

УДК 52—657;52—54

## Определение поля излучения в хромосфере методом инверсии наблюдаемого контура линии

С. А. Григорьева, Р. Б. Теплицкая

Выполнена модификация метода инверсии наблюдаемого контура спектральной линии [6] с использованием локальных *B*-сплайнов второй степени, полиномов, кубических фундаментальных сплайнов. Методика обобщена для случая произвольного поля нетепловой скорости в атмосфере Солнца. Алгоритмы основаны на предположении о полном перераспределении по частотам в ядре сильной линии.

*DETERMINATION OF THE RADIATION FIELD IN THE CHROMOSPHERE USING THE METHOD OF THE OBSERVED LINE PROFILE INVERSION, by Grigor'eva S. A., Teplitskaya R. B.*—The inversion method [6] is modified using the local second-degree *B*-splines, cubic fundamental splines and polynomials. The technique is generalized for the case of an arbitrary non-thermal velocity field in the solar atmosphere. The algorithms are based on the assumption of the complete redistribution in the core of a strong line.

Определение физических условий в солнечной хромосфере связано с решением сложной вычислительной задачи синтеза спектра. Однако для расчета предварительной эмпирической модели существует и другой путь. Параметры поля излучения можно найти методом инверсии наблюдаемого контура линии, а затем, решив уравнения стационарности, получить температуру  $T_e$  и электронную концентрацию  $n_e$ . Именно так нами рассчитаны предварительные модели хромосферы над пятном в работах [2, 8]. Метод инверсии имеет два существенных достоинства: он лаконичен в математической реализации и не требует привлечения условия гидростатического равновесия.

Вычисление функции источников по наблюдаемому контуру линии заключается в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$I_\nu(\mu) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) \exp(-\tau_\nu/\mu) d\tau_\nu/\mu, \quad (1)$$

где  $S_\nu$ ,  $\tau_\nu$  — функция источников и оптическая глубина в частоте  $\nu$ ;  $\mu = \cos \theta$  ( $\theta$  — геоцентрическое расстояние).

Решать это уравнение в общем виде очень сложно, так как функция источников  $S_\nu$  зависит от частоты. Однако для центральной части линии допустимо упрощающее предположение полного перераспределения по частотам. Тогда  $S_\nu(\tau_\nu) = \text{const}(\nu) = S(\tau_\nu)$ . Поэтому уравнение (1) рассматривается нами только для ядра сильной линии. При замене переменной  $x = \lg \tau$ , где  $\tau$  — оптическая глубина в центре линии, получаем:

$$I(v) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \exp\{-\tau_\nu[v(x), x]/\mu\} \frac{10^x}{\mu} \Phi[a, v(x)] dx. \quad (2)$$

Здесь  $M$  — модуль перехода к десятичному логарифму;  $a$  — параметр затухания;  $\Delta\lambda_D$  — доплеровская ширина;  $v = \Delta\lambda/\Delta\lambda_D$ ;  $\Phi[a, v(x)]$  — нормированный к центру профиль поглощения (функции Фойгта);  $d\tau_\nu = \Phi[a, v(x)] d\tau$ . В уравнении (2) мы пренебрегли поглощением в непрерывном спектре, так как линия предполагается сильной (предположение *a*).

Когда профиль коэффициента селективного поглощения не изменяется с оптической глубиной, уравнение (2) сводится к преобразованию Лапласа от функции источников  $S(x)$ . В этом случае  $a$  и  $\Delta\lambda_D$  должны быть постоянными в слое формирования ядра линии (предположение *b*).

На предположениях  $a$  и  $b$  основан алгоритм решения уравнения (2), предложенный в работе [6]. Функция источников в [6] представляется полиномом степени  $n$  относительно переменной  $x$ . Тогда контур линии  $I(v)$  оказывается полиномом степени  $n$  относительно переменной  $\lg \Phi(a, v)$ . Связь между коэффициентами обоих полиномов выражается аналитически с помощью формул преобразования Лапласа. Соответствующие им прямая и обратная матрицы для  $n=1, \dots, 8$  приведены в [6]. Метод безупречно работает при  $\Delta \lambda_D = \text{const}$ , что является следствием предположения  $b$ .

