



УДК 532.526

© 2010

Член-корреспондент НАН України А. А. Авраменко

Нелинейная модель неустойчивости Лоренца для пористых сред

Мета роботи — дослідження нелінійної нестійкості рідини в зазорі з пористим середовищем кінцевої товщини, що підігрівається знизу. При цьому встановлена фіксована різниця температур між верхньою холодною поверхнею й нижньою гарячою. Для розв'язання задачі використовується підхід Лоренца. В результаті знайдено дивний аттрактор у фазовому просторі, що може бути інтерпретовано як турбулентний рух.

Конвективная неустойчивость Рэлея–Бенара в пористых средах подробно исследована для различных условий в линейном приближении. Результаты этих исследований подытожены в работе [1]. Линейный анализ позволяет определить критерий возникновения конвективной неустойчивости. Однако в макропористых средах возможно развитие турбулентного режима движения [2]. Для определения критериев возникновения турбулентности в свободноконвективных условиях чистых жидкостей Лоренц [3] предложил нелинейный подход, основанный на определении условий, при которых в фазовом пространстве нелинейной системы автономных дифференциальных уравнений третьего и выше порядков появляется странный аттрактор. Это и является критерием зарождения турбулентного движения. Таким образом, цель настоящей работы состоит в построении модели Лоренца для пористых сред и исследование на ее основе критериев нелинейной конвективной неустойчивости.

Формулировка проблемы. Рассмотрим двухмерную систему $x - y$ (x — горизонтальная, y — вертикальная координата), которая представляет собой две параллельные горизонтальные бесконечные пластины, между которыми расположена пористая среда с проницаемостью K . Высота зазора между пластинами h . В начальный момент времени существует перепад температуры $\Delta T = T_1 - T_2$ между нижней $y = 0$ (нагретой $T = T_1$) и верхней (холодной $T = T_2$) пластинами.

В приближении Буссинеска уравнения свободноконвективного течения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\nu}{K} \mathbf{U} + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{g} \beta T, \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)T = \alpha\nabla^2 T, \quad (3)$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; p — давления; t — время; \mathbf{U} — вектор скорости (u — x -компонента, v — y -компонента); ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; α — температуропроводность; β — коэффициент объемного расширения. Второе слагаемое в правой части уравнения (1) описывает линейное “пористое” сопротивление Дарси. Так как рассматривается двумерная задача, то для анализа удобно ввести функцию тока ψ следующим образом: $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. После подстановки этих соотношения в систему (1)–(3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = -\frac{\nu}{K}\nabla^2\psi + \nu\nabla^4\psi + g\beta\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \alpha\nabla^2\Theta, \quad (5)$$

где $\Theta = T - T_1$ представляет собой избыточную температуру. В этом случае распределение температур удобно представить в виде $\Theta = \theta - \Delta T y/h$, где θ есть отклонение от линейного невозмущенного профиля температуры, вызванное конвективным возмущением. Учитывая выражение для Θ , преобразуем систему (4), (5) в

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = -\frac{\nu}{K}\nabla^2\psi + \nu\nabla^4\psi + g\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha\nabla^2\theta. \quad (7)$$

Рассмотрим задачу со свободными границами. В этом случае система (6), (7) должна быть проанализирована при следующих условиях:

$$\psi = \nabla^2\psi = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \psi = \nabla^2\psi = \theta = 0 \quad y = h. \quad (8)$$

Возмущенные уравнения и их анализ. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (8), выберем следующие соотношения для возмущающих функций [3]:

$$\psi = \sqrt{2}\frac{\alpha(1+\lambda^2)}{\lambda}X(t)\sin\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \quad (9)$$

$$\theta = \frac{\Delta T}{\pi r}\left[\sqrt{2}Y(t)\cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t)\sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right)\right], \quad (10)$$

где $r = \text{Ra}/\text{Ra}_c$, $\text{Ra} = g\beta h^3\Delta T/(\alpha\nu)$, $\text{Ra}_c = \pi^4(1+\lambda^2)^3/\lambda^2$ — числа Рэлея. В (9) и (10) $X(t)$ — это амплитуда конвективного движения; $Y(t)$ — разность температур между восходящими и нисходящими потоками; $Z(t)$ — отклонение вертикального профиля температур от линейного. Подстановка (9) и (10) в (6) дает

$$\frac{dX(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = \text{Pr}\left[Y(\text{Fo}) - X(\text{Fo})\left(1 + \frac{b}{4\pi^2\text{Da}}\right)\right], \quad (11)$$

где $\text{Da} = K/h^2$ — число Дарси; $\text{Pr} = \nu/\alpha$ — число Прандтля; $\text{Fo} = \pi^2(1+\lambda^2)\alpha t/h^2$ — число Фурье; $b = 4/(1+\lambda^2)$. После подстановки (9) и (10) в (7) получаем

$$\left[\frac{dY(\text{Fo})}{d\text{Fo}} - rX(\text{Fo}) + Y(\text{Fo})\right]\cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) -$$

$$\begin{aligned}
& - 2X(\text{Fo})Z(\text{Fo}) \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{h}\right) - \\
& - \sqrt{2} \left[\frac{dZ(\text{Fo})}{d\text{Fo}} - X(\text{Fo})Y(\text{Fo}) + bZ(\text{Fo}) \right] \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right) = R(x, y).
\end{aligned}$$

Функция $R(x, y)$ — невязка. Чтобы найти $dY/d\text{Fo}$ и $dZ/d\text{Fo}$, необходимо (следуя методу Галеркина) умножить $R(x, y)$ на пробные функции (в нашем случае $\sin(\pi y/h)$ и $\sin(2\pi y/h)$) и проинтегрировать по y в пределах от нуля до h

$$\frac{dY(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = rX(\text{Fo}) - X(\text{Fo})Z(\text{Fo}) - Y(\text{Fo}), \quad (12)$$

$$\frac{dZ(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = X(\text{Fo})Y(\text{Fo}) - bZ(\text{Fo}). \quad (13)$$

Таким образом, имеем систему трех нелинейных уравнений (11)–(13). Эта система отличается от системы Лоренца [3] для чистой жидкости слагаемым $b/(4\pi^2\text{Da})$ в уравнении (11). В пределе $\text{Da} \rightarrow \infty$ система (11)–(13) трансформируется в систему Лоренца.

