КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ТОМ 1 №6 1985

УДК 528.2

Аппроксимация потенциала Земли в различных областях пространства.

II. Результаты

М. С. Петровская, Н. И. Лобкова

Сравниваются коэффициенты гармонических полиномов, представляющих собой наилучшие средние квадратичные приближения (НСП) гравитационного потенциала Земли, соответствующие поверхности Земли, сфере, объемлющей Землю, и круговой полярной орбите спутника. Вследствие неортогональности системы шаровых функций на поверхности Земли и на спутниковой орбите делается вывод о неустойчивости коэффициентов в полиномах НСП в этих областях при изменении степени полиномов. Отмечается неустойчивость коэффициентов в НСП потенциала Земли, получаемых на основе спутниковых наблюдений, при переходе от орбиты одного спутника к орбите другого. Делается вывод о том, что коэффициенты НСП при одинаковых шаровых функциях, соответствующие поверхности Земли, объемлющей сфере (стоксовы постоянные) и спутниковой орбите, в целом не совпадают друг с другом. Это обстоятельство целесообразно учитывать при построении единой модели потенциала Земли на основе наблюдательных данных, относящихся к различным областям пространства.

APPROXIMATION OF THE EARTH'S POTENTIAL IN DIFFERENT REGIONS OF SPACE. II. RESULTS, by Petrovskaya M. S., Lobkova N. I.— The polynomials of the best mean square approximation (BMA) to the Earth's gravitational potential corresponding to the Earth's surface, to the sphere enveloping the Earth and to a satellite circular polar orbit are compared. The attention is paid to the fact that the solid spherical functions are not orthogonal both on the Earth's surface and in a satellite orbit. As a consequence, the coefficients of BMA polynomials in these regions are unstable with respect to the change in the power of the polynomials. The instability of coefficients is also stated with respect to the transfer from one satellite orbit to another. A conclusion has been made that coefficients of the same solid spherical functions in BMA polynomials relevant to the Earth's surface, the enveloping sphere and a satellite orbit are different. This should be taken into account while constructing a united model of the Earth's potential based on observational data refered to different regions of the space.

Аппроксимация потенциала Земли в пространстве $L_2(S_0)$. В работе [3] рассмотрены общие принципы сравнения гармонических полиномов наилучших средних квадратичных приближений (НСП) гравитационного потенциала Земли V в различных областях пространства и произведено сравнение полиномов НСП, соответствующих сфере S_e, объемлющей Землю, и любой другой внешней сфере S_1. Рассмотрим теперь свойства полиномов НСП, соответствующих поверхности Земли S_0 и круговой полярной спутниковой орбите γ. Обозначения, которые встретятся в дальнейшем, заимствованы из работы [3].

В области Σ_e потенциал $V=V^{(e)}$ представляется в виде ряда шаровых функций:

$$V^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(e)}, \quad V_n^{(e)} = \sum_{m=-n}^{n} R_e^{n+1} C_{nm} \Phi_{nm}(r, \varphi, \lambda), \tag{1}$$

$$\Phi_{nm}(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{r^{n+1}} Y_{nm}(\varphi, \lambda), \tag{2}$$

$$\begin{gathered} Y_{nm}(\varphi, \lambda) = \alpha_{n|m|} P_{n|m|}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos m\lambda, & m \geqslant 0, \\ \sin|m|\lambda, & m < 0, \end{cases} \\ \alpha_{n|m|} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-|m|)!}{\delta_{|m|}(n+|m|)!}}, \quad \delta_{|m|} = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3}$$

В третьем разделе упомянутой работы было отмечено, что система сужений на S_0 шаровых функций $\{\Phi_{nm}\}$ образует аппроксимирующий базис в пространстве $L_2(S_0)$. В таком случае, как известно, гарантируется существование и единственность полинома НСП для функции $V_{|S_0}$ по системе $\{\Phi_{nm|S_0}\}$ $(n=0,\ 1, \dots,\ N,\ |m|\leqslant n)$ при любом фиксированном N. Полиномы НСП в $L_2(S_0)$ обозначены в [3] через $W^{(N)}_{L_2(S_0)}$, а их коэффициенты через $A^{(N)}_{nm}$:

$$W^{(N)}_{L_2(S_0)} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} A^{(N)}_{nm} \Phi_{nm|S_0}.$$