Решая задачу для конкретных контуров линий, мы встретились с некоторыми затруднениями при выборе оптимальной степени полинома. Такая ситуация часто встречается при решении обратных задач вида (1) и является следствием их принадлежности к классу некорректных.

Первая цель данной работы — модифицировать алгоритм [6] так, чтобы исключить неоднозначность решения. Этого можно достичь, применив локальные  $B$ -сплайны второй степени [4].

Пусть  $f_k$  — функция, заданная в узлах  $\xi_k$ . Локальный сплайн второй степени записывается в виде:

$$f(\xi) = \Delta^2 \left( \frac{\xi - \xi_k}{l} \right)^2 + 2\Delta \left( \frac{\xi - \xi_k}{l} \right) + (h_k + h_{k+1}), \quad (3)$$

где  $l$  — шаг по  $\xi_k$ ,  $\Delta = h_{k+1} - h_k$ ,  $\Delta^2 = h_k - 2h_{k+1} - h_{k+2}$ . Для нашей задачи  $\xi_k = \lg [\Phi(a, v)]_k \equiv \lg V_k$ ,  $f_k = I_k(v)$ . Коэффициенты  $h_k$  определяются равенствами:

$$h_{k+1} = -(f_{k-1} + f_{k+2})/16 + (f_k + f_{k+1}) 5/16;$$

$$h_k = -(f_{k-2} + f_{k+1})/16 + (f_{k-1} + f_k) 5/16;$$

$$h_{k+2} = -(f_k + f_{k+3})/16 + (f_{k+1} + f_{k+2}) 5/16.$$

Если выразить интенсивность на отдельном участке контура линии в форме

$$I_k(v) = B_0 + B_1 \lg V_k + B_2 (\lg V_k)^2, \quad (4)$$

то в соответствии с (3)

$$B_0 = (\Delta^2/l^2) \xi_k^2 - 2(\Delta/l) \xi_k + (h_k + h_{k+1});$$

$$B_1 = 2(\Delta/l) + 2(\Delta^2/l^2) \xi_k; \quad B_2 = \Delta^2/l^2. \quad (5)$$

Функция источников представится полиномом:

$$S_k(x_k) = A_0 + A_1 x_k + A_2 x_k^2. \quad (6)$$

Связь между коэффициентами  $B_i$  и  $A_i$  осуществляется с помощью матрицы из [6] при  $n=2$ .

$$A_0 = B_0 - 0.25068 B_1 - 0.24741 B_2, \quad (7)$$

$$A_1 = -B_1 + 0.50136 B_2, \quad A_2 = B_2.$$

Переход к шкале оптических глубин в (6) выполняется на основании физических соображений. Можно для этой цели воспользоваться приближением Эддингтона — Барбье

$$x = \lg \mu - \lg V. \quad (8)$$

Программа вычислений реализована на ЭВМ СМ-4.

Модифицированный алгоритм дает единственное решение  $S(x)$ . Так же, как оригинальный, он позволяет найти функцию источников для  $\Delta \lambda_D = \text{const}$ . Однако в [6] удовлетворительные результаты получены и при медленном изменении  $\Delta \lambda_D$  с глубиной. Чтобы оценить возможности алгоритма  $B$ -сплайнов, когда  $\Delta \lambda_D$  переменное, мы выполнили инверсию контура линии, вычисленного по заданной функции источников  $S(x)$ . Был принят линейный ход  $\Delta \lambda_D = a + bx$ .

Заданная функция источников восстанавливается с погрешностью 3.4 % при  $|b| = 0.2$  пм, что еще совместимо с точностью реальных фотометрических измерений ( $\pm 3$  %). При увеличении градиента  $|b|$  до 0.4 пм погрешности  $S(x)$  увеличиваются до 6.9 %, и соответствующий контур линии систематически отличается от заданного; в некоторых точках разница достигает 8 %. Таким образом, при переменном  $\Delta \lambda_D$  ал-

горитмом *B*-сплайнов можно пользоваться до предела, определяемого на практике сравнением вычисленного и наблюдаемого контуров линии.

По наблюдениям в спокойных и активных районах атмосферы Солнца известно, что нетепловые скорости, а следовательно, и  $\Delta\lambda_D$ , довольно круто увеличиваются с высотой в слое формирования хромосферных линий. Поэтому уравнение (2) надо решать в общей форме, которая не сводится к преобразованию Лапласа. Решение этого уравнения — вторая цель данной работы.

