КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 2 N 1 1986

УДК 522.9:528.11:519.240

Об учете эксцессов распределения ошибок при сравнении точности различных рядов астрометрических наблюдений

И. В. Джунь

На основе методов теории информации показано, что классические способы оценки точности рядов астрометрических наблюдений пригодны только в том случае, когда их ошибки следуют закону Гаусса. Если же они имеют существенный, отличный от нуля эксцесс ($\varepsilon_i \neq 0$), то для оценки точности рядов следует применять обобщенную среднюю квадратичную погрешность $\sigma_0 = e^H (2e\pi)^{-0.5}$, где H — вероятностная энтропия закона ошибок, присущая данному астрономическому инструменту или методу наблюдений. Рассмотрен метод оценки дисперсии величины σ_0. Показано, что неучет эксцесса распределения ошибок наблюдений, вследствие допущения всеобщности закона Гаусса, иногда приводит к более чем шестикратному занижению оценок дисперсии σ_0.

ON THE ALLOWANCE FOR AN EXCESS OF ERROR DISTRIBUTION WHEN COMPARING ACCURACY OF DIFFERENT SERIES OF ASTRONOMICAL OBSERVATIONS, by Dzhun' I. V. — The paper deals with the distribution of observational errors assuming that the excess ε_i is not equal to zero. In such cases for estimating accuracy of different instruments and observational methods the following standard error is proposed:

$$\sigma_0 = 2\sigma \sqrt[p]{ep}\, \Gamma(1/p) p^{-1} (2e\pi)^{-0.5} = e^H (2e\pi)^{-0.5}$$

where σ, p are generalized Laplace—Gauss distribution, H is entropy of a real distribution of errors peculiar to the astrometric instrument or to the method of observation.

Эмпирические распределения ошибок рядов астрономических наблюдений имеют, как правило, положительный эксцесс ε, хотя и существенно различный для разных инструментов и методов наблюдений [4—8, 20]. В связи с этим возникают два вопроса, которые имеют как теоретическое, так и прикладное значение: 1) можно ли при $\varepsilon \neq 0$ применять обычные способы оценки точности астрономических инструментов, т. е. пользоваться для этой оценки средней квадратичной погрешностью s; 2) если нет, то чем ее можно заменить?

Отвечая на поставленные вопросы, рассмотрим основные аспекты теории оценивания и сравнения точности нескольких рядов наблюдений, которым припишем номера 1, 2, ... i, ... n. Возьмем наиболее общий случай, т. е. будем считать, что $s_i \neq s_{i-1}$ и $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i-1}$. Так как в этом случае современная теория ошибок и математическая статистика не дают способа получения таких оценок, то для решения поставленных задач естественно привлечь методы теории информации. Эти методы, как увидим далее, позволяют обобщить известные формулы оценки точности и приводят к качественно новым результатам, подтверждая дальновидность высказывания А. Н. Колмогорова, сделанного им еще в 1967 г.: «... аналитический аппарат теории информации должен, по-видимому, привести к заметной перестройке здания математической статистики» [12].

Для строгого решения задачи оценки и сравнения точности i инструментов, имеющих $s_i \neq s_{i-1}$ и $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i-1}$, воспользуемся следующей энтропийной характеристикой закона распределения ошибок

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} y \ln y dx, \qquad (1)$$

где y — плотность обобщенного распределения Лапласа — Гаусса, используемая в теории L_p-оценок [13, 14, 15], которую для решения нашей задачи удобно представить в виде

$$y = p\left[\sigma \cdot 2\sqrt[p]{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{p}\right). \tag{2}$$

Здесь p — некоторая функция эксцесса распределения; σ — мера рассеяния случайной ошибки x с математическим ожиданием a; Γ — гамма-функция.