Из второго раздела [2] следует, что

$$\left(V - \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} A^{(N)}_{nm}\Phi_{nm},\ \Phi_{n_1m_1}\right)_{L_2(S_0)} = 0,$$

$$n_1 = 0,\ 1, \dots,\ N,\quad |m_1| \leqslant n_1.$$

Отсюда получаем линейную систему уравнений для определения коэффициентов $A^{(N)}_{nm}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} A^{(N)}_{nm}(\Phi_{nm},\ \Phi_{n_1m_1})_{L_2(S_0)} = (V,\ \Phi_{n_1m_1})_{L_2(S_0)}, \tag{4}$$

$$n_1 = 0,\ 1, \dots,\ N,\quad |m_1| \leqslant n_1.$$

Погрешности $E^{(N)}_{L_2(S_0)} \equiv \|V - W^{(N)}_{L_2(S_0)}\|_{L_2(S_0)}$, $N=0,\ 1, \dots$, обладают известными характеристиками погрешностей наилучших приближений в банаховых пространствах ([1], с. 9). В частности,

$$E^{(N)}_{L_2(S_0)} \geqslant E^{(N+1)}_{L_2(S_0)},\quad N = 0,\ 1, \dots, \tag{5}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} E^{(N)}_{L_2(S_0)} = 0. \tag{6}$$

Наряду с последовательностью полиномов $W^{(N)}_{L_2(S_0)}$ рассмотрим соответствующую последовательность линейных комбинаций шаровых функций (2): $W^{(N)} = \sum\limits_{n=0}^{N} \sum\limits_{m=-n}^{n} A^{(N)}_{nm}\Phi_{nm}$, $N = 0,\ 1, \dots,\ x \in \bar{\Sigma}_0$. Имеем: $W^{(N)}_{|S_0} = W^{(N)}_{L_2(S_0)}$, $N = 0,\ 1, \dots$. Из сходимости последовательности $\{W^{(N)}_{L_2(S_0)}\}$ к потенциалу V в $L_2(S_0)$ следует равномерная сходимость последовательности $\{W^{(N)}\}$ к V в любой замкнутой области $B \subset \Sigma_0$ ([4], формула (6.12)). Пусть $B := S_e$. Рассмотрим погрешности $\tilde{E}^{(N)}_{C(S_e)} = \|V - W^{(N)}\|_{C(S_e)}$, $N = 0,\ 1, \dots$, и $\tilde{E}^{(N)}_{L_2(S_e)} = \|V - W^{(N)}\|_{L_2(S_e)}$, $N = 0,\ 1, \dots$.

Отметим различие между погрешностями $\tilde{E}^{(N)}_{L_2(S_e)}$ и погрешностями $E^{(N)}_{L_2(S_e)}$, рассмотренными в [3], а именно: вторые соответствуют НСП в $L_2(S_e)$, а первые — сужениям функций $W^{(N)}$ на сферу S_e.

Из формулы (5.10) в [4] следует, что $E^{(N)}_{L_2(S_0)} = \|V - W^{(N)}_{L_2(S_0)}\|_{L_2(S_0)} \geqslant K\tilde{E}^{(N)}_{C(S_e)}$, $N = 0,\ 1, \dots$, где K — некоторая константа, зависящая от области Σ_0, а также от аналитических свойств потенциала V и не зависящая от N. Поскольку норма в $C(S_e)$ мажорирует норму в $L_2(S_e)$ (см. (6) в [3]), то, используя последнее неравенство, получаем соотношение: $E^{(N)}_{L_2(S_0)} \geqslant K\tilde{E}^{(N)}_{C(S_e)} \geqslant K\tilde{E}^{(N)}_{L_2(S_e)}$, $N = 0,\ 1, \dots$. Устремляя N к бесконечности и принимая во внимание (6), имеем: $N \to \infty \Rightarrow E^{(N)}_{L_2(S_0)} \to 0 \Rightarrow \tilde{E}^{(N)}_{C(S_e)} \to 0$.