Мы воспользовались алгоритмами решения интегральных уравнений вида (1), описанными в [1]. Пусть

$$A(x, \varphi) = \int_a^b R(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (9)$$

где  $R(x, t)$  — ядро уравнения;  $\varphi(t)$  — искомая функция;  $f(x)$  — экспериментально найденная зависимость, зарегистрированная в точках  $x_p$  ( $p=1, \dots, l$ ). Искомая функция  $\varphi(t)$  аппроксимируется в [1] алгебраическими полиномами, кубическими сплайнами с сопряжениями в равноотстоящих точках, кусочно-постоянными функциями. Выбор решения производится либо ограничением числа членов разложения, либо ограничением величины нормы решения. Первый способ основан на том же принципе, что и алгоритм [6]. Второй — используется в методе регуляризации Тихонова. Поиск приближения в рамках заданного класса функций осуществляется путем минимизации среднего квадрата отклонения найденной зависимости от экспериментально наблюдаемой (функционала эмпирического риска).

Рассмотрим решение уравнения (9) в полиномиальном и сплайновом представлениях. В [1] эти алгоритмы называются соответственно РП (решение полиномиальное) и РС (сплайн-решение). В РП неизвестная функция  $\varphi(t)$  разлагается по полиномам Чебышева  $Q_j(t)$ :

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j Q_j(t), \quad (10)$$

откуда

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b R(x, t) Q_j(t) dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j \psi_j(x). \quad (11)$$

Здесь  $\psi_j(x)$  — «образы» полиномов Чебышева. В некоторой точке  $x_p$

$$\psi_j(x_p) = \int_a^b R(x_p, t) Q_j(t) dt. \quad (12)$$

Чтобы выполнить интегрирование в (12), необходимо задать ядро  $R(x, t)$ . На интервале интегрирования  $[a, b]$  строится равномерная сетка с узлами  $b_m$  ( $m=1, \dots, n$ ), в которых вычисляются значения  $R(x_p, t)$  (матрица размерности  $(p \times n)$ ). На отрезках, ограниченных узлами сетки  $[b_m, b_{m+1}]$ , ядро представляется линейно

$$R(x_p, t) = e_m + c_m t. \quad (13)$$

Из (13) легко получить значения  $e_m$  и  $c_m$  по заданной матрице ядра интегрального уравнения в точках  $x_p, b_m$ :

$$\begin{aligned} e_m &= R(x_p, b_m) - c_m b_m, \\ c_m &= [R(x_p, b_{m+1}) - R(x_p, b_m)] / (b_{m+1} - b_m). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12) с учетом (13) получим образы полиномов Чебышева  $\psi_j(x)$ . Для определения  $k$  коэффициентов  $\alpha_j$  имеем  $l$  условных уравнений, которые приводят к системе  $k$  нормальных уравнений. Решение нормальной системы дает полином степени  $k$ , минимизирующий функционал эмпирического риска:

$$I_9(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \left[ f(x_i) - \sum_{j=0}^k \alpha_j \psi_j(x_i) \right]^2 / \sigma_i^2, \quad (15)$$

где  $\sigma_i^2$  — дисперсия измерений  $f(x_i)$ .

Выражение (15) записано для общего случая неравноточных измерений. Если измерения равноточные или сведения о погрешностях  $f(x_i)$  отсутствуют, принимается  $\sigma_i^2 = 1$ .

Оценка качества приближения, построенного с помощью полинома степени  $k$ , производится с учетом длины выборки экспериментальных данных и величины функционала эмпирического риска, для чего используется критерий

$$J(k) = \left[ I_9(\alpha) \left( 1 - \sqrt{\frac{(k+1)[\ln l - \ln(k+1) + 1] - \ln \eta}{l}} \right) \right]_{\infty}, \quad (16)$$

где  $(1-\eta)$  — вероятность, с которой справедлива эта оценка. Обычно выбирают  $\eta = 0.05$ . Символ  $[z]_{\infty}$  означает

$$[z]_{\infty} = \begin{cases} z & \text{при } z \geq 0, \\ \infty & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Та степень полинома  $k$ , при которой  $J(k)$  принимает наименьшее значение, является оптимальной в алгоритме РП.

