

А. А. Каминский, Л. А. Кипнис

## О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

*Пропонується метод розрахунку повної зони передруйнування в кінці тріщини на границі розділу пружних середовищ в рамках комплексної моделі, що доповнює модель Комаїноу припущенням про існування бокової зони передруйнування.*

Согласно контактной модели трещины [1], в условиях плоской деформации при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи конца трещины, расположенной на границе раздела двух различных упругих сред, возникает зона контакта берегов трещины. В соответствующей задаче теории упругости введение линии разрыва касательного смещения, моделирующей эту зону, устраняет известную осцилляцию напряжений и смещений в конце трещины [2], причем особенность напряжений в конце трещины становится корневой.

В [3] на основе контактной модели трещины путем анализа сингулярного поля напряжений вблизи конца трещины определяется начальный угол ее поворота. Однако при этом не учитывается существование возникающей и развивающейся вблизи конца трещины боковой зоны предразрушения, расположенной в более хрупком материале.

В данной работе предлагается подход, позволяющий в рамках комплексной модели с линиями разрыва смещения осуществить расчет полной зоны предразрушения вблизи конца трещины, расположенной на границе раздела двух сред, и с использованием результатов этого расчета определить начальный угол поворота трещины.

В условиях плоской деформации рассмотрим кусочно-однородное изотропное упругое тело, содержащее трещину на прямолинейной границе раздела сред. Уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи конца трещины появляется и начинает развиваться зона предразрушения. Будем изучать лишь тот случай, когда размер зоны предразрушения остается значительно меньше длины трещины и всех других размеров тела вплоть до момента страгивания трещины. Тогда рассматриваемое тело можно считать кусочно-однородной плоскостью, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную трещину, около конца которой имеется зона предразрушения. В соответствующей краевой задаче, подобно [4], условие на бесконечности сформулируем так: при  $r \rightarrow \infty$  ( $r$  — полярный радиус) главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой решение аналогичной задачи без зоны предразрушения, которое приводится, например, в [2] (условие  $N$ ). Это решение содержит произвольные постоянные  $K_I$ ,  $K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряжений в конце трещины, определяемые из решения внешней задачи. В рассматриваемой здесь постановке коэффициенты  $K_I$ ,  $K_{II}$  считаются заданными.

Задача заключается в установлении конфигурации и размеров зоны предразрушения, а также в определении начального угла поворота трещины.

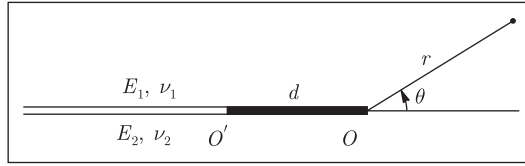


Рис. 1

Ниже предлагается подход к решению этой задачи, в основе которого лежат контактная модель трещины и широко практикуемая в настоящее время гипотеза локализации [4]. Согласно данной гипотезе, зоны предразрушения вблизи концов трещин представляют собой тонкие слои материала — узкие полосы, исходящие из них.

В соответствии с предлагаемым подходом принимаем, что процесс развития зоны предразрушения вблизи конца рассматриваемой трещины состоит из четырех этапов. Опишем эти этапы, изложив тем самым суть подхода.

На первом этапе, согласно контактной модели трещины, вблизи конца трещины возникает зона контакта ее берегов. Этот этап моделирует задача теории упругости с граничными условиями (рис. 1)

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\ r < d, \quad u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi); \quad r > d, \quad \sigma_\theta(r, \pi) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

( $\langle a \rangle$  — скачок величины  $a$ ).

На бесконечности ставится условие  $N$ .

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [5], как в точке  $O$ , так и в точке  $O'$  имеет место корневая особенность напряжений.

На основе решения задачи с граничными условиями (1), которое может быть построено методом Винера–Хопфа [6], из условия ограниченности напряжений в точке  $O'$  должна быть определена длина  $d$  зоны контакта, зависящая от коэффициентов интенсивности  $K_I, K_{II}$ .

На втором этапе из конца  $O$  трещины начинает развиваться боковая полоса — зона предразрушения, расположенная в более хрупком материале и значительно меньшая зоны контакта. Поскольку в этой зоне преимущественные деформации развиваются по механизму отрыва, будем ее моделировать прямой линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала  $\sigma$  (сопротивление отрыва). Постоянная  $\sigma$  должна определяться экспериментально. Для полимеров и композитов такая методика изложена в работе [7].

Таким образом, второй этап рассматриваемого процесса моделирует задача теории упругости с граничными условиями (рис. 2)

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\ r < d, \quad u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi); \quad r > d, \quad \sigma_\theta(r, \pi) = 0, \\ \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $l$  значительно меньше  $d$ . На бесконечности ставится условие  $N$ .

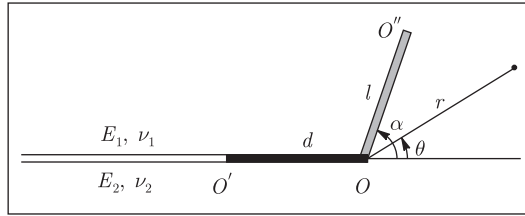


Рис. 2

При  $r$ , соизмеримых с  $d$ , и  $l \ll r \ll d$  в качестве решения задачи с граничными условиями (2) (см. рис. 2) будем использовать решение аналогичной задачи без боковой линии разрыва, т.е. решение задачи с граничными условиями (1) (см. рис. 1).