Таким образом, полином НСП для потенциала V, построенный в $L_2(S_0)$, можно использовать для аппроксимации V в равномерной и средней квадратичной метриках на сфере S_e и вообще в любой замкнутой области $B \subset \Sigma_0$.

Так как потенциал Земли не является конечной линейной комбинацией шаровых функций, то последовательность $\{W^{(N)}{}_{L_2(S_0)}\}$ имеет бесконечное число членов, отличных от нуля. Поэтому из (5) следует: чем больше точность аппроксимации ε, тем выше степень N_ε аппроксимирующего полинома НСП, т. е.

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow N_\varepsilon \to \infty. \tag{7}$$

Сравним коэффициенты $A_{mn}^{(N)}$ полинома $W_{L_2(S_0)}^{(N)}$ и константы $R_e^{n+1} C_{nm}$ в (1) при одних и тех же значениях индексов n и m. Покажем, что $A_{mn}^{(N)}$ не могут совпадать с $R_e^{n+1} C_{nm}$ для всех значений индексов $n = 0, 1, \dots, N$, $|m| \leqslant n$ одновременно. Иными словами, найдутся такие $\bar{n}$ и $\bar{m}$ из указанного множества значений, что будет выполняться неравенство $A_{\bar{n}\bar{m}}^{(N)} \neq R_e^{\bar{n}+1} C_{\bar{n}\bar{m}}$. Для доказательства этого утверждения проверим наличие свойства перманентности у коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$. Как отмечено во втором разделе [3], таким свойством обладают коэффициенты НСП только в случае ортогонального базиса. Следовательно, задача сводится к проверке ортогональности системы функций $\{\Phi_{nm}\}$ $(n=0, 1, \dots, N, |m| \leqslant n)$ в пространстве $L_2(S_0)$. Оказывается, существует бесконечно много элементов этой системы, неортогональных друг другу в $L_2(S_0)$.

Рассмотрим, например, скалярные произведения $(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(S_0)}$, $n, k = 0, 1, \dots, n \neq k$. Подставляя функции (2) в формулу (4) из [3], получим:

$$(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(S_0)} = \frac{1}{M_{S_0}} \int\limits_{S_0} r_0^{-n-k-2} Y_{n0} Y_{k0} dS_0, \quad n \neq k, \tag{8}$$

где Y_{n0} $(n = 0, 1, \dots)$, Y_{k0} $(k = 0, 1, \dots)$ определены в (3).

Переходя к вычислению этих скалярных произведений, заменим поверхность Земли S_0 поверхностью нормального эллипсоида. Обозначим: $\bar{S}_0$ и $\bar{M}_0$ — поверхность и площадь поверхности нормального эллипсоида; a, c — полуоси эллипсоида и $l^2 = \dfrac{a^2 - c^2}{c^2}$, $\alpha^2 = \dfrac{a^4 - c^4}{c^4} = 2l^2 + l^4$, $\bar{r}_0 = r_{\bar{S}_0}$. Так как $\bar{r}_0 = a(1 + l^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, то на поверхности $\bar{S}_0$ скалярные произведения (8) могут быть представлены следующим образом: $(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(\bar{S}_0)} = \dfrac{1}{\bar{M}_0 a^{n+k}} \int\limits_{\sigma} (1 + l^2 \sin^2 \varphi)^{(n+k-2)/2} (1 + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} Y_{n0} Y_{k0} d\sigma$, где σ — единичная сфера.

