

Ю. В. Корниенко, С. И. Скуратовский

О реконструкции неискаженного изображения объекта по серии его изображений, искаженных средой со случайными неоднородностями показателя преломления

(Представлено академиком НАН Украины В. М. Яковенко)

Розглядається задача досягнення дифракційної межі розділення інструмента при спостереженні об'єкта скрізь середовище з випадковими неоднорідностями показника заломлення. Пропонується новий спосіб постдетекторного накопичення сигналу за досить великою послідовністю миттєвих зображень. Ефективність методу демонструється на прикладі послідовності зображень, одержаних комп'ютерним моделюванням.

На практике часто приходится встречаться с задачей наблюдения объекта сквозь среду со случайными неоднородностями показателя преломления. Если при этом требуется сформировать изображение объекта, задача существенно усложняется разрушающим влиянием на изображение искажений фазового фронта волны, обусловленных неоднородностями среды. Проблема преодоления этого влияния является одной из важных задач современной науки.

Такого рода задачи встречаются в длинноволновой радиоастрономии (вредным фактором являются флуктуации электронной плотности в ионосфере), в гидролокации (мешают флуктуации температуры воды) и т. д. Особенно остро стоит эта задача, когда требуется наблюдать в оптическом диапазоне заатмосферный объект сквозь земную атмосферу с характерными для нее случайными неоднородностями показателя преломления, обусловленными преимущественно флуктуациями температуры воздуха. Такие наблюдения являются основой современной астрономии; потребность в них также возникает при решении некоторых прикладных задач, связанных с объектами искусственного происхождения.

Проблема преодоления мешающего влияния атмосферы имеет долгую историю и богатый арсенал приемов, предложенных для ее решения. Часть из них была реализована и дала несомненный положительный эффект. Однако эта проблема по-прежнему далека от своего окончательного решения и требует дальнейших исследований. Данная работа посвящена новому результату, полученному на этом пути и открывающему возможность более успешно, чем раньше, реконструировать неискаженное изображение объекта с предельным дифракционным разрешением телескопа по серии искаженных изображений, полученных сквозь турбулентную атмосферу.

Влияние атмосферы на изображение и пути его уменьшения. С точки зрения волновой оптики возможность построить изображение удаленного объекта с помощью телескопа основана на том факте, что в когерентном свете распределение комплексной амплитуды монохроматического поля в задней фокальной плоскости линзы является Фурье-образом распределения комплексной амплитуды поля в передней фокальной плоскости [1]. При наблюдении объекта в некогерентном свете измерению в каждой точке задней

фокальной плоскости доступна лишь средняя по времени интенсивность света (так как амплитуда слишком быстро изменяется со временем). Зависимость этой интенсивности от координат выражается функцией, которая является Фурье-образом функции когерентности поля волны, приходящей от объекта. Поскольку функция когерентности в силу теоремы ван Циттерта–Цернике [2] является Фурье-образом яркости объекта, яркость в задней фокальной области оказывается Фурье-образом Фурье-образа яркости объекта, т. е. перевернутым его изображением.

Так как телескоп способен пропустить только ту часть пространственно-частотного спектра функции когерентности, которая попадает в апертуру телескопа, построенное им изображение $I(x, y)$ оказывается сверткой истинного изображения $I_0(x, y)$ с дифракционным ядром телескопа $G_0(x, y)$, которое является Фурье-образом автосвертки апертурной функции телескопа $A(\xi, \eta)$, равной единице внутри апертуры и нулю вне ее. Его шириной определяется дифракционное разрешение телескопа. Она обратно пропорциональна диаметру апертуры.