При  $r$ , соизмеримых с  $l$ , и  $l \ll r \ll d$  в качестве решения задачи с граничными условиями (2) (см. рис. 2) будем использовать решение аналогичной задачи с полубесконечной линией разрыва касательного смещения, граничные условия которой имеют вид

$$\begin{aligned}
 \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
 \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \quad u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\
 \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_r \rangle = 0, \\
 \theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

При  $r \rightarrow \infty$  реализуется асимптотика, совпадающая с асимптотикой решения задачи с граничными условиями (1) (см. рис. 1) при  $r \rightarrow 0$ . Такая формулировка условия на бесконечности позволяет удовлетворить условию сшивания решений задач с граничными условиями (1) и (3) при  $l \ll r \ll d$ .

На основе точного решения задачи с граничными условиями (3), которое может быть построено методом Винера–Хопфа, из условия ограниченности напряжений в точке  $O''$  должна быть определена длина  $l(\alpha)$  боковой зоны предразрушения. Угол  $\alpha$  предлагается устанавливать из условия максимума потенциальной энергии, сосредоточенной в боковой зоне предразрушения.

На третьем этапе зона контакта и боковая зона предразрушения соизмеримы. Этот этап моделирует задача теории упругости с граничными условиями (2) (см. рис. 2), в которой предположение  $l \ll d$  отсутствует. Поэтому для решения задачи описанный выше способ неприменим и необходимо использовать другие методы [8].

На четвертом этапе боковая зона предразрушения значительно больше зоны контакта. Для определения длины боковой зоны предразрушения и угла ее наклона  $\alpha$  служит задача теории упругости, аналогичная изображенной на рис. 2, без линии разрыва касательного смещения, граничные условия которой имеют вид

$$\begin{aligned}
 \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
 \theta = \pm\pi, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\
 \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_r \rangle = 0, \\
 \theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

На бесконечности ставится условие  $N$ .

Раскрытие трещины в ее конце  $O$  должно быть определено на основе решения задачи теории упругости, аналогичной изображенной на рис. 2, с полубесконечной боковой линией разрыва, граничные условия которой имеют вид

$$\begin{aligned}
 \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
 \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\
 \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad \sigma_\theta = \sigma, \\
 r < d, \quad u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi); \quad r > d, \quad \sigma_\theta(r, \pi) = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

При  $r \rightarrow \infty$  реализуется асимптотика, совпадающая с асимптотикой решения задачи с граничными условиями (4) при  $r \rightarrow 0$ .

Точное решение задач теории упругости с граничными условиями (4) и (5) могут быть построены методом Винера–Хопфа. Подобные задачи решены, например, в [9–11].

С ростом внешней нагрузки длина боковой зоны предразрушения увеличивается. При некотором значении нагрузки вдоль отрезка  $OO''$  произойдет разрыв сплошности и образование трещины. При этом угол наклона боковой зоны предразрушения  $\alpha$ , найденный на четвертом этапе, представляет собой искомый начальный угол поворота трещины, которая была расположена на границе раздела двух различных упругих сред.

Заметим, что, располагая значениями  $\alpha$ , найденными на втором и четвертом этапах рассматриваемого процесса, можно определить приращение угла наклона боковой зоны предразрушения за весь период ее развития.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет в рамках комплексной модели, дополняющей контактную модель трещины предположением о существовании боковой зоны предразрушения, осуществить расчет полной зоны предразрушения вблизи конца трещины, расположенной на границе раздела двух сред, и с использованием результатов этого расчета определить начальный угол поворота трещины.

1. *Comninou M.* The interface crack // *J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**. – P. 631–636.
2. *Кортен Х. Т.* Механика разрушения композитов. Разрушение. Т. 7, ч. 1. – Москва: Мир, 1976. – С. 367–471.
3. *Leblond J. B., Frelat J.* Crack kinking from an interface crack with initial contact between the cracks lips // *Europ. J. Mech. A. Solids.* – 2003. – **20**. – P. 93–951.
4. *Черепанов Г. П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // *Прикл. математика. и механика.* – 1976. – **40**, № 4. – С. 720–728.
5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
6. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред // *Прикл. механика.* – 1995. – **31**, № 6. – С. 86–91.
7. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1974. – 456 с.
9. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // *Прикл. механика.* – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.
10. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А.* Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели “грезубец” // Там же. – 2002. – **38**, № 5. – С. 110–116.

11. Кипнис Л. А. Линии скольжения в угловой точке на границе раздела различных сред // Прикл. математика и механика. – 1989. – **53**, № 6. – С. 1028–1033.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев  
Уманский государственный педагогический  
университет*

*Поступило в редакцию 28.04.2009*

**A. A. Kaminsky, L. A. Kipnis**

**On a complex model of the pre-fracture zone at the end of a crack on the interface of elastic media**

*A method of calculation of the complete pre-fracture zone at the end of a crack on the interface of elastic media in the frame of a complex model, which supplements the Comninou model by the assumption on the existence of a side pre-fracture zone, is proposed.*