям частиц, будет рассеиваться независимо от света, поляризованного перпендикулярно осям, и векторное уравнение переноса для плоского слоя трехмерной среды



Координаты в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации частиц

но, из (2) следует, что полное решение задачи потребует рассмотрения еще системы двух, не зависящих от предыдущих, уравнений переноса.

Понятно, что вследствие конечной длины реальных частиц свет будет рассеиваться не только в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации частиц. Но в этой плоскости интенсивность рассеянного излучения будет максимальной и, согласно (1), сделанные приближения будут тем точнее, чем больше длина частиц.

Итак, при отмеченных предположениях перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из сильно вытянутых полностью ориентированных частиц, при падении внешнего линейно поляризованного излучения, лежащего в плоскости, перпендикулярной направлению их ориентации, описывается двумя независимыми скалярными двумерными уравнениями переноса

$$\frac{dI_j}{ds} = -\alpha_j I_j + \epsilon_j, \quad j = l, r,$$

где  $\alpha_j, \epsilon_j$  — соответственно коэффициенты ослабления и излучения; индексы  $l$  и  $r$  соответствуют излучению, поляризованному параллельно и перпендикулярно направлению ориентации частиц. В случае плоскопараллельной среды эти уравнения приобретают вид

$$\cos \theta \frac{dI_j(\tau_j, \theta)}{d\tau_j} = -I_j(\tau_j, \theta) + B_j(\tau_j, \theta), \quad (3)$$

где  $\tau_j$  — оптическая глубина;  $B_j(\tau_j, \theta)$  — функции источников. Считается, что границы среды параллельны осям частиц, отсчет угла показан на рисунке, плоскость которого перпендикулярна направлению ориентации частиц, и является таким образом плоскостью рассеяния. Для функций источников запишем выражение

$$B_j(\tau_j, \theta) = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_j(\tau_j, \theta') \chi_j(\theta - \theta') d\theta' + B_j^*(\tau_j, \theta), \quad (4)$$

где  $\lambda_j = \sigma_j / \alpha_j$  — альбеда однократного рассеяния;  $\sigma_j$  — коэффициенты рассеяния;  $\chi_j(\theta)$  — индикатрисы рассеяния, являющиеся элементами матрицы рассеяния (2) и нормированные согласно условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_j(\theta) d\theta = 1. \quad (5)$$

Функции  $B_j^*(\tau_j, \theta)$  описывают внутренние источники излучения. Формулы для расчета  $\lambda_j$ ,  $\alpha_j$  и функций  $\chi_j(\theta)$  для бесконечных круговых цилиндров с произвольным комплексным показателем преломления приведены в [2, гл. 15; 1, гл. 8]. В [1, приложение В] приведена соответствующая программа для расчетов на ЭВМ.

Для решения уравнений (3), (4) полностью применимы методы, разработанные для решения обычного трехмерного скалярного уравнения переноса (см., например, [12, 18]). Получить решение рассматриваемого частного вида векторного уравнения переноса даже проще, чем обычного скалярного уравнения, поскольку задача рассеяния является плоской и нет необходимости выделять азимутальную зависимость, разлагая индикатрисы рассеяния  $\chi_j(\theta)$  в ряды по полиномам Лежандра и используя теорему сложения для сферических функций.

Приведем основные формулы, относящиеся к случаю полубесконечной однородной среды. При этом, как правило, выводы формул будем опускать, поскольку они сводятся к почти полному дублированию соответствующих выкладок при получении аналогичных выражений в скалярном случае для трехмерной среды.