При наблюдении объекта сквозь тонкий слой среды со слабыми неоднородностями показателя преломления можно считать, что искажению подвергается только фаза приходящей от объекта волны. Это искажение имеет случайный характер, зависит от координат ξ в апертурной плоскости телескопа и времени t и описывается заранее неизвестной функцией $\delta(\xi, \eta, t)$. Влияние этого искажения приводит к тому, что изображение, построенное телескопом, оказывается сверткой истинного изображения с ядром $G(\xi, \eta, t)$, являющимся Фурье-образом автосвертки атмосферно-апертурной функции, равной $a(\xi, \eta, t) \exp[i\delta(\xi, \eta, t)]$ внутри апертуры телескопа и нулю — за ее пределами. Для тонкого слоя турбулентной среды можно считать, что $a(\xi, \eta, t) = 1$. При съемке объекта с длительной экспозицией получаемое изображение является сверткой I_0 с ядром g , равным интегралу от G по времени экспозиции. Влияние атмосферы при длительной экспозиции подавляет высшие пространственные частоты в изображении и существенно снижает разрешающую способность телескопа, часто в десятки раз и более.

Было предложено много способов обработки изображений, полученных при наблюдении с помощью телескопа, позволяющих уменьшить искажения, внесенные атмосферой. Так, в работе [3] рассматривается возможность достичь этой цели путем воздействия на изображение оператором, обратным или квазиобратным искажающему оператору. Этот способ в случае длительной экспозиции реально позволяет повысить разрешение лишь в два-три раза. В случае экспозиции, короткой по сравнению с временем заморозки атмосферы, возникает проблема достаточно точного измерения замывающего ядра. Существенно большего успеха позволяет достичь метод Лабейри [4] (спекл-интерферометрия), основанный на накоплении по времени квадрата модуля Фурье-компонент изображения. Он позволяет достичь дифракционного предела разрешения телескопа, однако дает не изображение объекта, а лишь его автосвертку, поскольку не использует содержащуюся в серии изображений информацию о фазах Фурье-компонент. Чтобы использовать ее, Нокс и Томпсон [5] предложили способ накопления фаз Фурье-компонент, однако он наталкивается на трудности, связанные с влиянием шума регистрации.

Другой способ накопления фаз, более простой и менее чувствительный к шуму регистрации, предложил Содин [6]. Он состоит в прямом усреднении фаз Фурье-компонент изображения по последовательности мгновенных изображений. Этот метод эффективен при малых значениях среднеквадратичного искажения фазы, которых можно ожидать в радиодиапазоне, однако при реальных его значениях в оптическом диапазоне (2π – 6π) возникают

трудности, связанные с тем, что фаза по одному изображению определяется лишь с точностью до $2\pi n$, где n — целое число.

Оптимальное накопление оптического сигнала при наблюдении объекта с помощью телескопа сквозь турбулентную атмосферу. Чтобы прийти к эффективному способу реконструкции изображения объекта по последовательности мгновенных его изображений, искаженных случайным атмосферным ядром (неизвестным и для каждого изображения своим), следует исходить из представления об оптимальном пространственно-временном накоплении астрономического изображения [7–9]. Какой именно способ накопления сигнала является оптимальным, зависит от разных обстоятельств, но главным образом, от статистики сигнала, статистики шума и другой априорной информации о сигнале и шуме. В данной работе мы ограничимся простейшими предположениями о статистике сигнала и шума. Относительно сигнала будем считать его априорное распределение таким, что фазы его Фурье-компонент равновероятны, а плотность вероятности их модулей имеет широкий максимум и в актуальной области значений может считаться постоянной.

Относительно шума будем предполагать, что шум регистрации отсутствует, а атмосферный шум является мультипликативным, причем логарифмы Фурье-компонент атмосферного ядра распределены нормально. Будем ставить перед собой задачу оптимального временного накопления сигнала при том способе пространственного накопления, который жестко присущ формированию изображения с помощью традиционного телескопа [7].

