

УДК 629.783+528.21/22

## Модели точечных масс и их использование в орбитальном методе спутниковой геодезии.

### I. Описание глобального гравитационного поля Земли системой потенциалов точечных масс

А. Н. Марченко, О. А. Абрикосов, И. М. Цюпак

Изложено решение задачи моделирования с необходимой точностью гравитационного потенциала планеты (на основании разнообразной наблюдательной информации о его трансформантах) потенциалом системы обычных и сопряженных точечных масс. Учитывая некорректный характер проблемы, последняя сведена к задаче нелинейного программирования с регуляризацией по А. Н. Тихонову. На основании априорного использования информации о гравитационном поле Земли выбран стабилизатор решения с учетом гладкости аппроксимируемого поля, модель которого предполагается использовать для описания движения геодезических и геодинамических спутников. Разработанный алгоритм использован при построении моделей точечных масс на основании информации о геопотенциале различной степени гладкости. В частности, получены наборы сопряженных точечных масс, «восстанавливающих» поле гармоник GEM-L2 и описывающих высоты геоида по 5° данным спутниковой альтиметрии GEOS-3.

*POINT MASS MODELS AND THEIR APPLICATION TO THE ORBITAL METHOD OF SATELLITE GEODESY. I. DESCRIPTION OF THE GLOBAL GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH BY A SET OF POINT MASS POTENTIALS, by Marchenko A. N., Abrikosov O. A., Tsyupak I. M.* — The solution is described for the problem of the planet's gravitational potential simulation with a requisite accuracy by potentials of both «usual» and reciprocal point masses. This problem is considered as an ill-conditioned one of the nonlinear programming with the Tikhonov regularization. The stabilizing factor is chosen according to the smoothness of the gravitational field, which model is supposed to be used for description of the motion of geodetic and geodynamic artificial satellites. The algorithm developed was used for calculation of the point mass models on the basis of the data on geopotential with different degree of smoothness. In particular, the sets of reciprocal point masses are obtained based on the full set of the GEM-L2 harmonics and from the 5°×5° GEOS-3 altimeter data.

**Введение.** В последние годы ведущую роль в развитии спутниковых методов определения координат полюса и неравномерности вращения Земли и выработке необходимых рекомендаций по созданию соответствующей международной службы изучения вращения Земли занимает использование высокоточных лазерных наблюдений таких искусственных спутников Земли (ИСЗ), как «Lageos» и «Starlette» [15, 20]. Представляется целесообразным использовать при обработке массовых рядов наблюдений ИСЗ в качестве моделей геопотенциала не наборы гармоник, рекомендуемые Стандартами МЕРИТ [20], а подходящие модели точечных масс (ряд фундаментальных решений уравнения Лапласа), позволяющие [10, 14, 16, 17] более оперативно производить массовые вычисления орбит ИСЗ, с сохранением необходимой точности.

Ниже рассматривается задача описания однородной моделью точечных масс глобального гравитационного поля Земли, под которым понимается такая его аппроксимация, которая с необходимой точностью (для решения ряда геодезических и геодинамических задач в рамках орбитального метода спутниковой геодезии) описывает движение геодезических спутников.

В данной работе проблема построения моделей точечных масс, в отличие от ряда работ отечественных и зарубежных авторов (см. об-

ширную библиографию в [10]), решается с широким применением априорной информации о гравитационном поле планеты, предварительно обобщенной в виде стабилизатора решения, включаемого в метод регуляризации А. Н. Тихонова [13]. Последнее привело к созданию вариационного алгоритма, позволяющего регулировать гладкость аппроксимирующей функции и построить многоточечные модели, по своим качественным характеристикам не уступающие современным наборам гармоник  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ .

**Вариационный метод аппроксимации геопотенциала рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа.** Предварительные исследования показали, что нормальный потенциал  $U$ , представляемый в виде суммы шаровых функций нулевого и второго порядка, может быть очень точно описан [5] суммой потенциалов одной центральной массы и четырех точечных масс приближенной конструкции квадруполья, лежащих на главных осях  $A$  и  $C$  инерции планеты. Кроме того, для возмущающего потенциала  $T=V-U$  справедлива [14] сколь угодно точная аппроксимация

$$T \approx T_N = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_i} \quad (1)$$

с помощью потенциала  $m_i/r_i$  точечных масс  $m_i$ , расположенных внутри сферы Бьерхаммара [8, 9]. Исходными данными служат отягощенные погрешностями результаты измерений, трактуемые как линейные функционалы  $l_j = l_j(T)$  от возмущающего потенциала  $T$  [11, 19] (например, — значения аномалий  $\Delta g$  силы тяжести, высоты геоида, результаты наблюдений топоцентрических дальностей до ИСЗ и др.). Необходимо на основании измерений найти разложение функции (1) по системе  $\{1/r_i\}$  фундаментальных решений уравнения Лапласа ( $r_i$  — расстояние от  $i$ -й массы до текущей точки), что в совокупности с представлением нормального потенциала  $U$  в виде [5, 6] потенциала пяти точечных масс позволит получить математически однородную модель точечных масс для гравитационного потенциала  $V$  Земли.

Не останавливаясь здесь более подробно на постановке и некорректном характере проблемы аппроксимации системой точечных масс [6, 8, 9, 17], будем строить последовательность потенциалов  $\{T_N\}$  под условием минимума сглаживающего функционала А. Н. Тихонова [11, 13] вида

$$\|\tilde{n}\|_{E_n}^2 + \alpha \|T_N\|_q^2 = \min, \quad (2)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \|\tilde{n}\|_{E_n}^2 &= \tilde{n}^T C_{nn}^{-1} \tilde{n}, \quad \tilde{n} = L - WM, \quad L = [l_j]_{n,1} \\ M &= [m_i]_{N,1}, \quad W = [\omega_{ji}]_{n,N}, \quad \omega_{ji} = \tilde{W} \left( \frac{1}{r_i} \right), \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

а параметр регуляризации  $\alpha$  может находиться одним из методов, рекомендуемых в [13], для чего необходимо априорное задание, например, дисперсии  $d$  результатов наблюдений.

В соотношениях (2)—(3) приняты следующие обозначения:  $\tilde{n}$  — вектор ошибок измерений, характеризуемых заданной ковариационной матрицей  $C_{nn}$ , которая определяет [11] метрику в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ ;  $L$  — вектор результатов наблюдений (линейных функционалов  $l_j$ );  $\omega_{ji}$  — значения функций  $\omega_i$  в точке  $j$ , получаемых как результат действия линейного оператора  $\tilde{W}$  на базисную функцию

$1/r_i$ , причем

$$l_j = \tilde{W}(T_N(j)), \quad (4)$$

то есть вид оператора  $\tilde{W}$  связан с типом функционалов  $l_j^*$ ,  $\|T_N\|_q^2$  — квадрат нормы возмущающего потенциала на гильбертовом пространстве  $H_2^q$  с воспроизводящим ядром [11, 18, 19], который выбирается здесь в качестве стабилизатора задачи и может быть представлен следующим образом [9]:

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j F_{ij}^q = M^T F M. \quad (5)$$

Здесь  $F = [F_{ij}^q]_{NN}$  — матрица, состоящая из элементов  $F_{ij}^q$ , представляющих скалярное произведение  $(r_i^{-1}, r_j^{-1})_{H_2^q}$ . Замкнутые выражения для  $F_{ij}^q$  при разных  $q$  получены в работе [9] (рис. 1). На практике возникает задача выбора воспроизводящего ядра, определяющего метрику пространства  $H_2^q$ .

Характерной особенностью обсуждаемой проблемы является также неединственность выбора базисных функций  $\{1/r_i\}$  (конфигураций точечных масс), обеспечивающих заданную точность аппроксимации. Достаточно простое решение этих вопросов может быть получено на основании предварительного анализа информации о гравитационном поле Земли и использовании локальных свойств базисных функций  $\{1/r_i\}$ .