**Задача с параллельным внешним потоком.** Пусть внешний параллельный поток линейно поляризованного излучения  $\pi S_j$  ( $j=l, r$ ) падает под углом  $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$  на границу однородной полубесконечной среды, состоящей из полностью ориентированных цилиндрических частиц бесконечной длины (рисунок). Тогда выражение для функций источников дается формулой (4), где  $B_j^*(\tau_j, \theta, \theta_0) = \frac{\lambda_j}{2} S_j \chi_j(\theta - \theta_0) \times \exp(-\tau_j / \cos \theta_0)$ . Определив матрицу отражения света полубесконечной средой посредством соотношений

$$\hat{\rho}(\theta, \theta_0) = \begin{bmatrix} \rho_l(\theta, \theta_0) & 0 \\ 0 & \rho_r(\theta, \theta_0) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$S_j \rho_j(\theta, \theta_0) \cos \theta_0 = I_j(0, \pi - \theta, \theta_0), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2],$$

получим (индекс  $j$  для простоты опускаем)

$$S \rho(\theta, \theta_0) (\cos \theta + \cos \theta_0) = B(0, \pi - \theta, \theta_0) + \frac{\cos \theta}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta, \theta') B(0, \theta', \theta_0) d\theta', \quad (7)$$

$$B(0, \theta, \theta_0) = \frac{\lambda}{2} S \left[ \chi(\theta - \theta_0) + \frac{\cos \theta_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta', \theta_0) \chi(\theta + \theta' + \pi) d\theta' \right]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем следующий двумерный аналог нелинейного интегрального уравнения Амбарцумяна

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \theta_0) (\cos \theta + \cos \theta_0) = & \frac{\lambda}{2} \left[ \chi(\theta + \theta_0 + \pi) + \frac{\cos \theta_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta', \theta_0) \chi(\theta' - \theta) d\theta' + \right. \\ & + \frac{\cos \theta}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta, \theta') \chi(\theta' - \theta_0) d\theta' + \frac{\cos \theta \cos \theta_0}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta, \theta') d\theta' \times \\ & \left. \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta'', \theta_0) \chi(\theta'' + \theta' + \pi) d\theta'' \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Для элементов матрицы отражения справедливы следующие соотношения симметрии:  $\rho(\theta, \theta_0) = \rho(\theta_0, \theta) = \rho(-\theta, -\theta_0)$ ,  $\theta, \theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Уравнение (9) можно решать, например, методом итераций. Использование соотношения (30) при консервативном или почти почти консер-

вативном рассеянии позволяет существенно ускорить сходимость итерационного процесса [15].

**Задача для двусторонней бесконечности.** Пусть имеется бесконечная двумерная среда с источниками неограниченной мощности, расположенными на минус бесконечности. Уравнение переноса (индекс  $j$  по-прежнему опускаем) в этом случае имеет вид

$$\cos \theta \frac{dI_\infty(\tau, \theta)}{d\tau} = -I_\infty(\tau, \theta) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_\infty(\tau, \theta') \chi(\theta - \theta') d\theta'. \quad (10)$$

При неконсервативном рассеянии должно выполняться условие  $I_\infty(\tau, \theta) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Главная мода решения уравнения (10) дается выражением

$$I_\infty(\tau, \theta) = i(\theta) \exp(-k\tau), \quad (11)$$

где функция  $i(\theta) = i(-\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$i(\theta)(1 - k \cos \theta) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\theta') \chi(\theta - \theta') d\theta', \quad (12)$$

а показатель диффузии  $k$  — минимальный на интервале  $[0, 1]$  корень характеристического уравнения (12). Далее считается, что

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} i(\theta) d\theta = 1. \quad (13)$$

Из (5) и (12) следует, что при консервативном рассеянии ( $\lambda = 1$ ) и произвольной индикатрисе рассеяния  $k = 0$  и  $i(\theta) \equiv 1$ .

При изотропном рассеянии из выражения (12) получаем

$$i(\theta) = (1 - k \cos \theta)^{-1}. \quad (14)$$

Подстановка (14) в (13) дает

$$k = \sqrt{1 - \lambda^2}. \quad (15)$$

Таким образом, как и в случае одномерной среды, когда  $k = \sqrt{1 - \lambda}$ , в двумерной среде при изотропном рассеянии для показателя диффузии имеется явное выражение.