В алгоритме РС искомая функция представляется линейной комбинацией кубических фундаментальных сплайнов  $P_j$  с сопряжениями в  $N$  равноотстоящих точках:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{N+4} \alpha_j P_j(t). \quad (17)$$

Решение соответствует оптимальному числу сопряжений. Техника поиска решения в алгоритме РС аналогична таковой в алгоритме РП с той разницей, что выражение для функционала эмпирического риска имеет вид

$$I_9(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \left[ f(x_i) - \sum_{j=1}^{N+4} \alpha_j \psi_j(x_i) \right]^2 / \sigma_i^2, \quad (18)$$

где  $\psi_j(x_i)$  — «образы» фундаментальных сплайнов. Критерий представляется выражением

$$J(N) = \left[ I_9(\alpha) \left( 1 - \sqrt{\frac{(N+4)[\ln l - \ln(N+4) + 1] - \ln \eta}{l}} \right) \right]_{\infty}. \quad (19)$$

Алгоритмы РП и РС реализованы в [1] в виде подпрограмм POLILL и SPLILL соответственно. Для решения систем линейных алгебраических уравнений в них используется стандартная программа GELS, основанная на методе исключения Гаусса.

О возможностях алгоритмов можно судить по результатам решения тестовой задачи, приведенной в [1]. Интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} (x-t) \varphi(t) dt = \sin^4 x \quad (20)$$

имеет своим решением

$$\varphi(t) = 12 \sin^2 t \cos^2 t - 4 \sin^4 t. \quad (21)$$

Истинный ход  $\varphi(t)$  и восстановленный по алгоритмам РП и РС показаны на рис. 1. Кроме того, дано решение этой задачи методом регуляризации (алгоритм ЕС в [1]). Алгоритмы РП и РС неплохо приближают истинную функцию, за исключением точек на краях интервала  $t$ . Алгоритм ЕС в данном примере работает хуже, но на основании приведенной в [1] информации причину этого понять нельзя. Обычно считают, что при решении интегральных уравнений сплайновая аппроксимация дает более точные результаты, чем полиномиальная [1, 5]. В рассмотренном случае не заметно каких-либо преимуществ.

Вернемся к нашей задаче. Ядро уравнения (2) имеет вид

$$R(v, x) = M^{-1} \exp \{ -\tau_v [v(x), x] / \mu \} 10^x \Phi [a, v(x)] \mu^{-1}. \quad (22)$$

Отличие общего случая (22) от случая с  $\Delta \lambda_D = \text{const}$  состоит в том, что ядро  $R(v, x)$  необходимо представить некоторой приближенной функцией. Если шаг по глубине выбрать достаточно малым, то зависимость (13) вполне удовлетворительно опишет по-

ведение  $R(v, x)$  на рассматриваемом интервале  $x$ . Поэтому алгоритмы РП и РС, существенной особенностью которых является представление ядра в виде (13), позволяют более реалистично, чем алгоритм [6], учесть конкретные условия в атмосфере Солнца.

На базе алгоритмов РП и РС мы реализовали программы для ЭВМ ЕС М4030 (созданы также их версии для БЭСМ-6). Каждая программа вычисляет  $R(v, x)$  в соответствии с формулой (22), затем решает уравнение (2) подпрограммы POLILL либо SPLILL. Функция Фойгта вычисляется по алгоритму [3].