Исходя из теории оптимальных статистических решений [10], можно заключить, что оптимальным накоплением сигнала (по критерию максимума апостериорной плотности вероятности фаз Фурье-компонент) в этом случае является геометрическое усреднение по последовательности исходных изображений их Фурье-компонент [7]

$$\tilde{J}_i(\xi, \eta, t) = M_i(\xi, \eta, t) \exp[i\Phi_i(\xi, \eta, t)]. \quad (1)$$

Практически это означает арифметическое усреднение их логарифмов

$$\text{Ln}[\tilde{J}_j(\xi, \eta, t)] = \text{Ln}[M_j(\xi, \eta, t)] + i\Phi_j(\xi, \eta, t), \quad (2)$$

т. е. логарифмов модулей и значений фаз. При этом, однако, важным моментом является тот факт, что фазовые искажения $\Phi(\xi, \eta, t)$ могут принимать значения на всей вещественной оси, а не только в единственном интервале длиной 2π , что придает то же свойство и возмущенным фазам Фурье-компонент зарегистрированных изображений. Хотя изменение фаз отдельных Фурье-компонент изображения на 2π является тождественным преобразованием этого изображения, оно может изменить результат усреднения фаз на величину, отличную от $2\pi k$ (где k — целое число), и вредно повлиять на реконструируемое изображение. При большом количестве таких событий это повлечет за собой провал попытки правильно реконструировать изображение. Поэтому представляет интерес проанализировать условие, при котором процедура прямого усреднения фаз Фурье-компонент (при котором возможные слагаемые $2\pi k$ не учитываются) оказалась бы успешной. Если истинное значение фазы Фурье-компоненты равно ϕ , причем $-\pi < \phi < +\pi$, а искажение Фурье-компоненты равно $\psi(\xi, \eta, t)$, в результате получается значение искаженной фазы

$$\Phi(\xi, \eta, t) = \phi(\xi, \eta, t) + \psi(\xi, \eta, t), \quad (3)$$

где $\psi(\xi, \eta, t)$ — искажение фазы Фурье-компоненты. Поскольку $\psi(\xi, \eta, t)$ распределено нормально, существует отличная от нуля вероятность того, что значение $\Phi(\xi, \eta, t)$ выйдет за

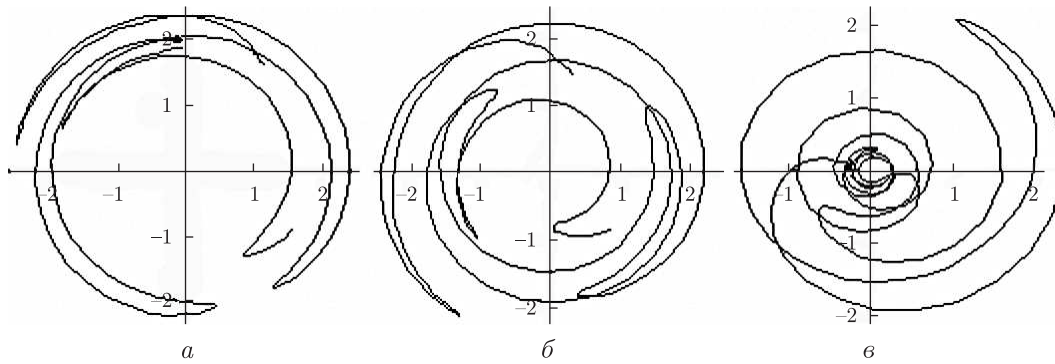


Рис. 1. Траектории одной Фурье-компоненты регистрируемого изображения для параметра Фрида 0,2 (а); 0,133 (б) и 0,067 (в)

пределы интервала $(-\pi, +\pi)$. В этом случае определение фазы $\Phi(\xi, \eta, t)$ одиночной Фурье-компоненты будет произведено с ошибкой $2\pi k$, где $k \neq 0$. Если дисперсия $\Phi(\xi, \eta, t)$ равна s^2 , вероятность p такого события при измерении фазы одной Фурье-компоненты одного изображения, невозмущенное значение которой равно Φ , составляет величину

$$p = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi - \Phi}{s\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\pi + \Phi}{s\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (4)$$