Представляя индикатрису рассеяния в виде разложения в ряд Фурье, имеем

$$\chi(\cos \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta, \quad (16)$$

где

$$x_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \chi(\cos \theta) \cos n\theta d\theta, \quad (17)$$

причем всегда  $|x_n| < 1$ . Из (12) и (16) можно найти

$$i(\theta)(1 - k \cos \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n c_n \cos n\theta, \quad (18)$$

где

$$c_n = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} i(\theta) \cos n\theta d\theta. \quad (19)$$

Из (18) с использованием формул сложения для тригонометрических функций нетрудно получить рекуррентное соотношение для нахождения  $c_n$ :

$$c_{n+1} + c_{n-1} = 2(1 - \lambda x_n) c_n / k, \quad (20)$$

причем  $c_0=1$ , а  $c_1=(1-\lambda)/k$ . С помощью (20) характеристическое уравнение для определения  $k$  можно представить в виде следующей непрерывной дроби:

$$1 - \lambda = \frac{k^2}{2(1 - \lambda x_1) - \frac{k^2}{2(1 - \lambda x_2) - \dots}}. \quad (21)$$

Можно показать, что если индикатриса рассеяния представима только  $n$  членами разложения в ряд Фурье, то характеристическое уравнение является полиномом  $n$ -й степени относительно  $k^2$ .

При почти консервативном рассеянии ( $1-\lambda \ll 1$ ) из (18), (20) и (21) следуют асимптотические представления

$$k = \sqrt{2(1-\lambda)(1-x_1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{1}{2(1-x_2)} \right) (1-\lambda) + O[(1-\lambda)^2] \right\}, \quad (22)$$

$$i(\theta) = 1 + \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-x_1}} \cos \theta + \left( 1 + \frac{\cos 2\theta}{1-x_2} \right) (1-\lambda) + O[(1-\lambda)^{3/2}]. \quad (23)$$

**Соотношения инвариантности.** Исходя из обобщенного принципа инвариантности [10, 11], можно записать для всех  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\tau, \tau_1 \geq 0$

$$I(\tau + \tau_1, \theta, \theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\tau_1, \theta', \theta_0) I(\tau, \theta, \theta') d\theta' + I(\tau, \theta, \theta_0) \times \\ \times \exp(-\tau_1/\cos \theta_0) + I(\tau_1, \theta, \theta_0) \exp(-\tau/\cos \theta) \Theta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right), \quad (24)$$

где  $\Theta(x)$  — единичная функция скачка. Из (24) непосредственно следует формула удвоения [11]

$$I(2\tau, \theta, \theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\tau, \theta', \theta_0) I(\tau, \theta, \theta') d\theta' + \\ + I(\tau, \theta, \theta_0) \left[ \exp(-\tau/\cos \theta_0) + \exp(-\tau/\cos \theta) \Theta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \right], \quad (25)$$

использование которой дает простой алгоритм численного расчета внутреннего поля излучения [8]. Следует иметь в виду асимптотическую формулу для интенсивности излучения в глубоких слоях среды ( $\tau \gg 1$ ) [12, гл. II]:

$$I^{as}(\tau, \theta, \theta_0) = i(\theta) u(\theta_0) \cos \theta_0 \exp(-k\tau), \quad (26)$$

где функция  $u(\theta_0)$  (граничное значение интенсивности в задаче Милна) нормирована согласно условию

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(\theta) i(\theta) \cos \theta d\theta = 1. \quad (27)$$

Рассматривая в бесконечной среде отдельно нижнее и верхнее полупространства, при учете (11) получаем следующие два соотношения инвариантности ( $\theta \in [-\pi, \pi]$ ) [11]:

$$i(\theta) \exp(-k\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\tau, \theta, \theta') i(\theta') d\theta' + i(\theta) \exp(-\tau/\cos \theta) \Theta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right), \quad (28)$$

$$i(\pi - \theta) \exp(k\tau) = MI(\tau, \theta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\tau, \theta, \theta') i(\pi - \theta') d\theta' + \\ + i(\pi - \theta) \exp(-\tau/\cos \theta) \Theta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right), \quad (29)$$

