Кинематика и физика небесных тел, 1985, т. 1, № 4

УДК 521:528.111:519.24

Об одном обобщении математической формы распределений Лапласа и Гаусса и его применении при математической обработке астрономических наблюдений

И. В. Джунь

В качестве исходной формы кривой ошибок при обработке астрономических наблюдений предложено следующее распределение:

$$y = \frac{c}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{p}\right),$$

где σ — мера рассеяния; x, a — значения случайной ошибки и искомого результата наблюдений; c — постоянная, зависящая от p. Рекомендуемый метод обработки астрономических наблюдений x_i, подчиняющихся приведенному выше закону плотности, сводится к вычислению веса w наблюдений x_i по формуле: $w_i = \sigma^{-p}|x_i - \bar{x}|^{p-2}$, где $\bar{x}$ — среднее, а значения σ и p получают на основании эмпирического значения эксцесса. При $p=2$ метод сводится к классическим способам оценивания. Показано, что значения p для основных опубликованных рядов эмпирических распределений ошибок астрономических определений колеблются в пределах $0.7 \leqslant p \leqslant 2.13$.

ON GENERALIZATION OF MATHEMATICAL FORM OF LAPLACE AND GAUSS DISTRIBUTIONS AND ITS APPLICATION FOR MATHEMATICAL PROCESSING OF ASTRONOMICAL OBSERVATIONS, by Dzun' I. V. — The following distribution is proposed as an initial form of the error curve for processing of astronomical observations:

$$y = \frac{c}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{p}\right),$$

where a, σ, p are parameters of distribution; c is constant value depending on p. The distribution (3) is a generalized form of both the Laplace distribution (used in his early works on the error theory) and the Gauss distribution. The method is recommended for processing of astronomical observations of x_i whose errors are distributed according to the density law (3). It leads to determination of the weight $w_i = \sigma^{-p}|x_i - \bar{x}|$ where $\bar{x}$ is the mean value of x_i, σ, and p are derived from an empirical value of excess. It is shown that for all available series of empirical error distributions of astrometrical observations $0.78 \leqslant p \leqslant 2.13$.

После опубликования в 1838 г. работы Бесселя «Исследование о вероятности ошибок наблюдений» [1] астрономы повторяли это исследование для различных рядов наблюдений, с целью проверки соответствия эмпирических распределений ошибок нормальному закону. Ньюком, а затем Джеффрис, Н. И. Идельсон отмечали, что действительные ряды ошибок астрономических наблюдений не были гауссовыми. Наиболее существенной особенностью этих рядов являлось то, что, в отличие от закона Гаусса, их эксцесс не равен нулю. О знаке же эксцесса Н. И. Идельсон писал: «никогда еще, насколько нам известно, не встречались ряды с отрицательным эксцессом» [6]. Этот вывод был подтвержден в результате обширных статистических исследований широтных рядов, выполненных под руководством Е. П. Федорова [4, 5].

Чтобы учесть отмеченную особенность ошибок астрономических, в частности, широтных рядов наблюдений, Джеффрис [12] предложил при их обработке пользоваться, вместо нормального закона, кривой Пирсона VII типа. Последняя удовлетворительно представляет эмпирические распределения с положительным эксцессом. Однако обработка наблюдений методом максимального правдоподобия на основе кривой Пирсона VII типа затруднительна, так как она требует решения громоздкой системы уравнений, что обусловлено прежде всего сложностью математической формы кривой Пирсона VII. Для упрощения методов обработки желательно было сохранить простоту первоначальных форм распределений, предложенных Лапласом и Гауссом. Распределения Лапласа (см. [8]) и Гаусса допускают известное обобщение, сущность которого состоит в следующем.

Если распределение Лапласа, имеющее положительный эксцесс

$$y = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{1}{1}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{1}\right), \tag{1}$$

и распределение Гаусса, имеющее нулевой эксцесс

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^{2}\right], \tag{2}$$

записать в общем виде

$$y = \frac{c}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{p}\right), \tag{3}$$

где a — искомое значение наблюдаемой величины, то, сохраняя содержание и простоту математической формы первоначальных кривых (1) и (2), мы при помощи формы (3) можем представить распределения гораздо более обширного диапазона, которые при $p<2$ будут иметь положительный, а при $p>2$ — отрицательный эксцесс. Форму (3) можно назвать обобщенным распределением Гаусса — Лапласа. Заметим, что она уже использовалась для решения специальных задач и послужила основой теории метода L_p-оценок [9, 11].