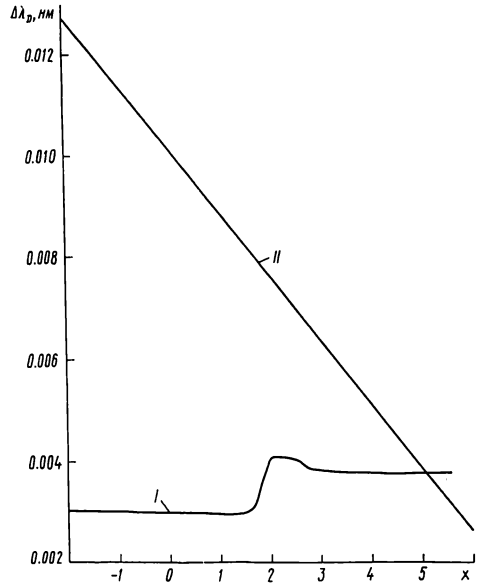
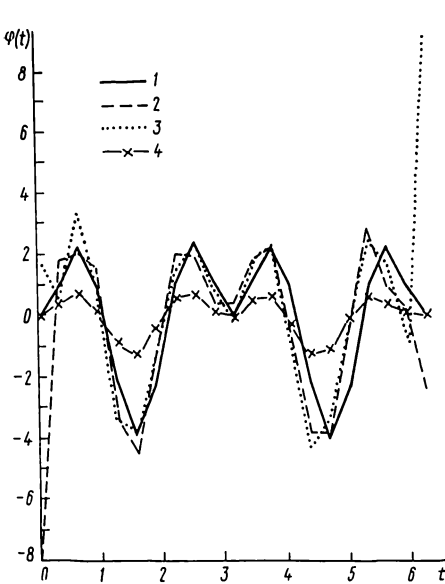


Рис. 1. Решение тестовой задачи [1]. 1 — истинный ход  $\varphi(t)$ ; 2 — РП; 3 — РС; 4 — ЕС  
Рис. 2. Ход  $\Delta\lambda_D(x)$  в хромосфере. I — модель [7]; II — работа [2]

Проверка работы программ осуществлялась по двум модельным задачам.

**Задача I.** Заданы крутой ход  $\Delta\lambda_D$  [6] (кривая II рис. 2) и функция источников в виде полинома

$$S(x) = 0.433 - 0.171x + 0.028x^2. \quad (23)$$

**Задача II.** Зависимость  $\Delta\lambda_D(x)$  такая же, как и в задаче I. Ход  $S(x)$  на участке  $-0.05 \leq x \leq 6.00$  совпадает с параболой (23), на участке  $-2.00 \leq x \leq -0.10$  — выбран произвольно.

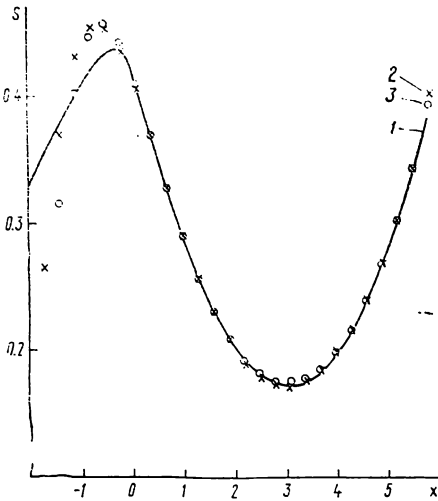
Область интегрирования в уравнении (2) ограничивалась интервалом  $[-2, +6]$ . С этими данными решалась прямая задача — вычислялся контур линии  $I(v)$  (уравнение (1) при  $\mu=1$ ). Затем выполнялась инверсия контура  $I(v)$  в полиномиальном и сплайновом представлениях.

Как и следовало ожидать, парабола (23) восстанавливается на всем интервале задания  $x$ . В задаче II восстановление хода  $S(x)$  оказалось хуже, особенно для случая сплайновой аппроксимации. Причина заключалась в потере точности при решении системы линейных алгебраических уравнений стандартной программой GELS (параметр ошибки IER=10, что указывает на плохую обусловленность матрицы коэффициентов). Чтобы избежать этого, мы реализовали программы, в том числе и версии подпрограмм POLILL и SPLILL, с двойной точностью. Вместо стандартной программы GELS использован ее аналог с двойной точностью DGELS. Рассмотрено также влияние на результаты вычислений величины шага по оптической глубине  $\Delta x$ . Оптимальным оказалось значение  $\Delta x=0.05$ .

Результат решения модельной задачи II с двойной точностью показан на рис. 3. На участке  $-0.20 < x < 5.80$  вычисленный и заданный ход  $S(x)$  практически совпадают, причем оба метода, РП и РС, дают одинаковый результат. На участке  $-2.00 \leq x \leq -0.20$  ход  $S(x)$  не восстанавливается. Мы уже видели (рис. 1), что на краях интервала задания аргумента оба алгоритма работают плохо. Однако мы не придаем этому обстоятельству большого значения, так как центр линии содержит информацию

о поле излучения в области  $x \approx \lg \mu$ , а другие точки контура — еще о более глубоких слоях. Поэтому ход  $S(x)$  на меньших оптических глубинах фактически является экстраполяцией, не отражающей истинные физические условия.