где  $I(\tau, \theta)$  — интенсивность излучения в задаче Милна;  $M$  — нормировочный множитель. Полагая в (28) и (29)  $\tau=0$  и учитывая, что, по определению,  $u(\theta) = I(0, \pi - \theta)$ ,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ , получаем два важных аналога соотношений ван де Хюлста — Соболева [18, гл. 5; 12, гл. II]:

$$i(\pi - \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta, \theta') i(\theta') \cos \theta' d\theta', \quad (30)$$

$$i(\theta) = Mu(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\theta, \theta') i(\pi - \theta') \cos \theta' d\theta'. \quad (31)$$

Из (30) и (31) с учетом (27) находим

$$M = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i^2(\theta) \cos \theta d\theta. \quad (32)$$

Эта величина при почти консервативном рассеянии, как следует из (32) и (23), дается выражением

$$M = 2 \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-x_1}} + O[(1-\lambda)^{3/2}]. \quad (33)$$

Использование формул (28) и (29) с учетом (22), (23) и (33) позволяет получить консервативный предел выражения (29) [11]:

$$I_0(\tau, \theta) = \sqrt{2}(1-x_1)\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_0(\tau, \theta, \theta') \cos \theta' d\theta' - \\ - \left[ 1 - \exp(-\tau/\cos \theta) \Theta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \right] \cos \theta. \quad (34)$$

Здесь и далее нижним индексом «0» будем отмечать величины при консервативном рассеянии.

Из (34) при  $\tau=0$  следует аналог известной формулы Чандрасекара [13, § 29.3]:

$$u_0(\theta) = \cos \theta + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho_0(\theta, \theta') \cos^2 \theta' d\theta'. \quad (35)$$

Наконец, воспользовавшись аналогом соотношения инвариантности Чандрасекара [13, § 29.1]

$$I(\tau, \pi - \theta, \theta_0) = \rho(\theta, \theta_0) \exp(-\tau/\cos \theta_0) \cos \theta_0 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\tau, \theta', \theta_0) \rho(\theta, \theta') \cos \theta' d\theta', \quad (36)$$

которое вытекает из (24) при  $\tau=0$ , и выражениями (30) и (31), получаем следующие квадратичные по интенсивности интегралы уравнения переноса в двумерной среде [14] ( $\tau, \tau_1 \geq 0$ ;  $\theta, \theta_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \pi - \theta', \theta) I(\tau_1, \theta', \theta_1) \cos \theta' d\theta' = I(\tau_1, \pi - \theta, \theta_1) \exp(-\tau/\cos \theta) \cos \theta - \\ - I(\tau, \pi - \theta_1, \theta) \exp(-\tau_1/\cos \theta_1) \cos \theta_1, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \theta', \theta) i(\pi - \theta') \cos \theta' d\theta' = -i(\pi - \theta) \exp(-\tau/\cos \theta) \cos \theta, \quad (38)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\tau, \theta', \theta) i(\theta') \cos \theta' d\theta' = [Mu(\theta) \exp(-k\tau) - i(\theta) \exp(-\tau/\cos \theta)] \cos \theta. \quad (39)$$

Приведем также две формулы, относящиеся к случаю почти консервативного рассеяния ( $1 - \lambda \ll 1$ ). По аналогии с трехмерной средой имеем [12, гл. II]:

$$\rho(\theta, \theta_0) = \rho_0(\theta, \theta_0) - \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-x_1}} u_0(\theta) u_0(\theta_0) + O(1-\lambda), \quad (40)$$

$$u(\theta) = u_0(\theta) \left( 1 - \gamma_0 \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-x_1}} \right) + O(1-\lambda), \quad (41)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u_0(\theta) \cos^2 \theta d\theta. \quad (42)$$

Таким образом, мы получили все необходимые соотношения, позволяющие найти поле поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц, при падении внешнего линейно поляризованного излучения перпендикулярно направлению ориентации частиц. Эту задачу можно решить и другим, ставшим уже классическим, методом В. В. Соболева [12, гл. V, VI].

