

УДК 520.85+535.515

Многокомпонентные симметричные ахроматические фазовые пластинки.

III. Теоретическое моделирование оптических свойств 10-элементной кварцевой фазосдвигающей системы

В. А. Кучеров

Приведены формулы, позволяющие рассчитывать оптические характеристики сложной фазосдвигающей системы, состоящей из N компонентов. Подробно изучены свойства 10-элементного 127° кварцевого фазосдвигающего при случайном отклонении толщин и углов ориентации его элементов от расчетных значений. Показано, что неточная ориентация компонентов приводит к осцилляциям оптических параметров по спектру, а неточное изготовление толщин нарушает общий ход ахроматизационных кривых.

MULTICOMPONENT SYMMETRIC ACHROMATIC RETARDERS. III. THEORETICAL MODELLING OF THE OPTICAL PROPERTIES OF TEN-ELEMENT QUARTZ RETARDATION SYSTEM, by Kucherov V. A.—The formulae are given allowing calculation of the optical characteristics of composite retardation system which consists of N components. The properties of ten-element (127°) retarder with accidental deviations of thickness and orientation angle of its elements from calculated values are studied in details. It is shown that an inexact component orientation leads to spectral oscillations of optical parameters while an inaccurate manufacturing of thicknesses violates the general behaviour of achromatic curves.

Ахроматические кварцевые фазовые пластинки применяются в спектрополяриметре, разработанном и изготовленном в ГАО АН УССР. Специфика работы указанного поляриметра требует, чтобы фазовый сдвиг модулирующего элемента мало отличался от 127° в широкой области спектра [2]. Обычно используемые фазовые пластинки из одного или небольшого числа компонентов не могут удовлетворить этому требованию. Поэтому в качестве фазосдвигающего выбрана сложная система из 5 элементов, каждый из которых в свою очередь представляет собой пару простых пластинок с оптическими осями, развернутыми друг относительно друга на 90° . В работах [3, 4] показано, что такая фазосдвигающая конструкция может быть ахроматичной в достаточно большом диапазоне длин волн. В этих же статьях подробно описана теория фазосдвигающих подобного рода и приведены спектральные свойства четверть- и полуволновых фазосдвигающих систем.

Целью данной работы является исследование оптических свойств неидеального фазосдвигающего. Необходимость изучения последнего продиктована тем, что при практической сборке сложных систем неизбежно возникают всякого рода ошибки изготовления. Все эти ошибки невозможно предугадать, поэтому мы ограничимся рассмотрением только двух из них, которые, на наш взгляд, являются основными. Таким образом, неидеальным фазосдвигающим будем считать составную систему фазовых пластинок, каждая из которых имеет отклонения в толщине и в ориентации оптической оси по сравнению с идеальным симметричным случаем [3, 4].

Исследуем фазосдвигающий, все компоненты которого изготавливаются из одного материала (мы выбрали кристаллический кварц как материал, наиболее часто применяющийся для изготовления фазовых пластинок и обладающий хорошими технологическими свойствами). Отметим, что для создания ахроматичного фазосдвигающего из одного

материала достаточно 5 компонентов [4]. Однако эти компоненты для кварца имеют слишком малые толщины (10—30 мкм), что делает практически невозможным их обработку. Поэтому каждый компонент обычно заменяют двумя толстыми пластинками со скрещенными осями и разностной толщиной, соответствующей толщине тонкой пластинки.

Итак, мы рассмотрим свойства 10-элементной 127° кварцевой фазовой пластинки при отклонениях параметров ее компонентов от расчетных значений. Но сначала получим некоторые формулы, позволяющие описать свойства произвольной фазосдвигающей системы из N элементов. Пусть имеем N следующих друг за другом фазовых пластинок, каждая из которых характеризуется двумя параметрами: фазовым сдвигом $2\delta_i$ и ориентацией оптической оси φ_i ($i=1, 2, \dots, N$). При этом предположим, что свет проходит через составную систему вдоль оси x в направлении увеличения этой координаты, плоскости всех пластинок параллельны плоскости yz и φ_i отсчитываются от положительного направления оси y против часовой стрелки, если смотреть со стороны выходящего луча.