Подставляя (2) в (1) и интегрируя, имеем после несложных преобразований:

$$H = \ln\left[2\sigma p^{-1}\sqrt[p]{ep} \cdot \Gamma(1/p)\right]. \tag{3}$$

Мера H, хотя и зависит от σ, но не является привычной для астрометриста оценкой точности инструмента. Однако из (3) легко получить обобщенную оценку точности, которая имеет размерность σ:

$$e^{H} = 2\sigma \cdot p^{-1}\sqrt[p]{ep} \cdot \Gamma(1/p). \tag{4}$$

Поскольку p в (4) может принимать значения $0<p<\infty$, то e^{H} является однозначной и математически строгой оценкой точности при любом симметричном законе распределения ошибок наблюдений, который может встретиться в практике астрономических определений. Например, для нормального закона $p=2$, и выражение (4), с учетом тождества $\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$, приобретает вид

$$e^{H}_{\Gamma} = \sigma\sqrt{2e\pi}. \tag{5}$$

Значение σ в (5) при $p=2$ является средней квадратичной погрешностью $s\sqrt{\mu_2}$, где μ_2 — второй центральный момент. Это легко показать, если, воспользовавшись таблицами интегралов [3], найти выражение для центральных моментов μ_ν распределения (2):

$$\mu_\nu = \sigma^{\nu}\sqrt[p]{p^{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{p}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1}. \tag{6}$$

При $\nu=2$ имеем $\mu_2=\sigma^2$ и, так как в (5) значение e^{H}_{Γ} зависит только от одного параметра σ, то на основании формулы (5) можно дать ответ на первый поставленный нами вопрос: средняя квадратичная погрешность является однозначной и строгой характеристикой точности только в том единственном случае, когда ошибки наблюдений следуют закону Гаусса, т. е. когда $p=2$ $(\varepsilon=0)$. При $p\neq 2$ $(\varepsilon\neq 0)$, как это следует из (4), значение e^{H} зависит от двух параметров: p и σ. Из (5) видим, что мера e^{H} при $p=2$ отличается от средней квадратичной погрешности на постоянный множитель $\sqrt{2e\pi}$. Поэтому, чтобы получить энтропийные оценки точности инструмента, которые будут эквивалентны обычно применяемым, введем понятия:

а) обобщенной дисперсии — $\sigma_0^2 = e^{2H}/2e\pi$; (7)

б) обобщенной средней квадратичной погрешности — $\sigma_0 = e^{H}/\sqrt{2e\pi}$; (8)

в) обобщенной меры точности — $h_0 = \sqrt{e\pi}/e^{H}$, (9)

где H — вероятностная энтропия закона распределения ошибок, присущих данному инструменту или методу наблюдений.

Формулы (7—9) предлагаем использовать для оценки точности астрономических рядов наблюдений вместо классических аналогичных оценок, получаемых на основании формулы Бесселя. Таким образом, выражения (7—9) дают ответ на второй поставленный нами вопрос.

Значение e^{H} в (7—9) получают по формуле (4). Легко видеть, что при $p=2$ (закон Гаусса), формулы (7—9) превращаются в классические оценки.

Перейдем теперь к рассмотрению способов практического определения неизвестных в формуле (4).

Значение p для данного эмпирического распределения можно получить на основании моментного отношения [2]:

$$\beta_2 = \varepsilon + 3 = \mu_4/\mu_2^2. \tag{10}$$

Вычисляя по формуле (6) μ_4, μ_2 и подставляя их в (10), имеем после некоторых сокращений:

$$\beta_2 = \Gamma(5/p)\cdot\Gamma(1/p)/[\Gamma(3/p)]^{-2}. \tag{11}$$

С точностью, достаточной для практических приложений, уравнение (11) легко решить при помощи построенного нами графика (рис.), используя вычисленное для данного эмпирического распределения значение эксцесса ε.