Для фиксированной Фурье-компоненты, фаза которой близка к краю интервала, при малых s одно из слагаемых в (4) намного больше другого, поэтому все ошибки 2π имеют один и тот же знак. Тогда погрешность усредненной фазы при обработке последовательности из m изображений будет приближенно равна $\varepsilon = 2\pi r m / m = 2\pi r$. Если модули всех Фурье-компонент изображения по порядку величины равны единице, это добавляет в мощность шума, вносимого в реконструируемое изображение добавку порядка $(2\pi r)^2$. Вероятность p существенно отлична от нуля только для значений Φ , лежащих в окрестностях концов интервала $(-2\pi, +2\pi)$ шириной s . Грубая оценка показывает, что обсуждаемая ошибка порождает в реконструированном изображении случайную относительную погрешность порядка $3s$. Это означает, что значение $s = 0,3$ является предельным, при котором можно получить изображение, сколько-нибудь похожее на неискаженное изображение. Таким образом, при реальных значениях s , составляющих 10–20 радиан для большого телескопа при сравнительно благоприятном состоянии атмосферы, прямое усреднение фаз оказывается неэффективным.

Чтобы преодолеть этот рубеж, следует учитывать, что логарифм Фурье-компоненты $\operatorname{Ln}(J)$ является многолистной функцией [11], определенной на римановой поверхности, и ее главное значение $\ln(J)$ не является непрерывной функцией, поскольку имеет скачок величиной $2\pi i$ на разрезе комплексной плоскости при $\Phi = \pm\pi$. Значение Фурье-компоненты изображения, соответствующее пространственной частоте (ξ, η) , описывает во времени на этой римановой поверхности случайную непрерывную траекторию $z = Z(\xi, \eta, t)$ (рис. 1). Мнимая часть ее логарифма $\operatorname{Im}[\operatorname{Ln}(J)]$ является угловой координатой точки, изображающей искаженное значение этой Фурье-компоненты.

Именно эта траектория, а не только отдельные точки на ней, должна быть предметом внимания при наблюдении объекта и обработке его результатов. Практически это означает регистрацию мгновенных изображений через интервал времени, достаточно малый по сравнению с временным радиусом корреляции атмосферных искажений. Тогда шаг между

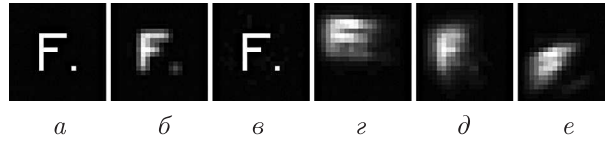


Рис. 2. Изображение объекта: *a* — истинное; *b* — построенное идеальным телескопом; *в* — откорректированное винеровским фильтром; *г–е* — примеры мгновенных изображений

отсчетами функции $\Phi(\xi, \eta, t)$ будет достаточно мал для того, чтобы ошибка на 2π в оценке Φ имела приемлемо малую вероятность.