Легко видеть, что

$$(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(\bar{S}_0)} = \frac{D_{nk}}{\bar{M}_0 a^{n+k}} l^2 + 0(l^4), \quad n, k = 0, 1, \dots, n \neq k, \tag{9}$$

где $D_{nk} \neq 0$ — постоянные, зависящие только от значений индексов n и m. Таким образом,

$$(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(\bar{S}_0)} \neq 0, \quad \forall n, k = 0, 1, \dots, n \neq k, \tag{10}$$

т. е. множество $\{\Phi_{nm}\}$ неортогонально в пространстве $L_2(\bar{S}_0)$.

Рассмотрим однородный эллипсоид вращения с теми же параметрами, что и нормальный эллипсоид. Сужение разложения его внешнего потенциала $\bar{V}^e$ на поверхность $\bar{S}_0$ имеет вид:

$$\bar{V}^e|_{\bar{S}_0} = \frac{3f\mu}{\bar{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{c}{\bar{r}_0}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi), \tag{11}$$

где f и μ — гравитационная постоянная и масса эллипсоида. Из (10) следует, что коэффициенты НСП потенциала $\overline{V^{(e)}}$ по системе $\{\Phi_{nm}\}$ в пространстве $L_2(\overline{S_0})$ не обладают свойством перманентности, и поэтому частные суммы ряда (11) не являются полиномами НСП для потенциала $\overline{V^{(e)}}$ на поверхности эллипсоида.

Оценка скалярных произведений (8), отнесенных к поверхности Земли S_0, сводится к коррекции правых частей (9) за высоты точек поверхности S_0 относительно нормального эллипсоида.

В результате оказывается, что аппроксимирующий базис $\{\Phi_{nm}\}$ неортогонален в $L_2(S_0)$ и, следовательно, коэффициенты $A_{nm}^{(N)}$ полинома $W_{L_2(S_0)}^{(N)}$ не обладают свойством перманентности. Так как константы $R_e^{n+1}C_{nm}$ в (1) перманентны по отношению к N, то очевидно, что они не могут совпадать с $A_{nm}^{(N)}$ одновременно для всех $n=0,\ 1, \ldots,\ N$, $|m| \leqslant n$ и на указанном множестве значений n и m всегда найдутся такие $\bar{n}$ и $\bar{m}$, что $A_{\bar{n}\bar{m}}^{(N)} \neq R_e^{\bar{n}+1} C_{\bar{n}\bar{m}}$.

Обратимся к вопросу о возможных последствиях использования констант $R_e^{n+1}C_{nm}$ вместо коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$, соответствующих НСП потенциала на поверхности Земли. В работе [2] показано существование гармонического полинома, аппроксимирующего потенциал V в равномерной метрике пространства $C(S_0)$, такого, что часть его коэффициентов близка к $R_e^{n+1}C_{nm}$, а погрешность приближения в то же время достаточно мала. В [5] доказано, что аналогичное утверждение справедливо и при аппроксимации V в средней квадратичной метрике пространства $L_2(S_0)$.

Однако легко показать, что использование констант $R_e^{n+1}C_{nm}$ вместо коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$ при фиксированном $N=N_0$ лишает аппроксимирующую функцию оптимальных свойств полиномов НСП. Обозначим полином, полученный путем замены всех или части коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$ на $R_e^{n+1}C_{nm}$, через $\overline{W}_{L_2(S_0)}^{(N)}$. Как отмечалось выше, существуют $\bar{n} \leqslant N_0$ и $|m| \leqslant \bar{n}$ такие, что $A_{\bar{n}\bar{m}}^{(N)} \neq R_e^{\bar{n}+1} C_{\bar{n}\bar{m}}$. Из этого неравенства и из единственности полинома НСП в гильбертовом пространстве $L_2(S_0)$ следует, что (см. [1], с. 7)

$$\overline{E}_{L_2(S_0)}^{(N)} = \|V - \overline{W}_{L_2(S_0)}^{(N)}\|_{L_2(S_0)} > \|V - W_{L_2(S_0)}^{(N)}\|_{L_2(S_0)} = E_{L_2(S_0)}^{(N)}.$$

Таким образом, использование констант $R_e^{n+1}C_{nm}$ при построении полинома $\overline{W}_{L_2(S_0)}^{(N)}$ ведет к увеличению погрешности аппроксимации. Величину этой погрешности, очевидно, можно было бы уменьшить только за счет увеличения числа членов в аппроксимирующем полиноме, как это следует из (7).