В данной работе используем некоторые обозначения статьи [3]. Так, тригонометрические функции \sin и \cos для сокращения записей заменим буквами s и c и введем матрицы \hat{R}_φ , \hat{I} , \hat{G} , \hat{H} размерностью 2×2 , которые выражаются через формулы (1), (2), (4) и (5) из [3] соответственно. Известно [3, 7], что рассматриваемая система пластинок характеризуется тремя эквивалентными параметрами: фазовым сдвигом $T=2\Delta$, ориентацией оптической оси Φ и дополнительным поворотом Ω . Каждый из эквивалентных параметров системы является функцией параметров отдельных элементов, количество которых в нашем случае равно $2N$. Задачей последующих математических выкладок будет получение явного вида этих зависимостей.

Амплитудная матрица пропускания составного фазосдвигателя имеет вид [7]:

$$\hat{M}(N) = \hat{M}(\Delta, \Phi) \hat{R}_\Omega, \quad (1)$$

где \hat{R}_Ω — матрица поворота, $\hat{M}(\Delta, \Phi)$ — матрица, эквивалентная матрице пропускания простой фазовой пластинки. Согласно [3, 7], последняя записывается через перечисленные выше вспомогательные обозначения в комплексной форме

$$\hat{M}(\Delta, \Phi) = c_\Delta \hat{I} + is_\Delta \hat{G} \hat{R}_{2\Phi}. \quad (2)$$

Такую же структуру будут иметь все амплитудные матрицы пропускания отдельных элементов системы, если Δ и Φ заменить на δ_i и φ_i ($i=1, 2, \dots, N$). Матрицу $\hat{M}(N)$ можно записать через произведение N матриц отдельных элементов

$$\hat{M}(N) = \prod_{i=1}^N \hat{M}(\delta_i, \varphi_i). \quad (3)$$

Производя умножение в формуле (3) с учетом (2) для случаев $N=2$ и $N=3$ и пользуясь методом математической индукции аналогично тому, как это было проделано в [3], получаем следующее обобщенное выражение для амплитудной матрицы пропускания составного фазосдвигателя:

$$\hat{M}(N) = (A_N \hat{I} + B_N \hat{H}) + i \hat{G} \hat{R}_{2\varphi_1} (C_N \hat{I} + D_N \hat{H}), \quad (4)$$

где A_N , B_N , C_N и D_N — некоторые коэффициенты, зависящие от параметров отдельных элементов системы. Если ввести векторные обозначения

$$\vec{P}_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)^t, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где для удобства применена запись в строчку, а t — знак транспортирования, то коэффициенты, описывающие свойства сложной фазосдвигающей системы, можно определить из следующей матричной рекурренты:

$$\vec{P}_N = \hat{Q}_N \vec{P}_{N-1} \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\vec{P}_1 = (c_{\delta_1}, 0, s_{\delta_1}, 0)^t. \quad (7)$$

Здесь \hat{Q}_N — блочная матрица размерностью 4×4 , имеющая вид:

$$\hat{Q}_N = \begin{pmatrix} c_{\delta_N} \hat{I} & -s_{\delta_N} \hat{R}_{2\gamma_{N1}} \hat{G} \\ s_{\delta_N} \hat{R}_{2\gamma_{N1}} \hat{G} & c_{\delta_N} \hat{I} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\gamma_{i1} = \varphi_i - \varphi_1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Сравнивая выражения для матрицы $\hat{M}(N)$ в форме (4) и в форме (1), легко получить явное выражение эквивалентных параметров составного фазосдвигателя через функции A_N , B_N , C_N и D_N :

$$c_{2\Delta} = (A_N^2 + B_N^2) - (C_N^2 + D_N^2), \quad (10)$$

$$\text{tg } \Omega = B_N/A_N, \quad (11)$$

$$\text{tg } 2\Phi = (A_N D_N - B_N C_N)/A_N C_N + B_N D_N. \quad (12)$$

В приведенных формулах принято предположение $\varphi_1 = 0$, что не уменьшает общности полученных результатов и будет использоваться и в дальнейшем.

