УДК 521:528.11

Об одном обобщении нормального закона распределения и его применении к анализу неравноточных астрономических наблюдений

И. В. Джунь

На основании математической формы (2), применимой для описания распределения ошибок астрономических наблюдений с эксцессом $|\varepsilon| \geqslant 0$, получены выражения (7—9) стандартных ошибок σ_σ, σ_σ, σ_p несмещенных и эффективных оценок параметров a, σ, p этого распределения. В этих выражениях ψ', ψ — тригамма и дигамма-функции по параметру p^{-1}. При $p=2$ (закон Гаусса) (7, 8) превращаются в известные соотношения $\sigma_a=\sigma \cdot n^{-1/2}$; $\sigma_\sigma=\sigma(2 \cdot n)^{-1/2}$.

Показано, что нет никаких теоретических и статистических оснований считать истинным значение $p=2$ в (2). Учет последнего обстоятельства позволяет усилить строгость теории математической обработки астрономических наблюдений, так как (7—9) учитывают возможную ошибочность фундаментального в классической теории ошибок предположения о нормальности рядов измерений.

ON A GENERALIZATION OF THE NORMAL DISTRIBUTION LAW AND ITS APPLICATION TO THE ANALYSIS OF UNEQUALLY ACCURATE ASTRONOMICAL OBSERVATIONS, by Dzun' I. V.— The representation (2) is used for the description of error distribution of astronomical observations when excess $|\varepsilon| \geqslant 0$. The expressions (7—9) are obtained for standard errors σ_a, σ_σ, σ_p of unbiased and effective estimates of the parameters a, σ, p in (2). In (7—9) ψ', ψ are trigamma and digamma functions (relative to the parameter p^{-1}). When $p=2$, (the Gauss law) the formulae (7) reduce to the well-known relations $\sigma_a=\sigma n^{-1/2}$; $\sigma_\sigma=\sigma(2 \cdot n)^{-1/2}$. There are neither theoretical nor statistical reasons to adopt 2 in (2) as a true value of p. Utilization of the formulae (7—9) enables the accuracy of the theory of data processing to be improved.

Стандартные ошибки параметров нормального распределения a, σ, где a — среднее, σ — средняя квадратичная ошибка, получают на основании следующих известных формул [3]:

$$\sigma_a = \sigma/\sqrt{n}; \quad \sigma_\sigma = \sigma/\sqrt{2n}, \tag{1}$$

где n — количество наблюдений.

Чтобы получить обобщенное представление для оценок (1), воспользуемся наиболее простой и удобной математической формой симметричных распределений [6, 9]:

$$f = \frac{c}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^p\right), \tag{2}$$

где $c=p[2p^{\frac{1}{p}} \cdot \Gamma(\frac{1}{p})]^{-1}$, $\Gamma(\frac{1}{p})$ — гамма-функция; σ — мера рассеяния распределения (2) x — значение случайной ошибки наблюдения с математическим ожиданием a.

При $p=2$ плотность вероятности (2) является гауссовой. Но действительные распределения ошибок астрономических наблюдений, хотя и являются симметричными, не обязательно имеют нулевой эксцесс [2, 10]. Следовательно в общем случае $p \neq 2$. Так как мы не задаемся какой-либо определенной гипотезой относительно параметра p и не считаем, что истинное значение $p=2$, то, следовательно, кроме дисперсий σ_a^2, σ_σ^2 параметров распределения (2) нам необходимо оценить и дисперсию σ_2^p параметра p.

Несмещенная и эффективная оценка дисперсии какого-либо параметра распределения α может быть получена на основании информационного соотношения Фишера по такой формуле [4, 5]:

$$\sigma_\alpha^2 = \left[n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 dx\right]^{-1}. \tag{3}$$

Для закона плотности (2)

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{f}{\sigma^p}|x-a|^{p-1}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}=f\left[\frac{|x-a|^p}{\sigma^{p+1}}-\frac{1}{\sigma}\right]; \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}=f\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^p+\frac{\ln p}{p^2}-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^p\ln\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|-\frac{1}{p^2}+\frac{\psi}{p^2}\right], \tag{6}$$

где ψ — дигамма-функция для параметра p^{-1}.

Подставляя последовательно выражения (4—6) в формулу (3) и интегрируя, имеем после ряда преобразований:

$$\sigma_a=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\left[\frac{p^{2/p}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{(p^2-p)\,\pi}\right]^{1/2}; \tag{7}$$

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{pn}}; \tag{8}$$

$$\sigma_p=n^{-1/2}\left\{\frac{1+p}{p^4}\psi'+\frac{1}{p^3}\left[(\psi+\ln p)^2-1\right]+\frac{1}{p^2}\left[2\psi+\ln p)-1\right]\right\}^{-1/2}, \tag{9}$$

где ψ', ψ — соответственно тригамма- и дигамма-функции для параметра p^{-1}.