На примере модельных задач можно убедиться, что даже при крутом ходе  $\Delta\lambda_D$  с глубиной, алгоритмы РП и РС удовлетворительно воспроизводят функцию источников почти во всем слое формирования линии. Однако критерии (16) и (19) не всегда обеспечивают однозначный выбор решения. Так, в задаче I функция источников должна представляться полиномом второй степени. Счет по алгоритму РП для  $k=0, 1, \dots, 12$



Значения критерия в зависимости от числа сопряжений сплайна ( $N$ ) или от степени полинома ( $k$ )

| $N, k$ | РС          | РП          |
|--------|-------------|-------------|
| 0      | 4.9002 (—5) | 2.9442 (—2) |
| 1      | 3.5255 (—5) | 1.0388 (—4) |
| 2      | 3.2125 (—5) | 6.1866 (—5) |
| 3      | 3.4169 (—5) | 4.9002 (—5) |
| 4      | 8.3596 (—6) | 3.4057 (—5) |
| 5      | 5.5037 (—6) | 3.5021 (—5) |
| 6      | 7.3361 (—6) |             |

◀ Рис. 3. Восстановление функции источников  $S(x)$  в модельной задаче II. 1 — заданный ход  $S(x)$ ; 2 — РП,  $k=5$ ; 3 — РС,  $N=2$

дал два минимума  $J(k)$ , которым соответствуют полиномы степени  $k=2$  и  $k=6$ . Так как значение  $J(6)=0.63221$  ( $D=6$ ) оказалось меньше, чем  $J(2)=0.65720$  ( $D=6$ ), машина выбрала в качестве решения полином  $k=6$ . Хотя различия  $S(x)$  при  $k=2$  и  $k=6$  имеют место лишь на концах интервала  $x$ , этот простой пример настораживает.

Действительно, похожая ситуация возникает при инверсии реальных контуров. Расчеты выполнялись для эмиссионного обращения линии  $K \text{ Ca II}$  в тени пятна. Зависимость  $\Delta\lambda_D(x)$  принята на основании модели [7] (кривая I, рис. 2). Счет по алгоритму РС дает два минимума критерия, что демонстрирует таблица. Результаты вычисления функции источников приведены на рис. 4. Кривая, соответствующая минимуму критерия при  $N=5$ , осциллирует относительно кривой для  $N=2$ . Создается впечатление, что здесь имеет место «раскачка», часто свойственная некорректным задачам. В отличие от алгоритма локальных сплайнов, выбрать правильный вариант решения с помощью восстановления контура линии в данном случае нельзя, так как в алгоритмах РП и РС оно происходит автоматически для любого  $k$  или  $N$ . Поэтому мы принимаем иной путь выбора решения, налагая более жесткие ограничения на класс допустимых функций, чем в [1]. Решающее правило сформулируем следующим образом: решение соответствует первому минимуму критерия (а не «глобальному», как в оригинальных алгоритмах).

На рис. 4 и в таблице показан также ход  $S(x)$ , вычисленный по алгоритму РП. Здесь решение однозначно определяется единственным минимумом критерия при  $k=4$ ; оно довольно близко повторяет сплайновое при  $N=2$ . Как видно, для инверсии реальных контуров целесообразно пользоваться обоими алгоритмами. Это позволяет более объективно подходить к выбору решения.

Так как инверсия контура линии — задача некорректная, важно знать, насколько устойчиво полученное решение к погрешностям измерений контура. По оценкам предыдущих работ, относительная средняя квадратичная ошибка наших измерений составляет  $\pm 3\%$ . Мы ввели эту погрешность в контур  $I(v)$  модельной задачи II. Имитация шума выполнялась следующим образом. Из таблиц случайных чисел взят такой набор, среднее квадратичное значение по которому составило 0,03. Эти числа со случайным знаком принимались за относительную погрешность  $I(v)$ . Искаженный шумом контур

приобрел «пилообразную» форму, явно утрированную по сравнению с тем, что имеем на практике (для любых расчетов, как правило, используют сглаженные контуры). Поэтому, кроме «пилообразного», мы рассмотрели второй вариант шума измерений, его средняя квадратичная амплитуда по-прежнему составляет  $\pm 3\%$ , но искаженный контур изменяется монотонно. Заданный и искаженный шумом контуры  $I(v)$  приведены на рис. 5.

