

УДК 521.3

Псевдоожигение в поверхностных слоях ядер комет.

II. Полное и частичное псевдоожигение

Л. М. Шульман

Рассмотрен поверхностный пылевой слой кометного ядра, псевдоожигенный текущим наружу потоком паров. Получено, что полное псевдоожигение от внутренней до внешней границы слоя появляется в редких случаях, когда выполнено специальное соотношение между толщиной пылевого слоя и гелиоцентрическим расстоянием кометы. Более обычным является частное псевдоожигение, когда псевдоожигена только внешняя часть слоя. Рассматривается и обсуждается зависимость толщины псевдоожигенной части от гелиоцентрического расстояния и собственной толщины пылевой мантии.

FLUIDIZATION IN THE SURFACE LAYER OF COMETARY NUCLEI. II. THE TOTAL AND PARTIAL FLUIDIZATION, by Shul'man L. M. — The surface dust layer of cometary nucleus is considered when it is fluidized by the outward vapour streaming. It is shown that the total fluidization from the inner border up to the outer one occurs in the rare cases when there is a special relationship between the thickness of the dust layer and the heliocentric distance of the comet. The more common phenomenon is the partial fluidization when only the outer part of the layer is fluidized. The dependence of the fluidized part thickness upon the heliocentric distance and the own thickness of the dust mantle is obtained and discussed.

Введение. В предыдущей статье автора [2] получены основные соотношения, описывающие стадию спокойного псевдоожигения поверхностного пылевого слоя кометного ядра. Мы рассмотрели гипотетический случай, когда коэффициент вспучивания слоя близок к единице, так что строение слоя отличается от строения статического слоя лишь тем, что выключена контактная теплопроводность. Как будет показано в данной работе, подобная ситуация не типична, однако найденное в [2] решение имеет реальный физический смысл как часть более общих решений.

Отказавшись от принятого в [2] ограничения на коэффициент вспучивания $\mu \approx 1$, рассмотрим полностью псевдоожигенный слой, в котором по всей глубине $\mu > 1$. Покажем, что условия физической реализуемости ограничивают область гелиоцентрических расстояний и толщин, при которых возможно полное псевдоожигение. Наиболее вероятной оказывается ситуация, когда псевдоожигена только внешняя часть слоя, в то время как внутренняя находится в состоянии $\mu \approx 1$.

В [2] получены следующие уравнения для описания псевдоожигенного слоя: уравнение переноса тепла

$$\mu T^3 \frac{dT}{dx} = - \frac{Q}{4\varepsilon_m \beta a_{\min} \sigma}, \quad (1)$$

уравнение диффузии газа сквозь слой:

$$\mu T^{1/2} \frac{dN}{dx} = \frac{Z}{\beta a_{\min}} \sqrt{\frac{\pi m}{2k}}, \quad (2)$$

уравнение теплового баланса на внешней поверхности пылевого слоя:

$$\frac{q(1 - \alpha_m)}{r^2} = \varepsilon_m \sigma T_m^4 + Z(L + 2kT_m), \quad (3)$$

уравнение механического равновесия пылевого слоя:

$$T \frac{dN}{dx} + N \frac{dT}{dx} = \frac{4\pi}{3k} G \rho_p R. \quad (4)$$

В уравнениях (1) — (3) приняты те же обозначения, что и в [2]: x — координата, отсчитываемая вглубь, ε_m — излучательная способность вещества пылинок, a_{\min} — минимальный радиус пылинки, ρ_p — плотность ее вещества, β — безразмерный коэффициент, учитывающий отличие эффективного размера поры от минимального радиуса пылинки, Q — полный поток энергии вглубь, Z — поток молекул сублимата наружу, эти величины связаны соотношением:

$$Q = ZL, \quad (5)$$

L — энергия сублимации на одну молекулу, m — масса молекулы сублимата, q — солнечная постоянная, α_m — альbedo поверхности пылевого слоя, $T_m = T(0)$ — температура внешней поверхности слоя, r — гелиоцентрическое расстояние кометы; остальные символы обозначают общепринятые физические константы. Мы будем также пользоваться обозначениями $T_p = T(h)$ для температуры льда под минеральным слоем, N_h и N_0 — для обозначения плотности газа на границе лед — пыль и на наружной поверхности слоя соответственно. Радиус ядра и его средняя плотность обозначены как R и ρ_p , G — гравитационная постоянная.