Рассмотрим наиболее простой случай $N=2$. Согласно (6) — (12) имеем:

$$c_{2\Delta} = c_{2\delta_1} c_{2\delta_2} - s_{2\delta_1} s_{2\delta_2} c_{2\gamma_{21}}, \quad (13)$$

$$\text{tg } \Omega = - \frac{s_{\delta_1} s_{\delta_2} s_{2\gamma_{21}}}{c_{\delta_1} c_{\delta_2} - s_{\delta_1} s_{\delta_2} c_{2\gamma_{21}}}, \quad (14)$$

$$\text{tg } 2\Phi = \frac{s_{2\delta_2} s_{2\gamma_{21}}}{s_{2\delta_1} c_{2\delta_2} + c_{2\delta_1} s_{2\delta_2} c_{2\gamma_{21}}}. \quad (15)$$

Анализ формул (14) и (15) показывает, что в случае толстых фазовых пластинок, обычно используемых для изготовления кристаллических пар с фазовым сдвигом в пределах одного порядка, следует ожидать осциллирующей зависимости параметров Ω и Φ от длины волны, причем амплитуда этих колебаний для малых отклонений оптических осей от 90° примерно пропорциональна углу отклонения, а частота зависит от толщины отдельных пластинок. Можно предположить, что в составной системе, собранной из отдельных пар, также проявятся спектральные колебания эквивалентных оптических характеристик.

Как уже говорилось в начале статьи, в качестве модельного примера сложной системы нами выбран 10-элементный кварцевый фазосдвигатель с фазовым сдвигом вблизи 127° ($c_{2\Delta} = -0.6$). Расчет параметров отдельных элементов, выполненный согласно теории, изложенной в [3], с применением оптимизации характеристик системы по принципам, рассмотренным в [4], дает следующие исходные данные для моделирования оптических свойств составной фазовой пластинки: $\tau_1 = \tau_5 = 108.93^\circ$, $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 180^\circ$ — фазовые сдвиги отдельных пар; $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 38.86^\circ$, $\alpha_3 = 108.65^\circ$ — положения оптических осей отдельных пар относительно оптической оси первой «двойки»; $T = 127.02^\circ$ и $\Phi = 40.08^\circ$ — эквивалентный фазовый сдвиг и положение эквивалентной

оптической оси. Все перечисленные значения приведены для центральной длины волны выбранной области ахроматизации.

Аналитические выражения для показателей преломления кварца получены по дисперсионной формуле Зельмейера [1] в двулученном приближении. Такая аппроксимация выражается рациональным отношением вида:

$$n^2 - 1 = (a_1\lambda^4 + a_2\lambda^2)/(\lambda^4 + a_3\lambda^2 + a_4). \quad (16)$$

Здесь длина волны выражена в микрометрах. Начальные данные взяты из [6] для интервала длин волн 0.303—0.844 мкм. Расчет производился методом наименьших квадратов по 24 точкам. Коэффициенты a_i ($i=1, 2, 3, 4$) приведены в табл. 1. Толщины всех десяти компонентов представлялись в виде:

$$S_i = S_0 + d_i + \sigma_S N_{Si}, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (17)$$

Таблица 1. Коэффициенты аппроксимационных формул для показателей преломления кварца

Коэффициенты	Обыкновенный луч	Необыкновенный луч
a_1	1.359654	-1.387455
a_2	-2.001685	-2.113555
a_3	-1.487093	-1.539277
a_4	-0.012229	0.012888

где S_0 — основная толщина, которую мы будем называть толщиной базовой подложки; d_i — разностная толщина, соответствующая требуемому фазовому сдвигу для элементов системы с нечетными номерами, либо нуль для элементов системы с четными номерами; σ_S — ошибка изготовления толщин; $\{N_{Si}\}$ — набор случайных чисел, распределенных по нормальному закону.