В заключение отметим, что хотя двумерное скалярное уравнение переноса было получено при рассмотрении конкретной физической задачи, область его использования может оказаться шире. Здесь можно указать два обстоятельства. Во-первых, двумерное приближение позволяет учитывать угловую структуру излучения и тем самым свободно от главного недостатка одномерного приближения уравнения переноса, которое в силу своей простоты широко применяется во многих разделах физики. Во-вторых, существуют и другие физические задачи, двумерные по геометрии и приводящие к аналогичным уравнениям. В частности, как оказывается, двумерное интегральное уравнение для функции источников в случае изотропного рассеяния совпадает с уравнением береговой рефракции электромагнитных волн и имеет, таким образом, конкретный физический смысл. Поэтому скалярное двумерное уравнение переноса заслуживает, на наш взгляд, самостоятельного подробного изучения.

1. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.—664 с.
2. ван де Хюлт Г. Рассеяние света малыми частицами.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—536 с.
3. Волковицкий О. А., Павлова Л. Н., Петрушин А. Г. Оптические свойства кристаллических облаков.— Л.: Гидрометеоздат, 1984.—199 с.
4. Воцинников Н. В., Ильин В. Б. Планковские средние сечения лучевого давления для несферических пылинок. I // Астрофизика.— 1982.—18, вып. 4.— С. 616—628.
5. Воцинников Н. В., Ильин В. Б. Давление излучения на несферические пылинки и эффект Пойнтинга — Робертсона // Письма в Астрон. журн.—1983.—9, № 3.— С. 188—192.
6. Воцинников Н. В., Ильин А. Е., Ильин В. Б. Расчет кривых межзвездного поглощения, межзвездной линейной и круговой поляризации // Вестн. Ленинград. ун-та. Серия математика, механика, астрономия.— 1985.— № 15.— С. 67—74.
7. Гринберг М. Межзвездная пыль.— М.: Мир, 1970.—200 с.
8. Длугач Ж. М. Расчет поля излучения в однородной полубесконечной атмосфере // Астрон. журн.— 1976.—53, № 6.— С. 1295—1305.
9. Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А. Распространение и поляризация излучения в космической среде.— М.: Наука, 1979.—424 с.



10. Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. О линейных задачах переноса // Докл. АН СССР.— 1974.—217, № 3.— С. 533—535.
11. Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние поля излучения в полубесконечных атмосферах // Астрон. журн.— 1975.—52, № 2.— С. 217—226.
12. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.—336 с.
13. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.—431 с.
14. Яновицкий Э. Г. Поле излучения в полубесконечной атмосфере при анизотропном рассеянии // Астрон. журн.— 1976.—53, № 5.— С. 1063—1074.
15. Dlugach J. M., Yanoviitskij E. G. The optical properties of Venus and Jovian planets. II. Methods and results of calculations of the intensity of radiation diffusely reflected from semi-infinite homogeneous atmospheres // Icarus.— 1974.—22, N 1.— P. 66—81.
16. Greenberg J. M., Shah G. A. A unified model of interstellar extinction and polarization // Astrophys. J.— 1966.—145, N 1.— P. 63—74.
17. Liou K. N. Electromagnetic scattering by arbitrary oriented ice cylinders // Appl. Opt.— 1972.—11, N 3.— P. 667—674.
18. van de Hulst H. C. Multiple light scattering. Tables, formulas and applications.— London: Acad. press, 1980.—722 p.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,  
Киев

Поступила в редакцию 02.04.86,  
после доработки 26.06.86

## РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 520.626

**МИНИМАЛЬНЫЙ ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ ФУРЬЕ-СПЕКТРОМЕТРА / Щедрин В. В.**

(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 7262—В86)

Написанные на языках MACRO-11 и FORTRAN-IV операционной системы RT-11 программы обеспечивают в реальном времени работу фурье-спектрометра, сохранение и отображение результатов измерения. В качестве интерфейса между аналоговой электроникой управления спектрометром и мини-ЭВМ используется система КАМАК. Программа ввода данных, выделенная в отдельный сегмент, может быть легко изменена и тем самым обеспечивает независимость основных программ от конкретного спектрометра и приборного интерфейса.

Исследована (на примере преобразования Фурье для функции Гаусса) систематическая ошибка дискретного преобразования, зависящая от динамического диапазона используемого аналого-цифрового преобразователя, длины последовательности и конкретных особенностей примененной программы быстрого преобразования Фурье.