Экспериментальная проверка предлагаемого способа накопления сигнала на компьютерной модели. Чтобы убедиться в эффективности предлагаемого способа накопления сигнала, был проведен ряд экспериментов по обработке последовательности изображений, сгенерированной на компьютере и аналогичной последовательности, получаемой при реальных наблюдениях на волне 1 нм с помощью телескопа диаметром 3 м (дифракционное угловое разрешение 0,1 с). В качестве истинного изображения объекта было принято изображение буквы F с точкой размером 8×8 пикселей (рис. 2, *a*). При этом угловой размер объекта полагался равным 0,8 угловой секунды, т. е. несколько меньше обычного углового разрешения при наблюдении через атмосферу (около $1''$). В соответствии с широко распространенным мнением [5], предполагалось, что зависимость фазового искажения в атмосфере от координат представляет собой колмогоровский случайный процесс (хотя справедливость этого утверждения требует дальнейшего изучения). Структурная функция фазовых искажений была приближенно равна $x^{5/3}$, где $x = \rho/r_0$; ρ — расстояние между двумя точками в апертурной плоскости; r_0 — параметр Фрида, т. е. расстояние ρ , на котором дисперсия разности фазовых искажений равна единице. Моделирование наблюдения производилось для значений ρ/r_0 , равных 2, 0,667, 0,2, 0,133, 0,1 и 0,067. На рис. 2, *б* показано изображение объекта, построенное идеальным телескопом в отсутствие атмосферы. Это изображение искажено неравномерностью пространственно-частотной характеристики телескопа, имеющей максимум на нулевой частоте и плавно убывающей до нуля к границе области пропускания, которая имеет форму круга диаметром, равным удвоенному диаметру телескопа. На рис. 2, *в* показано то же изображение после пространственно-частотной коррекции, выполненной винеровским фильтром в предположении, что отношение шум — сигнал на всех пространственных частотах равно 10^{-35} (такое его значение определяется машинной точностью вычислений). На рис. 2, *г, д, е* даны примеры мгновенных изображений, полученных в процессе наблюдения через атмосферу.

Влияние атмосферы определялось случайным фазовым полем $\delta(\xi, \eta)$ (ξ, η — декартовы координаты в апертурной плоскости телескопа), которое получалось генерацией белого шума и последующим сглаживанием его оператором, обеспечивающим ему заданную структурную функцию. Атмосферно-апертурная функция строилась в виде массива путем придания его элементам значений $\exp(i\delta(\xi, \eta))$ внутри апертуры и 0 — вне ее. Частотная характеристика оператора, описывающего формирование изображения телескопом в присутствии атмосферы, получалась как автосвертка атмосферно-апертурной функции. Мгновенные изображения строились путем воздействия этим оператором на первичное изображение. Каждое следующее изображение в последовательности формировалось после генерации новой реализации атмосферно-апертурной функции. В новую реализацию вносилась корреляция с предыдущими реализациями. Степень этой корреляции можно было задавать

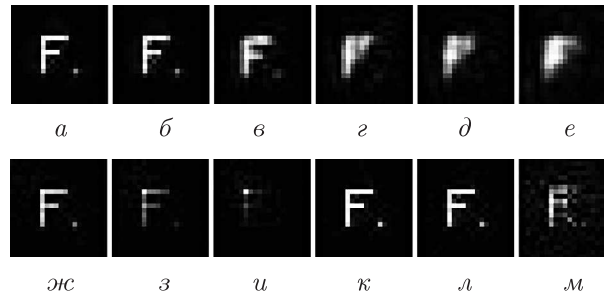


Рис. 3. Изображения, восстановленные винеровским фильтром (а–е), прямым усреднением фаз (ж–и) и усреднением фаз с применением отслеживания (к–л); значения параметра Фрида — 2 (а, ж); 0,667 (б, з); 0,2 (в, и); 0,133 (з, к); 0,1 (д, л) и 0,067 (е, м)

в широких пределах от полной статистической независимости соседних кадров до повторения все время одного и того же кадра. Фактически использовались последовательности кадров, соответствующие времени заморозенности атмосферы 0,1 с и скорости съемки 200 кадров в секунду. Такая скорость съемки нужна для обеспечения малости изменений картины атмосферных искажений от кадра к кадру.

В полученные таким путем изображения вносился нескоррелированный гауссов шум регистрации с отношением сигнал — шум 1000. Обычно серия содержала 1000 изображений, что соответствует времени съемки 5 с.