Неортогональность системы $\{\Phi_{nm|S_0}\}$ $(n=0,\ 1, \ldots,\ N,\ |m| \leqslant n)$ в пространстве $L_2(S_0)$ позволяет сделать следующее заключение: не существует ряда шаровых функций, частные суммы которого являлись бы полиномами НСП для потенциала V на S_0, поскольку коэффициенты упомянутых полиномов по этой системе функций не обладают свойством перманентности. Отсюда также следует, что ряды $W^{(\infty)}$, равномерно аппроксимирующие потенциал на поверхности Земли S_0, существование которых вытекает из К — Л теоремы, не могут быть построены методом наименьших квадратов.

Аппроксимация в пространстве $L_2(\gamma)$. Аппроксимации потенциала в пространстве $L_2(S_1)$, где S_1 — внешняя сфера [3], соответствует идеализированная ситуация, когда орбиты спутников расположены более или менее плотно и равномерно на одной сфере. В действительности же мы имеем дело с отдельными орбитами спутников, расположенными на разных высотах от поверхности Земли и имеющими различную форму и ориентацию. Рассмотрим наиболее простой и естественный случай — аппроксимацию потенциала V на основе наблюдений одного спутника, движущегося по круговой орбите γ в плоскости меридиана. Как уже отмечалось, ряд (1) равномерно сходится на γ. Однако его частные суммы не представляют собой полиномов НСП потенциала V по метрике пространства $L_2(\gamma)$. Этот вывод вытекает из неортогональности системы шаровых функций (2) в $L_2(\gamma)$. В самом деле, имеем:

$$(\Phi_{n0}, \Phi_{k0})_{L_2(\gamma)} = \frac{\sqrt{(2n+1)(2k+1)}}{\pi R_\gamma^{n+k+2}} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (12)$$

$$n, k = 0, 1, \ldots,$$

и, в частности, $(\Phi_{00}, \Phi_{2m,0})_{L_2(\gamma)} = \frac{\sqrt{4m+1}}{R_\gamma^{2m+1}} \left(\frac{(1/2)_m}{(1)_m} \right)^2 \neq 0,\ m = 1, 2, \ldots,$ где R_γ — радиус окружности γ и $(a)_m = a(a+1)\ldots(a+m-1)$. Поэтому по отношению к коэффициентам $B_{nm}^{(N)}$ полиномов $W_{L_2(\gamma)}^{(N)}$ справедливы те же выводы, что и для $A_{nm}^{(N)}$. Так, коэффициенты $B_{nm}^{(N)}$ не стабильны при изменении N и, следовательно, не совпадают с $R_e^{n+1} C_{nm}$ одновременно для всех $n = 0, 1, \ldots, N$ и $|m| \leqslant n$.

Покажем, что $B_{nm}^{(N)}$ также не совпадают и с $A_{nm}^{(N)}$. Действительно, константы $A_{nm}^{(N)}$ являются решением системы (4), а $B_{nm}^{(N)}$ определяются из другой системы уравнений:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} B_{nm}^{(N)} (\Phi_{nm}, \Phi_{n_1 m_1})_{L_2(\gamma)} = (V, \Phi_{n_1 m_1})_{L_2(\gamma)}, \quad (13)$$

$$n_1 = 0, 1, \ldots, N, \quad |m_1| \leqslant n_1.$$

Из (4), (12) и (13) легко видеть, что $A_{nm}^{(N)}$ зависят от формы поверхности Земли S_0, в то время как $B_{nm}^{(N)}$ зависят от R_γ, а в более общем случае — от параметров орбиты выбранного спутника. Поэтому $A_{nm}^{(N)} \neq B_{nm}^{(N)}$. Как можно видеть из выражения (12), ортогональный базис в $L_2(\gamma)$ образуют, например, полиномы Чебышева $T_n(x)$ от $x = \sin\varphi$. Коэффициенты НСП по базису $\{T_n(\sin\varphi)\}$ зависят от R_γ круговой орбиты спутника и долготы меридиана, в плоскости которого она расположена.