Рассмотрим теперь некоторые приемы практического использования (3) при обработке астрономических наблюдений. Так как все известные методы оценивания наблюдаемых величин по результатам измерений сводятся, по существу, к оценкам тех или иных параметров «теоретического», т. е. принятого нами закона распределения измерений, то цель, которую мы ставим — дать простейший способ определения параметров распределения (3). Для этого найдем постоянную c в (3) при условии $\mu_{\nu=0}=1$, где μ_ν — центральный момент распределения (3) порядка ν:

$$\mu_\nu = \frac{c}{\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^{\nu} \cdot \exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-a}{\sigma}\right|^{p}\right) dx. \tag{4}$$

Интегрируя (4) при $\nu = 0$, имеем [3]:

$$\mu_0 = \frac{c}{\sigma} \cdot \frac{2\sigma\sqrt[p]{p}}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \tag{5}$$

и

$$c = \frac{p}{2\sqrt[p]{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}, \tag{6}$$

где $\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$ — гамма-функция.

Так как распределение (3) симметрично, то его нечетные моменты равны нулю. Полагая $\nu=2$ имеем из (4):

$$\mu_2 = \sigma^2 \frac{\sqrt[p]{p^2}\,\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}. \tag{7}$$

Из (7) легко найти параметр рассеяния σ распределения (3)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu_2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt[p]{p^2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}} = \sigma_\Gamma \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt[p]{p^2}\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}},$$

где σ_Γ — средняя квадратичная погрешность.

Для нахождения показателя степени p в (3) воспользуемся моментным отношением [2]:

$$\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2, \tag{8}$$

где μ_2 вычисляется по формуле (7), а μ_4, на основании (4), равно

$$\mu_4 = \sigma^4 \frac{\sqrt[p]{p^4}\Gamma\left(\frac{5}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}. \tag{9}$$

С учетом (7) и (9) имеем после несложных преобразований

$$\beta_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)\right]^2}, \tag{10}$$

т. е. для определения p в (3) достаточно вычислить β_2 эмпирического распределения и решить уравнение (10) относительно p. Для определения значения p можно воспользоваться также таблицей, в которой по вычисленному β_2 легко найти p.

Определение показателя степени p обобщенного распределения Гаусса — Лапласа по вычисленному значению моментного отношения $\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$ (с точностью до 0.01)

β_2	p	β_2	p	β_2	p	β_2	p	β_2	p
2.0	5.17	3.0	2.00	4.0	1.41	5.0	1.15	6.0	1.00
2.1	4.33	3.1	1.91	4.1	1.37	5.1	1.13	6.1	0.99
2.2	3.75	3.2	1.83	4.2	1.34	5.2	1.11	6.2	0.97
2.3	3.33	3.3	1.75	4.3	1.31	5.3	1.09	6.3	0.96
2.4	3.00	3.4	1.69	4.4	1.28	5.4	1.08	6.4	0.95
2.5	2.75	3.5	1.63	4.5	1.26	5.5	1.06	6.5	0.94
2.6	2.54	3.6	1.58	4.6	1.23	5.6	1.05	6.6	0.94
2.7	2.37	3.7	1.53	4.7	1.21	5.7	1.03	6.7	0.93
2.8	2.23	3.8	1.48	4.8	1.19	5.8	1.02	6.8	0.92
2.9	2.11	3.9	1.44	4.9	1.17	5.9	1.01	6.9	0.91

Полагая в (10), что $p=\infty$ и воспользовавшись формулами умножения Гаусса для Г-функции [10], имеем:

$$\beta_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}} = 1.8. \tag{11}$$

Таким образом, для определения p нужно, чтобы $1.8<\beta_2<\infty$.

Для определения p с точностью 0.5 % при $2.5\leqslant\beta_2\leqslant6.5$ мы предлагаем следующую приближенную формулу, полученную на основании (10):

$$p \approx \frac{5\ln 5 - 6\ln 3}{\ln\left(\beta_2 - \frac{2}{9}\right) + \ln\sqrt{5} - \ln 3}. \tag{12}$$

Так как при $p \neq 2$ распределение (3) не является гауссовым, то для получения оценки для a в (3) по результатам наблюдений естественно воспользоваться уравнением максимума правдоподобия [7]:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \Sigma \frac{y'(x_i; a)}{y(x_i; a)} = 0, \tag{13}$$