Найдем значения эксцесса, при которых уравнение (11) имеет действительные корни. Так как эти корни соответствуют значениям p в интервале $0<p<\infty$, то, полагая в (11) $p=\infty$, а также воспользовавшись формулами Гаусса для умножения Г-функций и учитывая, что $\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x)=\pi\operatorname{cosec}\pi x$ [17], имеем

$$\beta_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(2\pi/3)}{\sin(\pi/5)\cdot\sin(2\pi/5)} = 1.8. \tag{12}$$

Полагая в (11) $p=0$, на основании теоремы умножения Г — функции и учитывая, что [3]: $\lim\,[\Gamma(x+a)/\Gamma(x)]\exp(-a\ln x) = 1$ при $|x|\to\infty$, имеем после ряда преобразований формулы (11):

$$\beta_2 = [p^{-1}(5\ln 5 - 6\ln 3) + \ln 3 - \ln\sqrt{5}] = \infty. \tag{13}$$

Таким образом, из (12) и (13) следует, что действительные корни уравнения (11) соответствуют обширному классу симметричных распределений с эксцессом $-1.2<\varepsilon<\infty$.

Для того чтобы найти значение σ в формуле (4), воспользуемся (6), полагая $\nu=2$:

$$\sigma^2 = s^2\,\frac{\Gamma(1/p)}{\sqrt[p]{p^2}\cdot\Gamma(3/p)}, \tag{14}$$

где $\mu_2=s^2$ — оценка дисперсии ошибок данного инструмента, а p в (14) снимаем с графика по значению эксцесса распределения.

Воспользовавшись уравнениями (11) и (14), найдем значения p и σ для некоторых наиболее известных распределений ошибок астрономических наблюдений, а также для разностей широт, полученных из параллельных наблюдений в Полтаве и Мидзусаве (таблица). Здесь же приведены значения средней квадратичной погрешности s для этих же распределений. Сравнивая s и σ_0 (колонки 4 и 10 таблицы), видим, что эти оценки расходятся в тех случаях, когда эксцессы распределений $\varepsilon>1$.

Перейдем теперь к решению главной задачи, которую мы поставили в настоящем исследовании, а именно, к вопросу строгого сравнения точности различных инструментов и методов наблюдений, актуального, например, в рамках международного проекта MERIT [19] и при решении ряда задач фундаментальной астрометрии. Так как для этого мы предлагаем использовать обобщенную стандартную погрешность σ_0, то

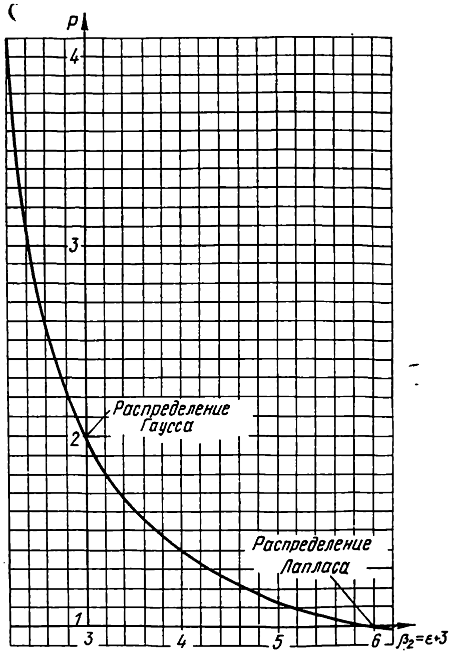

График для определения показателя степени p обобщенного распределения Лапласа—Гаусса по значению коэффициента эксцесса ε эмпирического распределения

понятно, что задачу сравнения точности различных рядов астрономических наблюдений невозможно решить без оценок дисперсии значений σ_0. Обозначим эту дисперсию через $\sigma^2_{\sigma 0}$. Для вычисления $\sigma^2_{\sigma 0}$ продифференцируем (8) помня, что значение H зависит от σ и p:

$$\sigma_{\sigma 0} = \frac{e^H}{\sqrt{2e\pi}}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\sigma}\sigma_\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\sigma_p\right)^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

Классические и энтропийные характеристики распределений ошибок некоторых рядов астрономических наблюдений и разностей широт