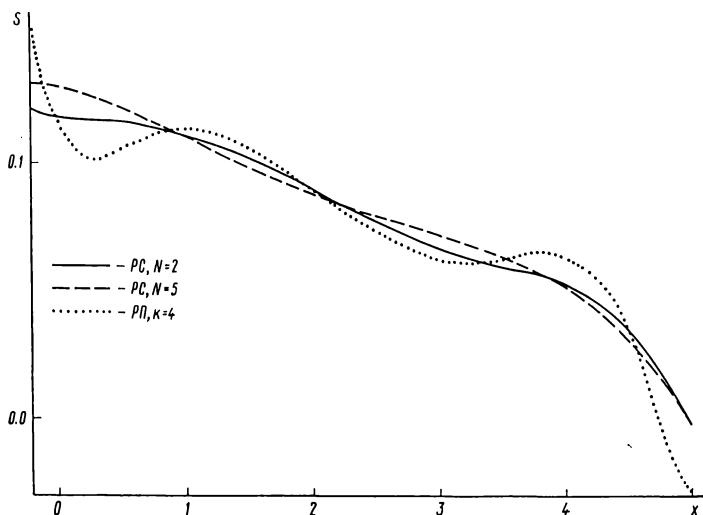


Рис. 4. Вычисленный ход функции источников  $S(x)$  для контура линии К Ca II

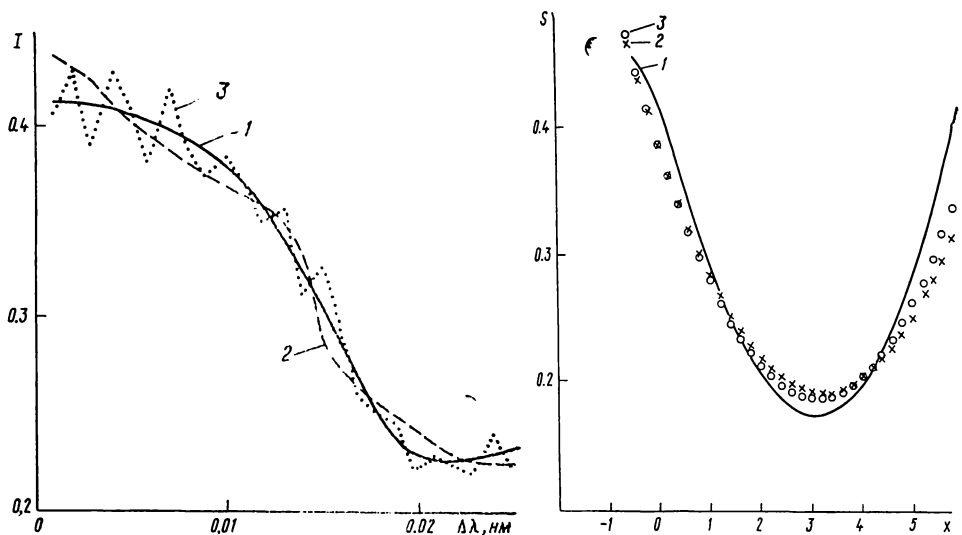


Рис. 5. Имитация шума измерений контура линии в модельной задаче II. 1 — заданный контур; 2 — «монотонный» шум; 3 — «пилообразный» шум

Рис. 6. Влияние шума измерений на восстановление функции источников  $S(x)$ . 1 — заданный ход  $S(x)$ ; 2 — «пилообразный» шум; 3 — «монотонный» шум

Результаты вычислений показаны на рис. 6. Средняя относительная погрешность восстановления функции источников на интервале  $-0.20 \leq x \leq 5.90$  составляет  $\pm 7.8\%$  и  $\pm 5.8\%$  для «пилообразного» и «монотонного» контуров соответственно. Таким образом, алгоритмы РП и РС дают довольно устойчивое решение даже в случае преувеличенного влияния шума измерений.