Вследствие всего сказанного естественно ожидать, что орбите каждого отдельного спутника будут соответствовать свои коэффициенты $B_{nm}^{(N)}$, зависящие от элементов его орбиты. В итоге приходим к выводу, что коэффициенты полиномов НСП потенциала V, полученных из обработки наблюдений спутников, проявляют нестабильность не только при изменении степени полинома N, но и при переходе от орбиты одного спутника к орбите другого.

Заключение. Аппроксимация потенциала Земли на практике осуществляется (в основном) путем совместной обработки гравиметрических измерений, полученных на поверхности Земли, и данных спутниковых наблюдений. При этом считается, что низкие гармоники в разложении потенциала точнее определяются по спутниковым данным, а коэффициенты высоких гармоник — по гравиметрическим. Такое заключение не вполне оправдано, поскольку на самом деле существует не одна, а, по крайней мере, две различные и одинаково правомерные системы коэффициентов в наилучших средних квадратичных приближениях потенциала Земли, причем одна из них соответствует НСП на спутниковых высотах, а вторая — на поверхности Земли S_0. Отмеченное различие коэффициентов НСП в пространствах $L_2(S_0)$, $L_2(S_e)$ и $L_2(\gamma)$ необходимо учитывать при попытках построения единой модели потенциала на основе всех имеющихся наблюдательных данных. При этом вряд ли можно ожидать стабильности гармонических коэффициентов даже при значительном увеличении количества наблюдений.

Использование постоянных $R_e^{n+1}C_{nm}$, соответствующих НСП на объемлющей сфере S_e (или любой другой внешней сфере), вместо коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$ в полиномах НСП на поверхности Земли ведет либо к увеличению погрешности приближения ε_N при фиксированной степени полинома N, либо к увеличению числа членов N_ε при заданной точности аппроксимации ε. Аналогичная ситуация имеет место в случае «исправления» спутниковых коэффициентов $B_{nm}^{(N)}$ по наземным гравиметрическим данным. Вообще, при переходах вида $R_e^{n+1}C_{nm} \rightleftarrows A_{nm}^{(N)} \rightleftarrows B_{nm}^{(N)}$ утрачиваются первоначальные оптимальные свойства НСП в соответствующих пространствах.

Ситуация, возникающая при переходах $R_e^{n+1}C_{nm} \rightleftarrows B_{nm}^{(N)}$, была бы более благоприятной, если бы спутниковые орбиты заполняли более или менее равномерно поверхность некоторой сферы S или некоторый шаровой слой $\omega \subset \Sigma_e(R_e < R_1 \leqslant r \leqslant R_2)$. В первом случае, как показано выше, $R_e^{n+1}C_{nm} = B_{nm}^{(N)}$, во втором — эти коэффициенты отличаются лишь нормирующим множителем, поскольку система шаровых функций ортогональна в пространстве $L_2(\omega)$, и, следовательно, $B_{nm}{}^{(N)}$ как коэффициенты НСП полинома в $L_2(\omega)$ стабильны при изменении его степени N. Однако в настоящее время общее количество используемых спутниковых орбит и их распределение в пространстве, по-видимому, не оправдывают метрику $L_2(S_1)$ или $L_2(\omega)$.

Поскольку устойчивая модель потенциала V может быть получена лишь в случае ортогональности шаровых функций в области наблюдений, то, вероятно, целесообразно строить модель потенциала Земли, отнесенную в объемлющей сфере S_e, путем, например, редукции гравиметрических наблюдений с поверхности Земли на сферу S_e. Такая задача рассматривалась Раппом [6].