Полное псевдооживление. Разделив почленно уравнение (1) на уравнение (2), получим дифференциальное уравнение, которое не содержит μ и элементарно интегрируется. Его интеграл имеет вид:

$$T^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m\sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N = T_p^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m\sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h = \text{const} \quad (6)$$

и одинаково справедлив как для статического, так и для псевдооживленного слоя. Применив это соотношение к внешней поверхности слоя, получаем выражение

$$T_m^{7/2} - T_p^{7/2} = \frac{7L}{8\varepsilon_m\sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} (N_h - N_0), \quad (7)$$

связывающее значения величин на внутренней и наружной границах пылевого слоя. Если толщина слоя значительно превышает размер поры, т. е. $h \gg \beta a_{\min}$, то $N_0 \ll N_h$. В этом приближении с учетом зависимости плотности насыщенных паров от температуры

$$N_h = \exp(A - B/T_p)/(kT_p) \quad (8)$$

можно получить соотношение между температурами ледяной и минеральной поверхностей. Оно имеет вид

$$T_m \approx T_p \left(1 + \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} \frac{B}{\varepsilon_m\sigma T_p^{9/2}} e^{A-B/T_p} \right)^{2/7} \quad (9)$$

и не содержит толщины слоя. Таким образом, как и в случае статического слоя, перепад температуры не зависит от толщины пыли.

Поскольку уравнение (3) справедливо независимо от того, находится слой в статическом или псевдооживленном состоянии, то справедливо применявшееся в [2] приближенное выражение

$$r \approx \frac{1}{T_m^2} \sqrt{\frac{q(1-\alpha_m)}{\varepsilon_m\sigma}}, \quad (10)$$

а следовательно, и табулированные в [2] функции $T_p(r)$ и $T_m(r)$. Для обоих случаев справедливо также ограничение температуры в слое неравенством

$$T < \left(T_p^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m\sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right)^{2/7}, \quad (11)$$

следующим из (6) в силу того, что всегда плотность газа $N > 0$.

Соотношение (7) совместно с исходными уравнениями (1) и (2) позволяет преобразовать условие механического равновесия слоя к виду, связывающему параметр μ с температурой:

$$\mu = \frac{27}{28} \frac{\pi Z \sqrt{\frac{km}{2\pi}} T^{7/2} - \frac{2}{9} \left(T_{\pi}^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m \sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right)}{\beta a_{\min} G \rho_{\pi} \rho_{\pi} R} \cdot \frac{1}{T^3}. \quad (12)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (1) и последующее интегрирование дает ход температуры с глубиной. Имеем:

$$T^{9/2} - T \left(T_{\pi}^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m \sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right) = -\frac{7}{6} \sqrt{\frac{2\pi}{km}} \frac{L\pi}{\varepsilon_m \sigma} G \rho_{\pi} \rho_{\pi} R x, \quad (13)$$

откуда получается также толщина псевдоожигенного слоя

$$h = \frac{3 \exp(A - B/T_{\pi})}{4\pi G \rho_{\pi} \rho_{\pi} R}. \quad (14)$$

В отличие от статического слоя толщина h не является инвариантной величиной и поэтому не может служить в качестве исходной заданной величины. Таким инвариантом является толщина того же слоя в статическом состоянии h_0 , определяемая выражением:

$$h_0 = \int_0^h \frac{dx}{\mu^3}. \quad (15)$$

В этом выражении целесообразно перейти от интегрирования по глубине к интегрированию по температуре. Имеем:

$$h_0 = \frac{7^2 \cdot 4^3 \cdot 2\pi \varepsilon_m \sigma}{27^2 km L} \left(\frac{\beta a_{\min}}{Z} \right)^3 (G \rho_{\pi} \rho_{\pi} R)^2 \times \\ \times \int_{T_{\pi}}^{T_M} \frac{T^9 dT}{T^{7/2} - \frac{2}{9} \left(T_{\pi}^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m \sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right)}. \quad (16)$$