Аналогичным образом моделировался случайный разброс в углах ориентации компонентов

$$\gamma_{i1} = \beta_i + \sigma_\gamma N_{\gamma i}, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (18)$$

Здесь β_i принимает значения $\alpha_1, \alpha_1 + 90^\circ, \alpha_2, \alpha_2 + 90^\circ, \dots, \alpha_5, \alpha_5 + 90^\circ$; σ_γ — ошибка ориентации компонентов; $\{N_{\gamma i}\}$ — набор случайных чисел.

Величины N_{Si} и $N_{\gamma i}$ брались из таблицы нормально распределенных случайных чисел с нулевым средним значением и единичной дисперсией [5]. Фазовый сдвиг каждого элемента вычислялся по известной формуле:

$$2\delta_i = 2\pi\lambda^{-1} [n_e(\lambda) - n_o(\lambda)] S_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (19)$$

где $n_o(\lambda)$ и $n_e(\lambda)$ — показатели преломления кварца для обыкновенного и необыкновенного лучей. Разностная толщина d_i , определяющая фазовый сдвиг отдельной пары, находилась для центральной длины волны λ_0 :

$$d_i = (2\pi)^{-1} \lambda_0 \tau_i [n_e(\lambda) - n_o(\lambda)]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \quad (20)$$

В формуле (20) λ_0 задается в зависимости от желаемого интервала ахроматичности, а τ_i определяется исходной структурой системы.

Мы провели на ЭВМ исследование влияния величин $\lambda_0, \sigma_S, \sigma_\gamma$ и S_0 на эквивалентные оптические характеристики фазосдвигателя.

Влияние выбора центральной длины волны. Изменяя параметр λ_0 , можно выбрать необходимую область ахроматичности. «Идеальные» ($\sigma_0=0, \sigma_\gamma=0$) ахроматизационные кривые эквивалентных оптических параметров 10-элементного кварцевого фазосдвигателя для пяти длин волн λ_0 : 0.40, 0.45, 0.55 и 0.60 мкм (отмеченные цифрами 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно) представлены на рис. 1. Для сравнения здесь же (рис. 1а) вблизи соответствующей центральной длины волны показаны спектральные кривые фазовых сдвигов отдельных пар. Отметим, что в рассматриваемой составной системе имеются только две отличные друг от друга толщины d_i . Они определяются фазовыми сдвигами крайних и внутренних пар. Значения этих толщин в микрометрах простав-

лены напротив каждой длины волны λ_0 в верхней части рис. 1а. Пунктирные кривые относятся к крайним, а точечные — к внутренним «двойкам» системы. Шкалы пунктирных и точечных линий показаны с левой стороны рисунка внутри и вне рамки соответственно. Для каждой λ_0 в нижней части рис. 1а проставлены значения фазового сдвига на кон-