Заметим, что при интегрировании формулы (3) с выражением (6) необходимо воспользоваться правилом Лейбница для дифференцирования гамма-функции [8] или же табличным интегралом вида [1]

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}\cdot e^{-\mu x}\cdot\ln^2 x\cdot dx=\frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu}\left\{[\psi(\nu)-\ln\mu]^2+\zeta(2,\nu-1)\right\}, \tag{10}$$

где $\zeta(2, \nu-1)$ — дзета-функция Римана, которая связана простым соотношением с полигамма-функцией ψ^{z-1}:

$$\zeta(z,q)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+q)^{-z}=\frac{(-1)^z}{(z-1)!}\,\psi^{z-1}_{(q)}. \tag{11}$$

Значения функций ψ^{z-1} достаточно подробно табулированы [7], и их вычисление не представляет затруднений.

Легко видеть, что при истинном значении параметра $p=2$ (закон Гаусса) выражения (7) и (8) превращаются в привычные нам формулы (1), поскольку $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Однако можно ли параметр p считать известным и равным 2? Ответом на этот вопрос может быть высказывание Джери, цитируемое в [11]: «Нормальность — это миф. В реальном мире никогда не было и никогда не будет нормального распределения».

Предполагая в (2) параметр p неизвестным, мы на основании формулы (9), можем построить для него доверительный интервал. Например, при значении оценки для $p=2$ имеем из (9):

$$\sigma_p=\frac{2\cdot 93}{\sqrt{n}}\approx\frac{3}{\sqrt{n}}. \tag{12}$$

Если $n=9$, то $\sigma_p\cong 1$ и диапазон $p\pm\sigma_p$, равный $1<p<3$, допускает применение при обработке наблюдений бесконечного множества распределений с различным p. В этом случае предпочтительнее использовать закон с таким p, которое обеспечивает наибольшую простоту математических методов обработки. Следовательно, хотя приведенное нами высказывание Джери и является справедливым, из формулы (12) все же следует весьма существенный вывод, подтверждающий значение нормального закона, который повсеместно используется. Этот вывод состоит в том, что при обработке наблюдений, значение точной гипотезы о действительном законе ошибок определяется, прежде всего, объемом измерений. С получением все более полной метрологической информации о работе данного инструмента, доверительный интервал для p сужается. Как показывает статистический опыт, этот интервал, как правило, не симметричен относительно $p=2$, и при некотором количестве наблюдений n_p он уже не накроет значение $p=2$.

Таким образом, параметр p, которому мы не задумываясь приписываем истинное значение $p=2$, вообще-то подвержен разбросу и при некотором n_p чисто количественная процедура накопления наблюдений приводит к необходимости применения качественно новых, более совершенных способов оценивания наблюдаемых величин. Следующий важный вывод, который вытекает из выражений (7—9), состоит в том, что при $p\neq 2$, т. е. при отклонениях действительных распределений ошибок астрономических наблюдений от закона Гаусса, значение p можно рассматривать как важнейший метрологический параметр астрономического инструмента или метода наблюдений, без которого невозможно получить точные математические оценки достижимой точности результатов наблюдений.

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.—1100 с.
2. *Идельсон Н. И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений.— М.: Геодезиздат, 1947.—359 с.
3. *Кемниц Ю. В.* Теория ошибок измерений.— М.: Недра, 1967.—176 с.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.—648 с.
5. *Кульбак С.* Теория информации и статистика.— М.: Наука, 1967.—408 с.
6. *Петрович М. Л.* Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ.— М.: Финансы и статистика, 1982.—200 с.
7. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган,— М.: Наука, 1979.— 832 с.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа.— М.: Наука, 1969,— Т. 2. 464 с.
9. *Fletcher R., Grant J. A., Nebden M. D.* The calculation of linear best Lp—approximations.— Comput. J., 1971, **14**, N 13, p. 277—279.
10. *Jeffreys H.* Theory of probability.— Oxford: Clarendon press, 1961.—468 p.
11. *Tukey J. W.* The future of data analysis.— Ann. Math. Stat., 1967, **33**, p. 1—67.

Укр. ин-т инженеров вод. хозяйства,
Ровно

Поступила в редакцию 26.11.84,
после доработки 04.02.85

Окончание статьи М. С. Петровской и Н. И. Лобковой

4. *Петровская М. С., Лобкова Н. И.* Об использовании стоксовых постоянных при аппроксимации потенциала на поверхности Земли с помощью замкнутой системы шаровых функций.— In: Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets. Prague, 1983, p. 331—356.
5. *Davis H. F.* Fourier series and orthogonal functions.— Boston: Allyn and Bacon, 1963.—403 p.
6. *Freeden W.* On the approximation of external gravitational potential with closed systems of (trial) functions.— Bull. Geod., 1980, **54**, N 1, p. 1—20.
7. *Kholshevnikov C.* On the convergence of an asymmetric body potential expansion in spherical harmonics.— Celest. Mech., 1977, **16**, p. 45—60.
8. *Krarup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy.— Medd. Geod. inst., 1969, **44**, N 1, p. 5—80.
9. *Moritz H.* Advanced Physical Geodesy.— Karlsruhe: Wichmann, 1980.—500 p.
10. *Snyder M. A.* Chebyshev method in numerical approximation.— Engle Wood Cliffs: Prentice Hall, 1966.—114 p.
11. *Sjöberg L.* On the convergence problem for the spherical harmonic expansion of the geopotential at the surface of the Earth.— Boll. geod. sci. affini, 1980, **39**, N 3, p. 261—271.

Ин-т теорет. астрономии, Ленинград
Ленингр. политехн. ин-т, Ленинград

Поступила в редакцию 30.01.85