Из-за удлинения аппроксимирующего полинома на поверхности Земли в случае использования спутниковых гармонических коэффициентов можно ожидать, что сходимость бесконечных рядов, аппроксимирующих потенциал, в которых используются эти коэффициенты, ухудшается. С другой стороны, ввиду неортогональности шаровых функций на поверхности Земли, мы можем утверждать, что такие ряды не могут быть построены методом наименьших квадратов.

Неортогональность шаровых функций в пространстве $L_2(\gamma)$, соответствующем круговой полярной спутниковой орбите γ, приводит к неустойчивости коэффициентов НСП потенциала Земли при изменении степени аппроксимирующего полинома. Но помимо такой неустойчивости существует также неустойчивость гармонических коэффициентов и другого рода, а именно: при переходе от одного спутника к другому, поскольку коэффициенты НСП зависят от параметров орбиты спутника. Из неортогональности системы $\{\Phi_{nm}\}$ в пространстве $L_2(\gamma)$ следует, что обработка наблюдений спутников методом наименьших квадратов не дает возможности построить ряд шаровых функций, частные суммы которого являлись бы НСП потенциала Земли.

Сравнивая неустойчивость коэффициентов $A_{nm}^{(N)}$ в НСП на поверхности Земли и констант $B_{nm}^{(N)}$, соответствующих спутниковым орбитам, можно отметить различный характер этой неустойчивости. Так, количество гравиметрических измерений и их более или менее равномерное (по крайней мере, в будущем) распределение по поверхности Земли позволяют надеяться, что коэффициенты $\{A_{nm}{}^{(N)}\}$ при каждом фиксированном N можно будет стабилизировать. Что же касается спутниковых гармонических коэффициентов $\{B_{nm}{}^{(N)}\}$, то исключительная дискретность орбит спутников в пространстве и их сравнительно небольшое число, а также зависимость коэффициентов $\{B_{nm}{}^{(N)}\}$ от элементов орбит спутников пока не способствуют стабилизации этих коэффициентов при фиксированном N.

Заметим, что хотя сделанные выводы относятся к непрерывной задаче аппроксимации потенциала Земли, они отражают общие свойства гармонических полиномов, аппроксимирующих потенциал в различных областях пространства. Подчеркнем, однако, что эти выводы касаются в основном качественных характеристик аппроксимирующих полиномов. Численные величины упомянутых расхождений между гармоническими коэффициентами НСП могут быть небольшими. Вопрос о фактических расхождениях между коэффициентами аппроксимирующих полиномов, отнесенных к различным областям пространства, заслуживает дальнейшего изучения.

1. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций.— Л. : Изд-во ЛГУ, 1977.— 183 с.
2. *Петровская М. С., Лобкова Н. И.* Об использовании стоксовых постоянных при аппроксимации потенциала Земли с помощью замкнутой системы шаровых функций.— In: Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other planets. Prague, 1983, p. 331—356.
3. *Петровская М. С., Лобкова Н. И.* Аппроксимация потенциала Земли в различных областях пространства. I. Постановка задачи.— Кинематика и физика небес. тел, 1985, 1, № 5, с. 81—85.
4. *Freeden W.* On the approximation of external gravitational potential with closed systems of (trial) functions.— Bull. Geod., 1980, 54, N 1, p. 1—20.
5. *Petrovskaya M. S., Lobkova N. I.* Stokes' constants and the best approximations of the potential.— Mar. Geod., 1984, 9, N 1, p. 45—76.
6. *Rapp R. H.* The use of gravity anomalies on a boundary sphere to improve potential coefficient determination.— Rep. Dep. Geod. Sci., 1977, N 8, p. 254.
7. *Sjöberg L.* On the convergence problem for the spherical harmonic expansion of the geopotential at the surface of the Earth.— Boll. geod. e sci. affini, 1980, 39, N 3, p. 261—271.

Ин-т теорет. астрономии АН СССР, Ленинград.
Ленингр. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 30.01.85