Интеграл в последнем выражении легко вычисляется в элементарных функциях. Обозначая для краткости

$$T_0 = \left(\frac{2}{9} \right)^{2/7} \left(T_{\pi}^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m \sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right)^{2/7}, \quad (17)$$

введем безразмерную переменную θ с помощью соотношения

$$T = T_0 \theta^2 \quad (18)$$

и безразмерные пределы интегрирования

$$\theta_{\pi} = \left(\frac{2}{9} \right)^{-1/7} \left(T_{\pi}^{7/2} + \frac{7L}{8\varepsilon_m \sigma} \sqrt{\frac{2k}{\pi m}} N_h \right)^{-1/2} \sqrt{T_{\pi}} = \sqrt{\frac{T_{\pi}}{T_0}}, \quad (19)$$

$$\theta_M = \theta_{\pi} \sqrt{\frac{T_M}{T_{\pi}}} = \sqrt{\frac{T_M}{T_0}}. \quad (20)$$

В этих обозначениях, разрешая (16) относительно потока молекул, имеем

$$Z = \frac{7^{2/3} 2^{41/21} \pi^{1/3}}{3^{22/7}} \cdot \frac{\beta a_{\min} T_0}{h_0^{1/3}} \left(\frac{\varepsilon_m \sigma}{km L} \right)^{1/3} (G \rho_{\pi} \rho_{\pi} R)^{2/3} (\varphi(\theta_M) - \varphi(\theta_{\pi}))^{1/3}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = & \frac{\theta^6}{6} - \frac{\theta^6}{7(\theta^7 - 1)} + \frac{13}{49} \ln|\theta - 1| + \frac{13}{49} \left\{ \cos \frac{6\pi}{7} \ln \left(1 + \right. \right. \\ & + 2\theta \cos \frac{\pi}{7} + \theta^2 \left. \right) + \cos \frac{4\pi}{7} \ln \left(1 + 2\theta \cos \frac{3\pi}{7} + \theta^2 \right) + \cos \frac{2\pi}{7} \ln \left(1 + \right. \\ & \left. \left. + 2\theta \cos \frac{5\pi}{7} + \theta^2 \right) + 2 \sin \frac{6\pi}{7} \operatorname{arctg} \frac{\theta + \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} + \right. \\ & \left. + 2 \sin \frac{4\pi}{7} \operatorname{arctg} \frac{\theta + \cos \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{3\pi}{7}} + 2 \sin \frac{2\pi}{7} \operatorname{arctg} \frac{\theta + \cos \frac{5\pi}{7}}{\sin \frac{5\pi}{7}} \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Расчет параметров полностью псевдооживленного слоя можно выполнить в следующей последовательности. Задаем величины $T_{\text{л}}$ и h_0 . Находим приближенное значение $T_{\text{м}} \approx T_0$ с помощью (17). Применяя (19) и (20), находим параметры $\theta_{\text{л}}$ и $\theta_{\text{м}}$. Подставляем найденные значения в (21), определяя Z . После этого можно рассчитать с помощью (13) ход температуры внутри слоя. Зная ход температуры, из (12) можно найти ход коэффициента расширения слоя. Только теперь, на конечной стадии расчета мы можем убедиться, имеет ли физический смысл полученный нами результат, т. е. соблюдено ли во всем слое условие $\mu > 1$. Из выражения (12) видно, что μ монотонно убывает с глубиной. Можно поэтому представить несколько возможных вариантов результатов проверки решения на физичность.

Если уже на верхней границе слоя $\mu < 1$, то следует весь расчет произвести заново, пользуясь соотношениями для статического слоя. Более сложен случай, когда равенство $\mu = 1$ достигается на некоторой глубине h , меньшей, чем толщина слоя. Правильная интерпретация состоит в этом случае в том, что псевдооживление наступает не во всем пылевом слое, а в его верхней части, в то время как нижняя часть слоя остается в статическом равновесии.