Номер	Наименование ряда	Объем ряда n	Классические характеристики ряда		Параметры обобщенного распределения		Эксцесс и его действительный стандарт ε $\pm\sigma_{E0}$	Энтропийные характеристика ряда	
			s $\pm\sigma_s$	ε $\pm\sigma_E$	p $\pm\sigma_p$	σ $\pm\sigma_\sigma$		e^H $\pm\sigma_{eH}$	σ_0 $\pm\sigma_{\sigma0}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Ошибки определения широты на плавающем зенит-телескопе Куксона, Гринвич [19]:								
1	наблюдения 1927—1931 гг.	4510	2.275	4.14	0.89	1.473	4.14	8.440	2.040
			0.024	0.07	0.06	0.080	0.81	0.540	0.130
2	наблюдения 1932—1936 гг.	4810	2.610	6.60	0.78	1.510	6.60	9.200	2.230
			0.027	0.07	0.07	0.120	1.47	0.800	0.190
	Широтные определения Н. А. Попова по ярким зенитным звездам, Полтава [16]:								
3	по звезде α Per	2918	0.183	0.16	1.86	0.178	0.16	0.756	0.183
			0.002	0.09	0.09	0.004	0.11	0.021	0.005
4	по звезде η UMa	288	0.183	0.26	1.78	0.175	0.26	0.755	0.183
			0.002	0.09	0.08	0.004	0.12	0,022	0,005
	Разности ближайших определений широты, Мидзусава [7]:								
5	для зенит-телескопа Бамберга	6460	0.347	0.35	1.72	0.327	0.35	1.431	0.346
			0.003	0.06	0.06	0.005	0.08	0.029	0.007
6	для зенит-телескопа Куксона	8130	0.454	0.52	1.62	0.417	0.52	1.867	0.452
			0.004	0.05	0.05	0.006	0.09	0.036	0,009
7	для фотографической зенитной трубы	7159	0.338	1.59	1.23	0.271	1.59	1.353	0.327
			0.003	0.06	0.05	0.006	0.20	0.039	0.009
8	Остаточные погрешности определения времени и широты на астролябии Данжона, Полтава [6]	8823	0.431	1.40	1.28	0.353	1.40	1.735	0.420
			0.003	0.05	0.04	0.007	0.17	0.042	0.010
9	Разности широт зенит-телескопов Цейса и Бамберга, Полтава, [7]	7057	0.241	1.02	1.40	0.207	1.02	0.980	0.237
			0.002	0.06	0.04	0.004	0.14	0.024	0.006
10	Разности широт зенит-телескопов Бамберга и Куксона, Мидзусава, 1940—1949 гг. [7]	4008	0.328	0.91	1.44	0.285	0.91	1.338	0.324
			0.004	0.08	0.06	0.007	0.17	0.042	0.010
11	То же, 1957—1961 гг. [7]	2127	0.263	0.44	1.66	0.244	0.44	1.083	0.262
			0.004	0.11	0.09	0.007	0.16	0.040	0.010
12	Ошибки наблюдений Голосеевского каталога звезд широтных программ, Киев [18]	11691	0.454	0.72	1.52	0.406	0.72	1.860	0.450
			0.003	0.05	0.04	0.008	0.09	0.034	0.008
	Ошибки наблюдений склонений обсолютным методом, Киев [10], зоны:								
13	0° — 10°	1733	0.270	0.59	1.58	0.246	0.59	1.109	0.268
			0.005	0.12	0.10	0.008	0.20	0.047	0.017
14	10° — 20°	1334	0.282	1.45	1.27	0.230	1.45	1.134	0.279
			0.005	0.13	0.11	0.012	0.42	0.071	0.011
15	20° — 30°	1288	0.291	0.58	1.57	0.264	0.58	1.194	0.281
			0.006	0.14	0.12	0.011	0.24	0.059	0.010
16	30° — 40°	1067	0.324	0.68	1.54	0.291	0.68	1.328	0.324
			0.007	0.15	0.13	0.013	0.27	0.074	0.018

где σ_σ и σ_p — стандартные ошибки параметров σ и p. Для практического использования формулы (15) необходимо найти неизвестные $\partial H/\partial\sigma$, $\partial H/\partial p$, σ_σ, σ_p. Для этого логарифмируя (3) и беря частные производные, имеем:

$$\partial H/\partial\sigma = \sigma^{-1}; \qquad \partial H/\partial p = -p^{-2}(\ln p + \psi + p) = \Delta_1, \tag{16}$$

где ψ — пси-функция по параметру p^{-1}.