Численное исследование системы (11)–(13) было проведено с помощью пакета “Mathematica”. Это исследование показало, что в пористой среде, как и в чистой жидкости, существуют режимы, которые характеризуются возникновением странного аттрактора в фазовом пространстве $(X(\text{Fo}), Y(\text{Fo}), Z(\text{Fo}))$. Возникновение странного аттрактора характеризуется тем, что система начинает описывать вокруг одного из неустойчивых фокусов витки с амплитудой, возрастающей во времени. После нескольких таких витков система внезапно оставляет этот режим и устремляется ко второму фокусу, начиная описывать вокруг него витки по раскручивающейся спирали. Затем, совершив несколько витков, система перепрыгивает в окрестность первого фокуса и т. д. Промежутки времени, в течение которых система находится в окрестности каждого фокуса, прежде чем перепрыгнуть в окрестность другого, распределены стохастически, и в описываемом процессе нет никакой закономерности, хотя он порожден разворачивающейся во времени детерминистической системой. Число витков, описываемых системой вокруг каждого из двух фокусов, случайно и потому совершенно непредсказуемо. Вид такого аттрактора приведен в [3].

В работе Лоренца [3] был исследован случай для следующих значений параметров: $b = 8/3$ ($\lambda = 2^{-1/2}$), $\text{Pr} = 10$. При этом странный аттрактор возникает при $r \approx 28$. Был выбран именно данный набор параметров, так как при этом число Рэлея Ra_c имеет минимум. Однако минимум относительного числа Рэлея r , при котором возникает странный аттрактор, имеет другую координату. Поэтому необходимо было исследовать широкий диапазон изменения параметра b . В нашем исследовании проанализирован вариант при значениях $\text{Da} = 0,05$ и $\text{Pr} = 3$. Оказалось, что минимум относительного числа Рэлея $r_{\min} = 11$ находится в точке $b \approx 0,3$. Однако само число r зависит от параметра b . Число же Рэлея Ra , которое не включает волновое число, есть произведение $r \text{Ra}_c$. Поэтому были построены зависимости $\text{Ra} = \text{Ra}(b)$, отражающие границы возникновения и аннигиляции странного аттрактора (рис. 1). Минимум нижней кривой $\text{Ra}_{\text{cr1}} \approx 33481$ (при $b \approx 2,1$) представляет собой критическое число Рэлея возникновения странного аттрактора. Физически это соответствует процессу зарождения турбулентности, т. е. началу переходного режима движения. Минимум верхней кривой $\text{Ra}_{\text{cr2}} \approx 126484$ (при $b \approx 2,1$) представляет собой минимальное значение числа Рэлея, соответствующее аннигиляции странного аттрактора. В области, лежащей выше верхней кривой, наблюдается полностью хаотичное движение в фазовом пространстве. Это

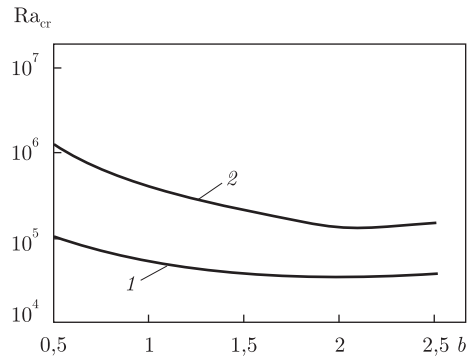


Рис. 1. Значения критических чисел Рэлея: 1 — Ra_{cr1} ; 2 — Ra_{cr2}

соответствует режиму развитой турбулентности, т. е. верхняя кривая является границей, отделяющей переходный режим от режима развитой турбулентности. Следовательно, в макропористых средах в диапазоне чисел Рэлея от $\sim 33 \cdot 10^3$ до $\sim 123 \cdot 10^3$ реализуется переход от конвективного движения к развитому турбулентному при $Da = 0,05$ и $Pr = 3$.

Таким образом, в настоящей работе построена нелинейная модель Лоренца для макропористых сред, позволяющая исследовать процессы неустойчивости конвективного движения. Численный анализ позволил выявить границы возникновения и аннигиляции странного аттрактора Лоренца, появление которого соответствует наступлению переходного режима течения. Граница аннигиляции соответствует наступлению режима развитого турбулентного движения. Разработанная модель позволяет построить границы областей, соответствующие различным режимам движения конвективного течения в макропористых средах для пары параметров (Da , Pr).

1. Nield D. A., Bejan A. Convection in porous media. – New York: Springer, 2006. – 640 p.
2. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Basok B. I., Blinov D. G. Investigation of stability of a laminar flow in a parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium // Phys. Fluids. – 2005. – **17**. – P. 094102-1–094102-6.
3. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. – 1963. – **20**. – P. 130–141.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 03.07.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko**

A nonlinear model of the Lorenz instability for porous media

We investigate the nonlinear instability of a fluid slab of finite thickness in the porous medium which is heated from below. There is a fixed temperature difference between the top cold surface and the bottom hot surface. Within the Lorenz approach, a strange attractor in the phase space is found. It can be interpreted as a turbulent motion.