Данная работа является чисто методической, мы не обсуждаем здесь ее приложение к конкретным солнечным образованиям. Чтобы найти функцию источников в

реальных условиях, необходимо обосновать выбор  $a$  и  $\Delta\lambda_D(\tau)$ , а также рассмотреть влияние макроскопического поля скоростей. Это предполагается выполнить в другой статье применительно к пятнам.

Предлагаемая методика может быть использована при создании самосогласованной модели атмосферы. Однако ее ценность в значительной степени снижена предположением о полном перераспределении квантов по частотам. Поэтому наша следующая задача — включить учет частичного перераспределения. Возможно обобщить программу для этого случая имеется.

**Выводы.** 1. Выполнена модификация метода инверсии наблюдаемого контура линии [6] с применением локальных  $B$ -сплайнов второй степени. Алгоритм строго может быть использован при  $\Delta\lambda_D = \text{const}$ ; при переменном  $\Delta\lambda_D$  применение алгоритма возможно, если вычисленный контур линии воспроизводит наблюдаемый с заданной точностью. 2. На базе алгоритмов РП и РС [1] реализованы программы инверсии контура для случая, когда  $\Delta\lambda_D$  произвольно изменяется с высотой. Иногда выбор единственного решения затруднителен; в таких случаях налагаются более жесткие ограничения на класс допустимых функций, чем в [1]. Для оптимального выбора полезно также учитывать результаты работы обеих программ. 3. При достаточно медленном изменении  $\Delta\lambda_D(\tau)$  предпочтительней пользоваться программой локальных  $B$ -сплайнов, так как здесь не возникает проблема неоднозначности.

Авторы благодарят А. И. Орлова и С. Л. Лидина за предоставление программ интерполирования, Н. А. Ланкевича, С. Л. Лидина и В. Г. Скочиллова за полезные обсуждения. Мы признательны также рецензенту за ценные замечания.

1. *Алгоритмы и программы восстановления зависимостей* / Под ред. В. Н. Вапника.— М.: Наука, 1984.—815 с.
2. Григорьева С. А., Теплицкая Р. Б. О модели хромосферы над пятнами // *Phys. Solariterr.*—1981.—№ 15.— С. 15—24.
3. Кац И. М., Скоцилов В. Г. О вычислении функции Фойгта // *Исслед. по геомагнетизму, аэронамии и физике Солнца.*—1975.— Вып. 37.— С. 93—99.
4. Коноплин В. Н., Орлов А. И. Приближение данных локальными сплайнами второй степени // Там же.—1981.— Вып. 57.— С. 101—104.
5. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы.— Новосибирск: Наука, 1982.—237 с.
6. Теплицкая Р. Б. Об эмпирическом определении функции источников сильных фраунгоферовых линий // *Исслед. по геомагнетизму, аэронамии и физике Солнца.*—1974.— Вып. 31.— С. 3—12.
7. Lites B. W., Skumanich A. A model of a sunspot chromosphere based on OSO 8 observations // *Astrophys. J. Suppl.*—1982.—49, N 2.— P. 293—316.
8. Teplitskaja R. B., Grigoryeva S. A., Skochilov V. G. On physical conditions in the chromosphere above sunspot umbrae // *Solar Phys.*—1978.—56, N 2.— P. 293—303.

Сиб. ин-т зем. магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн СО АН СССР,  
г. Иркутск

Поступила в редакцию 10.06.85,  
после доработки 30.09.85

## РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 521.8/9:520.8

**ПОЛОЖЕНИЯ ИЗБРАННЫХ МАЛЫХ ПЛАНЕТ В 1971—1982 гг.** / Калтыгина С. В., Майор С. П., Мороз Г. В., Серeda Е. М., Шатохина С. В.

(Рукопись деп. в ВИНТИ; № 8619—В)

Приводятся 143 положения и разности  $O - C$  15 избранных малых планет, наблюдавшихся в ГАО АН УССР (Киев) с помощью 40-см астрографа Тепфера. Даны каталожные сведения об опорных звездах и депенденсы отдельно по каждой пластинке.