Значение σ_σ в (15) можно определить, используя логарифм формулы (14):

$$\ln\sigma = \ln s + 0.5\ln\Gamma(p^{-1}) - p^{-1}\ln p - 0.5\ln\Gamma(3/p); \tag{17}$$

$$\frac{\partial\ln\sigma}{\partial s} = \frac{1}{s}; \qquad \frac{\partial\ln\sigma}{\partial p} = \frac{1}{p^2}\left[\frac{3}{2}\psi\left(\frac{3}{p}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{p}\right) + \ln p - 1\right] = \Delta_2. \tag{18}$$

С учетом (18) имеем:

$$\sigma_\sigma = \sigma(\sigma_s^2\cdot s^{-2} + \Delta_2^2\cdot\sigma_p^2)^{1/2}. \tag{19}$$

Значение σ_s^2 в (19) для любого распределения n наблюдений можно определить по формуле ([11], с. 387):

$$\sigma_s^2 = (\mu_4 - \mu_2^2)/4\mu_2 + O(1/n^2), \tag{20}$$

где O — погрешность формулы (20), не превышающая $1/n^2$, пренебрегая которой и помня, что $\beta_2 = \mu^4/\mu_2^2$, имеем:

$$\sigma_s^2 = s^2(\beta_2 - 1)/4n. \tag{21}$$

Легко видеть, что для нормального закона ($p=2$), выражение (21) принимает вид: $\sigma_s{}^2 = s^2/2n$. Значение σ_p в (15) и (19) получаем, логарифмируя (11):

$$\ln\beta_2 = \ln\Gamma(5/p) + \ln\Gamma(1/p) - 2\ln\Gamma(3/p). \tag{22}$$

Так как стандартная ошибка эксцесса σ_ε равна стандартной ошибке моментного отношения β_2, то, используя (22), получим $\sigma_\varepsilon/\beta_2 = (\partial\ln\beta_2/\partial p)\cdot\sigma_p$. Откуда

$$\sigma_p = \frac{\sigma_\varepsilon}{\beta_2}\left(\frac{\partial\ln\beta_2}{\partial p}\right)^{-1}. \tag{23}$$

Дифференцируя (22), находим:

$$\partial\ln\beta_2/\partial p = -(1/p^2)\left[5\psi(5/p) + \psi(1/p) - 6\psi(3/p)\right] = \Delta_3. \tag{24}$$

Значение σ_ε в (23) со степенью приближения $1/n^{3/2}$ можно получить для любого распределения по следующей формуле ([11], с. 391), помня, что нечетные центральные моменты для (2) равны нулю:

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\mu_8 - 4\mu_2\beta_2\mu_6 + 4\mu_2^4\beta_2^3 - \mu_2^4\beta_2^2)/(n\cdot\mu_2^4). \tag{25}$$

Подставляя в (25) моменты μ_8, μ_6, μ_2, вычисленные по формуле (6), получим после некоторых преобразований:

$$\sigma_\varepsilon^2 = n^{-1}\left\{\frac{\Gamma(9/p)\,[\Gamma(1/p)]^3}{[\Gamma(3/p)]^4} - \frac{4\beta_2\cdot\Gamma(7/p)\,[\Gamma(1/p)]^2}{[\Gamma(3/p)]^3} + \beta_2^2(4\beta_2 - 1)\right\}. \tag{26}$$

Полагая в (26) $p=2$, получаем известное выражение:

$$\sigma_\varepsilon^2 = 24/n. \tag{27}$$

Оценка (27) является смещенной [11]. Для того чтобы устранить это смещение, воспользуемся несмещенной оценкой дисперсии эксцесса для нормального закона

$$\sigma_E^2 = [24n(n-2)(n-3)]/[(n-1)^2(n+3)(n+5)]. \tag{28}$$

С учетом (27) выражение (28) можно переписать в виде:

$$\sigma_{E0}^2 = \sigma_\varepsilon^2[n^2(n-2)(n-3)]/[(n-1)^2(n+3)(n+5)], \tag{29}$$