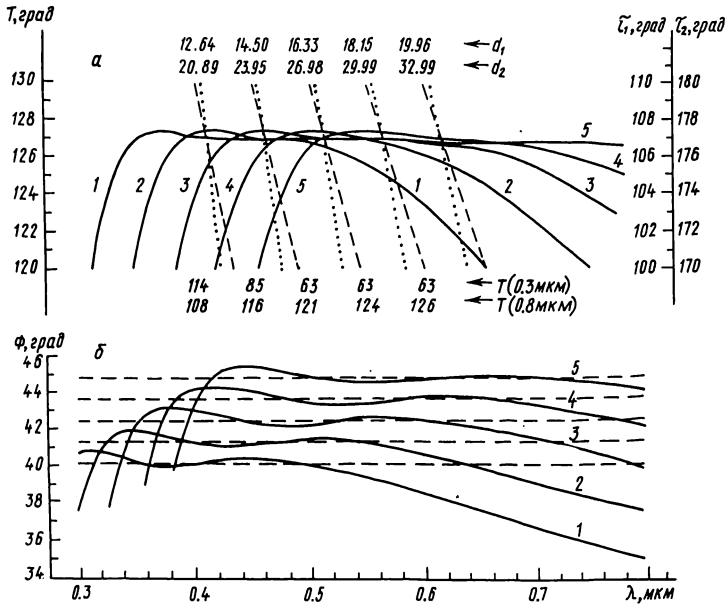


Рис. 1. Влияние выбора центральной длины волны на область ахроматичности оптических параметров фазосдвигателя

цах рассматриваемого спектрального интервала. Графики для эквивалентной оптической оси показаны со смещением. Пунктирные прямые показывают уровень $\Phi(\lambda_0) = 40.08^\circ$ (шкала относится к нижнему графику).

Из рис. 1 следует, что ахроматизационные кривые идеальных систем являются плавными и мало отклоняются от заданных значений в широком спектральном интервале. Область ахроматизации для оптической оси смещена в синюю область длин волн по сравнению с областью ахроматизации фазового сдвига. Добавим, что для идеальных симметричных систем дополнительный поворот Ω всегда равен нулю.

Таблица 2. Нормально распределенные случайные числа с нулевым средним значением и единичной дисперсией

Номер элемента	Номер выборки									
	1		2		3		4		5	
	N_{Si}	$N_{\gamma i}$	N_{Si}	$N_{\gamma i}$	N_{Si}	$N_{\gamma i}$	N_{Si}	$N_{\gamma i}$	N_{Si}	$N_{\gamma i}$
1	-0.18	-0.45	0.13	0.58	-0.13	-0.29	0.56	-0.53	-0.97	0.91
2	-0.30	-1.36	2.01	-1.16	-0.37	0.61	-1.42	0.14	-1.58	-0.11
3	0.82	-0.54	0.44	0.93	0.52	-0.63	0.89	1.31	1.06	0.22
4	0.55	0.30	0.91	-1.39	1.91	2.18	-0.04	-0.27	0.04	1.06
5	0.62	-0.93	-1.57	1.43	-1.51	0.10	0.41	0.87	0.00	1.52
6	0.16	-0.48	-0.84	1.62	-0.73	-0.52	0.33	-1.60	1.82	2.03
7	1.52	-0.93	-0.61	0.13	1.25	0.47	-1.48	-0.75	-0.19	-0.33
8	-0.89	-0.15	0.20	1.45	0.30	0.89	0.23	-1.79	0.31	0.20
9	0.64	-0.51	1.01	0.38	-0.21	-0.85	-0.11	-0.23	1.26	-0.75
10	-0.71	0.41	-1.54	0.02	0.54	-1.46	1.45	-0.68	0.11	-1.77

Влияние неточности толщин. Ахроматизационные кривые эквивалентных параметров фазосдвигающей системы для отличной от нуля величины σ_S показаны на рис. 2. Графики рассчитаны при условиях $\sigma_V=0$, $\lambda_0=0.4$ мкм, $S_0=0.4$ мм. При этом использовалась выборка случайных чисел N_{Si} ($i=1, 2, \dots, 10$) № 1 из табл. 2. Цифрам 1, 2 и 3 соответствуют значения ошибки толщин σ_S 0.25, 0.5 и 1.0 мкм. Из рис. 2