где L — функция правдоподобия, которую мы считаем зависящей от одного параметра a при фиксированных x_i $(x=1, 2, \ldots, n)$ [7]. В этом случае, на основании (13) имеем:

$$\Sigma (x_i - a) w_i = 0, \tag{14}$$

где

$$w_i = \frac{y'(x_i; a)}{y(x_i; a)} (x - a)^{-1} \tag{15}$$

и тогда

$$a = \frac{\Sigma x_i w_i}{\Sigma w_i}. \tag{16}$$

Подставляя в (15) производную от функции (3), получим следующую формулу для назначения весов астрономическим наблюдениям:

$$w_i = \sigma^{-p} | x_i - a |^{p-2}. \tag{17}$$

В первом приближении веса можно получить, если в (17) вместо a взять среднее. Во втором приближении в (17) применяют оценку для a, найденную по формуле (16) в первом приближении. С учетом весов w_i легко получить дисперсию оценки a по известной формуле $\sigma_a{}^2 = \frac{\Sigma w_i (x_i - a)^2}{(n-1)\Sigma w_i}$, где n — количество наблюдений.

Для нормального закона $p=2$, тогда из (17) следует, что $w_i = \sigma^{-2} = \mathrm{const}$, и мы приходим, согласно (16), к классическим способам оценивания величины a.

Для распределения Лапласа $p=1$ и

$$w_i = \sigma^{-1} | x - a |^{-1}, \tag{18}$$

т. е. мы приходим к методу обработки, известному под названием метода наименьших модулей.

При $1 \leqslant p \leqslant 2$ с учетом весов (17) мы приходим к робастным методам оценивания [9].

Таким образом, исходная форма закона распределения (3) позволяет обобщить не только кривые ошибок Лапласа и Гаусса, но также и практически все известные методы оценивания, как классические, так и нетрадиционные.

Проведенное нами исследование показало, что для 25 опубликованных эмпирических распределений ошибок астрономических наблюдений значение p колеблется в пределах от 0.78 до 2.13 и чаще всего p близко к $\sqrt{2}$, т. е. ошибки астрономических наблюдений «...лишь на глазок и не по сути» [8] аппроксимируются нормальным законом. Это означает, что современная теория ошибок должна учитывать многообразие действительных распределений ошибок и в каждом случае то значение p, которое свойственно ошибкам измерений данного астрономического инструмента или метода измерений.

То, что форма (3) приводит к обобщению известных методов оценивания, подтверждает ее перспективность в развитии теории математической обработки астрономических наблюдений. Этот вывод проиллюстрирован рассмотренным нами простым способом учета значения p при назначении весов астрономическим наблюдениям. Простота практического использования p обусловлена тем обстоятельством, что (3), в отличие от кривой Пирсона VII типа, обладает многими замечательными свойствами нормального закона и благодаря этому, а также в силу своей общности и простоты, может стать математическим основанием современной теории ошибок, а следовательно, и современной теории построения наиболее эффективных оценок по результатам астрономических наблюдений.

1. *Бессель Ф. В.* Избранные геодезические сочинения: Высш. геодезия и способ наименьших квадратов / Под ред. Г. В. Багратуни. — М. : Геодезиздат, 1961.—282 с.
2. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М. : ВЦ АН СССР, 1968.—474 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1963.—1100 с.
4. *Джунь И. В.* Распределение Пирсона VII типа в ошибках наблюдений над колебаниями широт. — Астрометрия и астрофизика, 1969, вып. 2, с. 101—115.
5. *Джунь И. В.* О назначении весов астрономическим наблюдениям. — Там же, 1970, вып. 10, с. 26—34.
6. *Идельсон Н. И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. — М. : Геодезиздат, 1947.—359 с.
7. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М. : Мир, 1975.—648 с.
8. *Мостеллер Ф., Тьюки Дж.* Анализ данных и регрессия. — М. : Финансы и статистика, 1982. — Вып. 1. 320 с.
9. *Петрович М. Л.* Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ. — М. : Финансы и статистика, 1982.—200 с.
10. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М. : Наука, 1979.—832 с.
11. *Fletcher R., Grant J. A., Nebden M. D.* The calculation of linear best L_p approximations. — Comput. J., 1971, **14**, p. 277—279.
12. *Jeffreys H.* The law of error in the Greenwich variation of latitude observations. — Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 1939, **99**, p. 703—709.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз.
Ровно

Поступила в редакцию 27.09.84,
после доработки 19.11.84

РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 530.12+539.12

Ю. А. Белецкий

О ВОЗМОЖНОСТИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЭТАПА ЭВОЛЮЦИИ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ С НЕИДЕАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

(Препринт ИТФ—84—7Р)

Рассмотрены качественные особенности динамики однородной и изотропной космологической модели с неидеальным уравнением состояния. Получены необходимые условия на форму уравнения состояния в окрестности точек поворота. Показано, что для модели «раздувающейся» Вселенной возможен осциллирующий этап эволюции.