где σ_ε^2 находят по формуле (26) для распределения с данным p. В 5 и 8 колонках таблицы приведены σ_E и σ_{E0}, найденные по формулам (28) и (29). Как видим из таблицы, в некоторых случаях σ_E и σ_{E0} существенно различаются. Например, для первого и второго ряда значения $\sigma_E=0.07$. Правильные же оценки ошибок эксцесса σ_{E0} для этих рядов, найденные с учетом закона распределения, соответственно равны 0.80 и 1.47, т. е. для первого ряда оценки σ_E завышает точность эксцесса в 11, а для второго ряда в 21 раз. В то же время для рядов, ошибки которых близки к закону Гаусса, расхождения σ_E и σ_{E0} незначительны.

Учитывая формулы (16), (19), (21), (23), (24), (26) и (29), выражение (15) можно переписать в виде:

$$\sigma_{\sigma 0}=\frac{e^{H}}{\sqrt{2e\pi}}\left[\frac{\sigma_s^2}{s^2}+\frac{\sigma_{E0}^2}{\beta_2^2}\left(\frac{\Delta_1^2}{\Delta_3^2}+\frac{\Delta_2^2}{\Delta_3^2}\right)\right]^{1/2}, \tag{30}$$

где e^H получают по формуле (4) на основании найденных значений p и σ.

В 10-й колонке таблицы приведены оценки $\sigma_{\sigma 0}$, вычисленные по формуле (30). Сравнивая σ_s и $\sigma_{\sigma 0}$, видим, что они различаются иногда более чем в 6 раз, а в среднем $\sigma_{\sigma 0}$ в 2—3 раза больше значений σ_s, которые получены в предположении истинности нормального закона. Такое расхождение вызвано тем, что, вводя второй член в квадратных скобках формулы (30), мы учитываем эксцесс эмпирических распределений. Принимая несостоятельную гипотезу об истинности нормального закона, тем самым исключаем член с σ^2_{E0} в формуле (30). Иначе говоря, полагая $\varepsilon=0$, мы вынуждены считать, что и $\sigma^2_{E0}=0$, практически же для реального ряда это допущение недоказуемо, поскольку всегда число наблюдений $n<\infty$. Даже если результаты наблюдений и оказываются почти гауссовыми, эксцесс реального ряда ошибок является случайной величиной, подверженной разбросу. Это значит, что σ_{E0} нельзя не учитывать при оценке и сравнении точности астрономических инструментов.

Анализируя ряды, приведенные в таблице, с точки зрения излагаемой и более строгой математической теории, мы убеждаемся, что учет типа закона распределения погрешностей может существенно изменить наши выводы о метрологической однородности некоторых из них. Например, классические способы оценки точности рядов 1, 2 (4-я колонка таблицы), свидетельствуют о существенном различии этих рядов по точности. Обобщенные стандартные погрешности для этих же рядов (10-я колонка таблицы) этого не подтверждают, что более естественно, так как они получены на одном и том же инструменте, в одном и том же месте наблюдений опытными наблюдателями. Для рядов 15 и 16 таблицы классические способы подтверждают их неоднородность, а обобщенные оценки точности ставят этот вывод под сомнение. Приведенные примеры являются достаточно убедительными и подтверждают актуальность некоторых выводов Тьюки, сделанных им еще в 1965 г. Эти выводы настолько интересны, что уместно здесь их привести полностью: «Если мы хотим быть реалистами, если мы хотим получать всюду наибольший эффект из наших данных, то мы должны примириться с возможностью — нет, почти с достоверностью — что распределение наших наблюдений часто будет таким, для которого минимум квадратичного выражения — выбор очень плохой. И нужно лишь незначительное изменение кривой распределения Гаусса, чтобы ... сумма квадратов отклонений стала почти неприемлемой характеристикой ее разброса. Платой за более общее и практически полезное мышление, за реализм будет преобразование наших приемов в более далекие от линейных и почти наверняка приближенные..., процедуры же, необходимые для достижения лучшего результата будут в конце концов лишь ненамного более сложными, чем оценка средней квадратичной функции» [21].