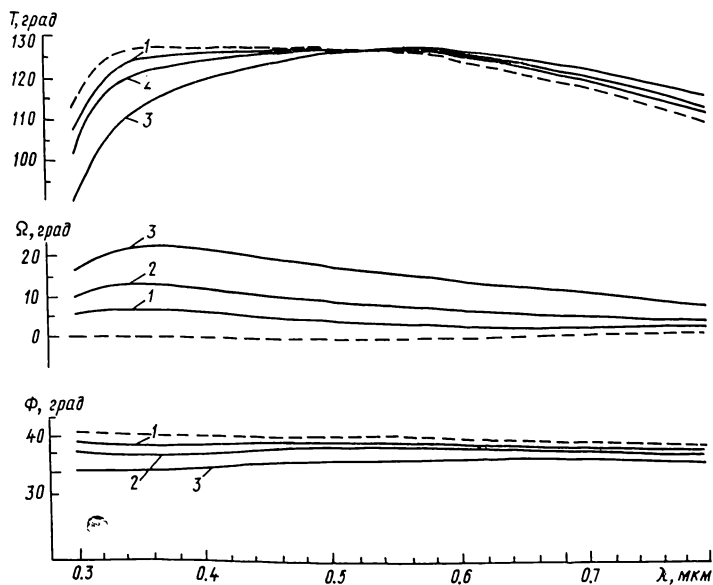


Рис. 2. Влияние неточности толщин на эквивалентные оптические характеристики сложной системы

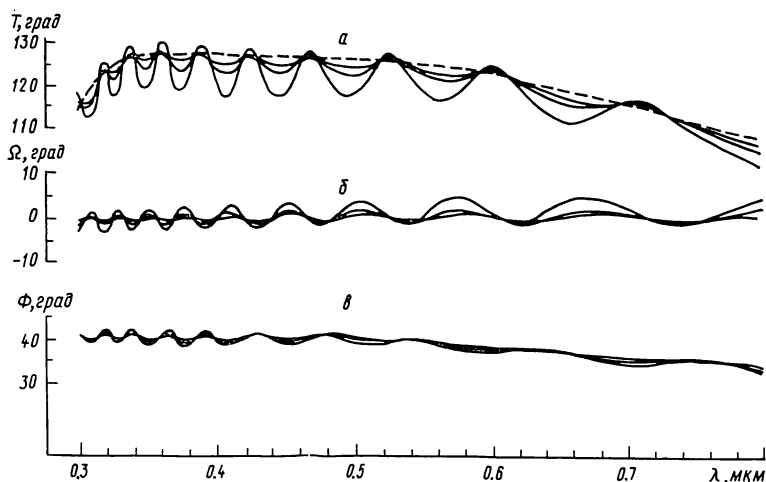


Рис. 3. Влияние неточной ориентации компонентов на эквивалентные оптические характеристики сложной системы

видно, что при случайном разбросе толщин ухудшается ход ахроматизационных кривых фазового сдвига, появляется существенный по величине дополнительный поворот и нарушается форма графиков ахроматизации оптической оси. Однако общий ход кривых остается монотонным. Пунктиром показаны графики для идеального случая $\sigma_S=0$.

Влияние неточной ориентации компонентов. Рассмотрим случай $\sigma_S=0$, $\sigma_V \neq 0$, $\lambda_0=0.4$ мкм, $S_0=0.4$ мм (рис. 3). Для случайных чисел использовалась выборка N_{Vi} ($i=1, 2, \dots, 10$) № 1 из табл. 2. Для фазо-

вого сдвига пунктиром показана кривая «идеальной» системы. Минимальная амплитуда колебаний соответствует значению $\sigma_\gamma = 0.25^\circ$, максимальная — $\sigma_\gamma = 1.0^\circ$ и промежуточная — $\sigma_\gamma = 0.5^\circ$. Таким образом, оптические характеристики сложной системы при неточной ориентации компонент испытывают осцилляции, величина которых зависит от ошибки σ_γ . Этот результат подтверждает вывод, сделанный ранее для двойных систем.

Исследование совместного влияния ошибок σ_S и σ_γ . Нами просчитаны две модели совместного влияния величин σ_S и σ_γ на оптические характеристики 10-элементного кварцевого фазосдвигающего. В обоих случаях предполагалось $\lambda_0 = 0.4$ мкм и $S_0 = 0.4$ мм. Первая модель, «грубая», имеет ошибки $\sigma_S = 1.0$ мкм и $\sigma_\gamma = 1.0^\circ$. Эти значения заведомо превышают те точности, с которыми как правило обрабатываются кристаллы. Графики параметров указанной модели приведены на рис. 4.