Частичное псевдооживление. Уже найденные соотношения позволяют проанализировать и этот случай. Для частично псевдооживленных слоев справедлив подход к определению температуры поверхности льда под слоем, который применялся к полностью псевдооживленному слою [2]. Однако плотность потока молекул следует рассчитывать по-другому. Пусть поверхность раздела статической и псевдооживленной части слоя находится на глубине $h_0 - h_1$ (т. е. h_1 — толщина статической части) и ее температура равна T_1 . Тогда из выражения (12) имеем:

$$\frac{27}{28} \frac{Z}{\beta a_{\text{млн}} G \rho_{\text{я}} \rho_{\text{л}} R} \sqrt{\frac{km}{2\pi} \frac{T_1^{7/2} - \frac{2}{9} T_0^{7/2}}{T_1^3}} = 1. \quad (23)$$

С другой стороны, для статической части из выражения (15) в [2] следует:

$$Z = \frac{\varepsilon_{\text{м}} \beta a_{\text{млн}} \sigma}{h_1 L} (T_1^4 - T_{\text{л}}^4). \quad (24)$$

Толщина пылевого слоя до псевдооживления складывается из толщины статической части и статической толщины псевдооживленной части, та-

ким образом вместо (15) следует написать:

$$h_0 = h_1 + \int_{T_1}^{T_M} \frac{dT}{\left| \frac{dT}{dx} \right| \mu^3}, \quad (25)$$

где толщина статической (нижней) части слоя определяется выражением

$$h_1 = \frac{27}{28} \frac{\varepsilon_m \sigma}{G \rho_n \rho_n R} \sqrt{\frac{km}{2\pi}} \frac{\left(T_1^{7/2} - \frac{2}{9} T_0^{7/2} \right) (T_1^4 - T_n^4)}{T_1^3}, \quad (26)$$

которое можно получить, исключив Z из (23) и (24).

Выберем в качестве масштаба глубины величину

$$H = \left(\frac{2}{9} \right)^{9/7} \frac{27}{28} \frac{\varepsilon_m \sigma}{G \rho_n \rho_n R} \sqrt{\frac{km}{2\pi}} \frac{T_0^{9/2}}{kB} \quad (27)$$

и определим безразмерные величины

$$y_0 = h_0/H \quad (28)$$

и

$$y_1 = h_1/H. \quad (29)$$

В качестве масштаба температуры выбираем комбинацию

$$T_* = \left(\frac{2}{9} \right)^{2/7} T_0. \quad (30)$$

Частично псевдооживленный слой характеризуется двумя безразмерными температурами: температурой на границе псевдооживления

$$t_1 = T_1/T_* \quad (31)$$

и температурой поверхности льда

$$t_n = T_n/T_*. \quad (32)$$

Преобразованные к безразмерным переменным уравнения (25) и (26) приобретают форму

$$y_1 = t_1 (t_1^{7/2} - 1) - t_n^4 (t_1^{7/2} - 1)/t_1^3 \quad (33)$$

и

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 + 4 \frac{(t_1^{7/2} - 1)^3}{t_1^3} \int_{t_1}^{(9/2)^{2/7}} \frac{\xi^9 d\xi}{(\xi^{7/2} - 1)^2} = \\ &= y_1 + 8 \frac{(t_1^{7/2} - 1)^3}{t_1^3} \left[\Phi \left[\left(\frac{9}{2} \right)^{1/7} \right] - \Phi \left(\sqrt{t_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где $\Phi(x)$ — ранее определенная соотношением (22) функция.

Заметим, что величины T_0 , T_n , T_* , H и безразмерный параметр t_1 однозначно определены гелиоцентрическим расстоянием кометы, радиусом ядра, плотностью ядра и пылинки, а также константами в выражении для давления насыщенных паров сублимата, т. е. химическим составом ядра. От толщины пылевого слоя перечисленные величины не зависят. Это обстоятельство подсказывает порядок расчета параметров частично псевдооживленного слоя.