Итак мы можем сделать следующие выводы.

1. При оценках точности астрономических инструментов и методов по наблюдениям, ошибки которых имеют значимый ненулевой эксцесс, следует вместо средней квадратичной погрешности вычислять предложенную нами обобщенную среднюю квадратичную погрешность, которая учитывает уклонения действительных распределений ошибок от нормального закона.

2. Допущение всеобщности закона Гаусса имеет наиболее нежелательные последствия при оценках значимости расхождений точностных характеристик астрономических инструментов и методов наблюдений, так как указанное допущение приводит к существенному занижению погрешностей этих характеристик.

3. В практическом отношении преимущества обобщенного распределения Лапласа — Гаусса (2) перед кривой Пирсона VII типа, состоят в том, что применение последней приводит к громоздким статистическим процедурам, которые не позволяют получить формулы, столь же простые и удобные, как формулы (7—9) этой статьи.

1. *Большаков В. Д.* Теория ошибок наблюдений.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Недра, 1983.—221 с.
2. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики.— М.: ВЦ АН СССР, 1968.—474 с.

3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1963.—1100 с.
4. *Джунь И. В.* Распределение Пирсона VII типа в ошибках наблюдений над колебаниями широт.— Астрометрия и астрофизика, 1969, вып. 2, с. 101—115.
5. *Джунь И. В.* О назначении весов астрономическим наблюдениям.— Там же, 1970, вып. 10, с. 26—34.
6. *Джунь И. В.* Анализ параллельных широтных наблюдений, выполненных по общей программе: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1974.—19 с.
7. *Джунь И. В., Славинская А. А.* Закон распределения остаточных погрешностей определения времени и широты на астролябии Данжона.— Вращение и прилив. деформации Земли. 1984, вып. 16, с. 69—74.
8. *Идельсон Н. И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений.— М. : Геодезиздат, 1947.—359 с.
9. *Кемниц Ю. В.* Теория ошибок измерений.— 2-е изд., перераб. и доп.— М. : Недра, 1967.—176 с.
10. *Король А. К.* Склонения ярких и слабых фундаментальных звезд в единой системе.— Киев : Наук. думка, 1969.—234 с.
11. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М. : Мир, 1975.—648 с.
12. *Кульбак С.* Теория информации и статистика.— М. : Наука, 1967.—408 с.
13. *Мещеряков Г. А., Волжанин С. Д., Киричук В. В.* Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок.— Геодезия и картография, 1984, № 2, с. 9—11.
14. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений.— М. : Радио и связь, 1983.—320 с.
15. *Петрович М. Л.* Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ.— М. : Финансы и статистика, 1982.—200 с.
16. *Попов Н. А.* Малые периодические члены в колебаниях широты Полтавы по наблюдениям ярких зенитных звезд в 1939—1965 гг.— Киев : Наук. думка, 1968.— 151 с.
17. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М. : Наука, 1979.—832 с.
18. *Харин А. С., Яцкив Я. С.* Изучение ошибок наблюдений Голосеевского каталога звезд широтных программ. I.— Астрометрия и астрофизика, 1970, вып. 10, с. 34—43.
19. *Яцкив Я. С.* Международный проект MERIT. Итоги первой наблюдательной кампании, 1 авг.— 31 окт. 1980 г.— Киев, 1981.—35 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики; ИТФ — 81—124 Р).
20. *Jeffreys H.* Theory of probability.— Oxford: Clarendon press, 1961.—468 p.
21. *Tukey J. W.* Data analysis and the frontiers of geophysics.— Science, 1965, **148**, N 3675, p. 1283—1289.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва,
Ровно

Поступила в редакцию 18.02.85