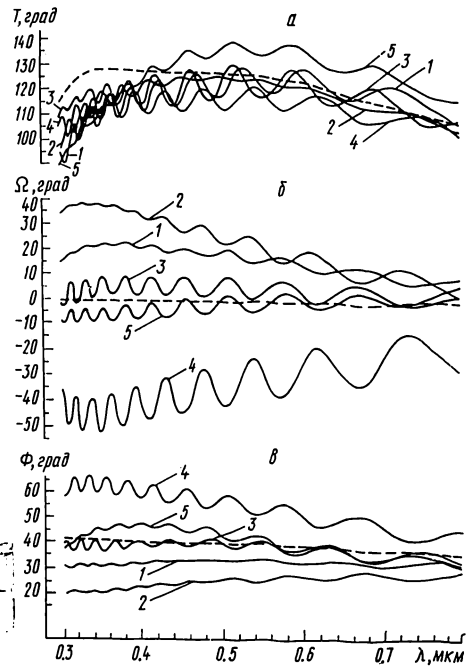


Рис. 4. «Грубая» модель фазосдвигающего. Оптические параметры рассчитаны для ошибок $\sigma_S = 1.0$ мкм и $\sigma_\gamma = 1.0^\circ$

Цифры обозначают номер выборки случайных чисел (см. табл. 2). Таким образом промоделировано 5 «попыток» синтеза составной системы. Пунктиром показаны эквивалентные характеристики фазосдвигающего при отсутствии ошибок. Мы видим, что, несмотря на грубость модели, фазовый сдвиг (рис. 4а) достаточно ахроматичен и близок к желаемому.

Однако ось Φ и, особенно, дополнительный поворот Ω отличаются от требуемых значений весьма сильно (рис. 4б, в). Отметим, что подобное отличие для ряда задач поляризационных измерений не является принципиальным.

Во второй модели, которую можно назвать «тонкой», использованы значения $\sigma_S = 0.1$ мкм и $\sigma_\gamma = 2'$. Такие допуски легко достижимы при современном технологическом уровне обработки кварца. Соответствующие кривые показаны на рис. 5.

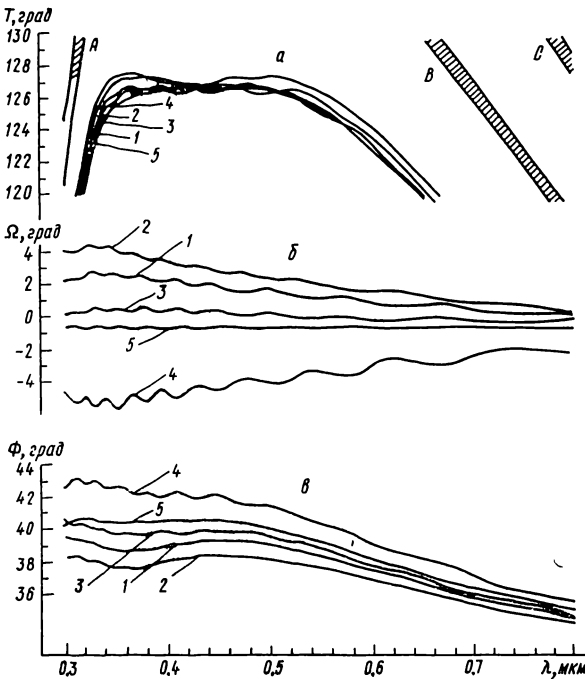


Рис. 5. «Тонкая» модель фазосдвигающего. Оптические параметры рассчитаны для ошибок $\sigma_S = 0.1$ мкм и $\sigma_\gamma = 2'$

мерация графиков аналогична нумерации на рис. 4. Заштрихованные области *A*, *B* и *C* изображают продолжение кривых центральной части рис. 5а. Все пять кривых проходят внутри этих зон. Для *A* и *B* шкала смещена на 10° , а для *C* — на 20° .