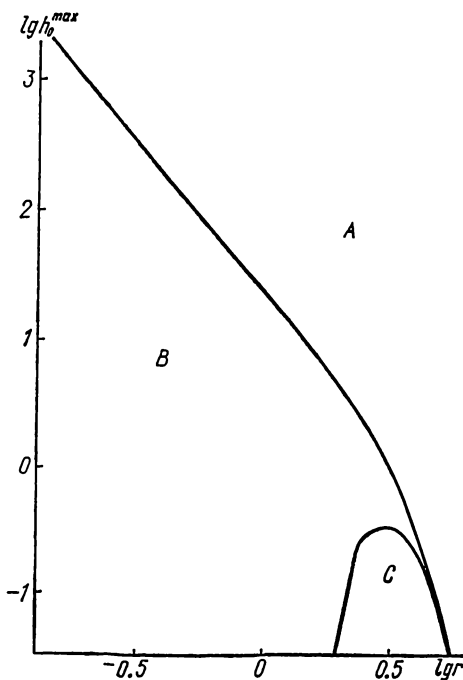
Если необходимо найти газопроизводительность ядра кометы на заданном гелиоцентрическом расстоянии при известной толщине мине-

рального слоя, приведенной к статическому состоянию, поступаем следующим образом. По заданным характеристикам ядра и гелиоцентрическому расстоянию находим температуры T_0 , $T_{\text{л}}$, T_* и масштаб глубины H . Здесь возможен обратный расчет с последующей интерполяцией, а именно: принимая в качестве независимой переменной $T_{\text{л}}$, находим все остальные перечисленные величины, в том числе гелиоцентрическое расстояние. Следующий этап состоит в том, что по заданной собственной толщине слоя h_0 находим ее безразмерное значение y_0 , а

затем, решив уравнение (34), получаем безразмерную температуру на внутренней границе псевдооживления t_1 . После этого с помощью (33) находим безразмерную толщину статической части. Возвратившись к размерным значениям h и h_1 , находим удельную газопроизводительность ядра с помощью (24). При близких значениях T_1 и $T_{\text{л}}$ удобнее вместо (24) определять Z по формуле

$$Z = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{T_1^3}{T_1^{7/2} - \frac{2}{9} T_0^{7/2}}. \quad (35)$$

Рис. 1. Состояние поверхностного слоя в зависимости от собственной толщины и гелиоцентрического расстояния: А — область статических состояний; В — область частичного псевдооживления; С — область полного псевдооживления (h_0^{max} , см; r , а. е.)



Численные результаты. Заметим, что имеющие физический смысл системы (19), (20) существуют не при всех значениях t_1 и $t_{\text{л}}$. Из уравнения (20) следует, что величина t_1 не может превысить значение $\left(\frac{9}{2}\right)^{2/7}$, соответствующее случаю статического равновесия $h_1 = h_0$.

Подставив в уравнение (19) вместо t_1 величину $\left(\frac{9}{2}\right)^{2/7}$ и $y_1 = y_0$, получим формулу, определяющую гелиоцентрическую зависимость минимальной собственной толщины слоя, способного находиться на заданном гелиоцентрическом расстоянии в статическом равновесии, или, что то же самое — максимальную толщину, при которой еще возможно частичное псевдооживление. Конкретный пример такой функции показан на рис. 1.

С другой стороны, из уравнения (19) следует, что $t_1 > t_{\text{л}}$, так как в противном случае толщина псевдооживленной части получается отрицательной. Кроме того, очевидно, что $t_1 > 1$. Поэтому область $1 < t_{\text{л}} < t_1$ ограничивает область существования полностью псевдооживленных слоев по гелиоцентрическим расстояниям. Максимальное значение толщины, при которой слой еще может существовать в полностью псевдооживленном состоянии, определяется путем подстановки $t_1 = t_{\text{л}}$ в уравнение (20). Результат расчета показан на рис. 1. Из рассмотрения кривых можно сделать вывод, что полное псевдооживление — действительно редкий случай, возможный в довольно тонких слоях на значительных гелиоцентрических расстояниях ($r > 2$ а. е.). Слои, толщина которых $h_0 > 0.3$ см, вообще не могут находиться в полностью псевдооживленном состоянии.