Обработка получаемых серий производилась тремя способами: арифметическим усреднением изображений и восстановлением полученного изображения винеровским фильтром (рис. 3, а — з, е); путем прямого усреднения фаз Фурье-компонент (т. е. их главных значений) и объединения их с модулями, полученными методом Лабейри (рис. 3, ж — з, и); путем усреднения логарифмов Фурье-компонент вдоль траектории на римановой поверхности (рис. 3, к — з, м). На рисунке указаны значения параметра Фрида, при которых получены соответствующие последовательности.

Из рис. 3 видно, что при больших значениях параметра Фрида, когда типичный набег фазового искажения на апертуре телескопа мал, арифметическое усреднение дает приемлемый результат, который, однако, быстро ухудшается с уменьшением параметра Фрида. Усреднение главных значений фаз Фурье-компонент дает лучший результат и сохраняет свою эффективность при меньших значениях параметра Фрида. Однако при дальнейшем его уменьшении быстро возрастает количество событий “перехлеста” фазы через границу интервала $(-\pi, +\pi)$. Распределение фазы в этом интервале начинает приближаться к равномерному, а потому средняя величина главного значения фазы приближается к нулю. Поэтому реконструированное изображение становится все более похожим на изображение светящейся точки, расположенной в начале координат.

При дальнейшем уменьшении параметра Фрида этот способ накопления сигнала становится неэффективным. Новый способ накопления (рис. 3, з — з, е) продолжает работать до $\rho/r_0 = 0,067$ и менее, однако при дальнейшем уменьшении ρ/r_0 в игру вступают новые факторы, снижающие качество реконструированного изображения, которые требуют дальнейшего изучения и поиска новых путей их преодоления.

Результаты исследования показывают значительно большие возможности нового метода временного накопления сигнала по сравнению с ранее известными.

1. *Маршалл А., Франсон М.* Структура оптического изображения. Дифракционная теория и влияние когерентности света. – Москва: Мир, 1964. – 295 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Москва: Наука, 1973. – 719 с.
3. *Дудин В. Н.* О возможности учета погрешностей, вызванных замытием изображений планет // *Астроном. журн.* – 1969. – **46**, вып. 5. – С. 1064–1073.
4. *Labeyrie A.* Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analyzing speckle patterns in star images // *Astron. and Astrophys.* – 1970. – **6**, No 1. – P. 85–87.
5. *Клох К. Т., Thompson B. J.* Recovery of images from atmospherically degraded short-exposure photographs // *Astrophys. J.* – 1974. – **193**. – P. L45–L48.
6. *Содин Л. Г.* О возможности достижения дифракционного предела разрешения при работе телескопа в турбулентной атмосфере // *Письма в астроном. журн.* – 1976. – **2**. – С. 554–558.
7. *Корниенко Ю. В.* Интерферометрический подход к проблеме видения сквозь турбулентную атмосферу. I // *Кинематика и физика небесных тел.* – 1994. – **10**, № 2. – С. 98–106.
8. *Корниенко Ю. В.* Статистический подход к фильтрации и информативность изображения // *Радиофизика и электроника.* – 2005. – **10**, спецвыпуск. – С. 652–676.
9. *Корниенко Ю. В.* Обработка изображений в ИРЭ НАНУ // Там же. – 2008. – **13**, спецвыпуск. – С. 423–445.
10. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. – Москва: Мир, 1974. – 491 с.
11. *Многолистная функция.* Математическая энциклопедия. Т. 3. – Москва: Сов. энциклопедия, 1982. – 1183 с.

*Институт радиофизики и электроники
им. А. Я. Усикова НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 25.06.2009

Yu. V. Kornienko, S. I. Skuratovskiy

About the reconstruction of the undistorted image of an object by a series of its images distorted by a medium with random inhomogeneities of the refractive index

The problem of obtaining the diffraction-limited image, while the object is observed through a medium with random inhomogeneities of the refractive index, is discussed. A new method of post-detector signal accumulation by a sufficiently long sequence of instantaneous images is proposed. The effectiveness of the method is demonstrated by the example of image sequences obtained by means of computer modeling.