Для «тонкой» модели заметно существенное улучшение ахроматизационных характеристик по сравнению со случаем, приведенным на рис. 4. Коэффициент этого улучшения примерно определяется отношением ошибок «грубой» и «тонкой» моделей.

Влияние толщины базовой подложки. При $\lambda_0 = 0.4$ мкм, $\sigma_S = 1.0$ мкм и $\sigma_\gamma = 1.0^\circ$ с использованием методом выборки случайных чисел № 1

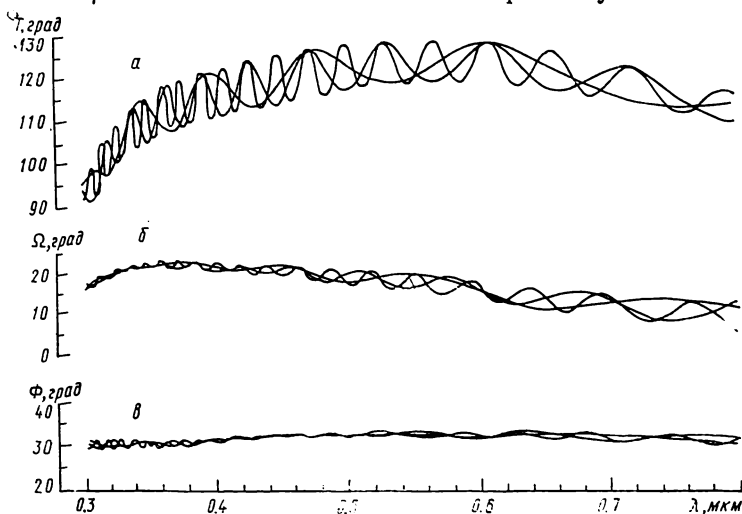


Рис. 6. Влияние толщины базовой подложки на частоту осцилляций оптических характеристик составной фазосдвигающей системы

из табл. 2 исследовалось влияние параметра S_0 . Графики для этого случая показаны на рис. 6. Максимальная частота колебаний соответствует значению $S_0 = 0.8$ мм, минимальная — $S_0 = 0.2$ мм, промежуточная — $S_0 = 0.4$ мм. Таким образом, толщина базовой подложки определяет частоту осцилляций оптических параметров неидеального фазосдвигающего. Напомним, что этот результат уже отмечался выше для системы из двух пластинок. Поскольку задача ахроматизации заключается в уменьшении зависимостей оптических характеристик от длины волны, отдельные компоненты фазосдвигающего желательно изготавливать тонкими, скажем 0.2—0.4 мм.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1973.—720 с.
2. Бугаенко О. И., Гуральчук А. Л. Астрономический спектрофотополариметр. I. Основные принципы работы // Фотометрические и поляризметрические исследования небесных тел.— Киев: Наук. думка, 1985.— С. 160—164.
3. Кучеров В. А. Многокомпонентные симметричные ахроматические фазовые пластинки. I. Расширение панчаратнамовской системы на случай произвольного числа компонент // Там же.— С. 152—160.
4. Кучеров В. А. Многокомпонентные симметричные ахроматические фазовые пластинки. II. Составные фазосдвигающие с небольшим числом элементов // Кинематика и физика небес. тел.—1986.—2, № 1.— С. 82—87.
5. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике.— М.: Финансы и статистика, 1982.—278 с.
6. Справочник конструктора оптико-механических приборов / Под ред. М. Я. Кругера.— Л.: Машиностроение, 1967.—760 с.
7. Title A. M. Improvement of birefringent filters. 2. Achromatic wave plates // Appl. Opt.—1975.—14, N 2.— P. 229—237.