Минимальные толщины равновесной коры на рис. 1 значительно меньше полученных в [1], так как там не принималось во внимание давление газа в порах пылевого слоя. Направленный внутрь градиент температуры внутри слоя существенно уменьшает градиент давления, обеспечивая возможность существования на поверхности ядер пылевых слоев значительно более тонких, чем те, вес которых превышает давление газа под слоем.

Еще одну интересную закономерность частично псевдоожженных слоев демонстрирует рис. 2 (расстояние от Солнца 1.408 а. е.). Видно,

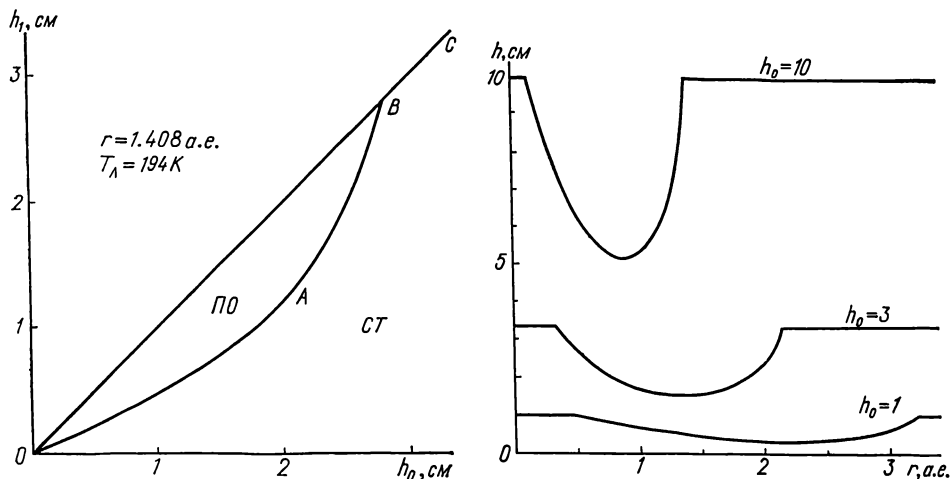


Рис. 2. Зависимость толщины статической части поверхностного пылевого слоя от его собственной толщины: ОАВ — участок частичного псевдоожжения; ВС — участок полного статического слоя; ПО — псевдоожженная часть; СТ — статическая часть слоя

Рис. 3. Зависимость толщины статической части слоя от гелиоцентрического расстояния для трех различных собственных толщин слоя

что частичное псевдоожжение начинается сразу же с началом образования и роста пылевого слоя. По мере роста толщины слоя толщина псевдоожженной части также растет, достигая максимального значения при некоторой определенной толщине пыли. Затем псевдоожжение постепенно ослабевает, толщина псевдоожженной части уменьшается, и при толщине пыли ≈ 2.8 см псевдоожжение прекращается, наступает статическое равновесие. Пусть ядро с пылевым слоем фиксированной толщины проходит в своем орбитальном движении некоторый диапазон гелиоцентрических расстояний. Результаты такого мысленного эксперимента, представленные на рис. 3, позволяют продемонстрировать еще одну интересную особенность в поведении пылевых слоев. Пылевой слой, статический на достаточном удалении от Солнца, начиная с некоторого гелиоцентрического расстояния частично псевдоожжается, причем толщина псевдоожженной части сначала растет, а затем убывает по мере приближения к Солнцу. Затем на некотором гелиоцентрическом расстоянии псевдоожжение прекращается вообще. Затухание псевдоожжения с приближением к Солнцу может показаться несколько неожиданным. Его причина — рост градиента температуры в слое, способствующего удержанию слоя от разбухания.

1. Шульман Л. М. Двухслойная модель ядра кометы. — Астрометрия и астрофизика, 1981, вып. 45, с. 21—34.
2. Шульман Л. М. Псевдоожжение в поверхностных слоях ядер комет. I. Статический слой на пороге псевдоожжения. — Там же, 1982, вып. 47, с. 62—69.