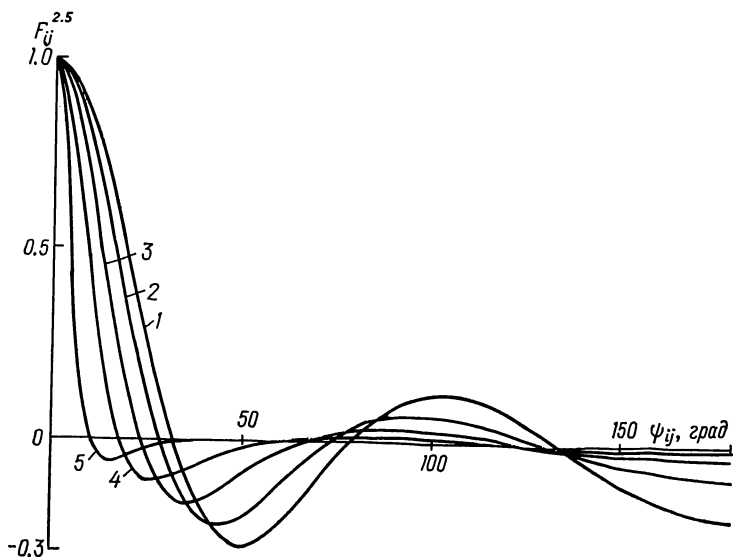


Рис. 1. Графики нормированных значений скалярных произведений  $F_{ij}^{2,5}(\psi_{ij}, D) = \left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_j}\right)_{H_2^{2,5}}$  (асимптотика воспроизводящего ядра ЧНВ-2 [7] при различных относительных расстояниях  $D$  до точечных масс (1 —  $D = 0.5$ ; 2 —  $D = 0.6$ ; 3 —  $D = 0.7$ ; 4 —  $D = 0.8$ ; 5 —  $D = 0.9$ ))

Априорное использование информации о гравитационном поле Земли. Существенным оказывается тот факт, что решение выгодно искать [11, 18, 19] на таком гильбертовом пространстве  $H_2^q$ , асимптотика воспроизводящего ядра которого близка к спектру степенных дисперсий возмущающего потенциала  $T$ . Такое ядро считают оптимальным

\* Здесь и далее мы полагаем, что выполнена линеаризация [11, 19] геодезических наблюдений.

в том смысле, что выбор последнего обеспечивает в дальнейшем минимум средней квадратичной ошибки аппроксимации. В работе [7] было построено шестипараметрическое ядро ЧНВ-2, подходящее именно для целей определения глобального гравитационного поля из комбинации спутниковых и наземных наблюдений. При этом учтена центральная симметрия области определения функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара (которые используются для аппроксимации возмущающего потенциала  $T$ ), что позволило получить наилучшее согласие модельных (по ЧНВ-2)

$$c_n = 405.84 \frac{(n-1)}{(n-2)(n+15)} \left[ \left( \frac{6176.6}{6371} \right)^2 \right]^{n+2} \quad (\text{при } n - \text{четном}), \quad (6)$$

$$c_n = 345.83 \frac{(n-1)}{(n-2)(n+13)} \left[ \left( \frac{6221.6}{6371} \right)^2 \right]^{n+2} \quad (\text{при } n - \text{нечетном})$$

и эмпирических степенных дисперсий, в частности, за счет введения двух «сфер Бьерхаммара» ( $R_1=6176.6$  км,  $R_2=6221.6$  км).

Таким образом, отвечая на поставленный вопрос, скажем, что при аппроксимации глобального поля имеет смысл пользоваться стабилизатором (5) с параметрами ядра ЧНВ-2 [7] (6), а при локальном его уточнении — ядром Чернинга — Раппа или ядром Моритца [19, 23].

Применительно к конкретной задаче известны следующие условия, связывающие коэффициенты  $m_i$  разложения (1): сумма величин масс должна равняться нулю, а центр масс многоточной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. Будем полагать, что в общем случае известно  $r$  условных уравнений

$$SM = P, \quad (7)$$

в которых элементы матрицы  $S$  размерностью  $(r \times N)$  связаны [8] с координатами  $d_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\lambda_i$  точечных масс, а элементы вектора  $P$  — суть те нормированные коэффициенты  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  геопотенциала, с которыми предполагается согласовать величины  $m_i$ .

В работах [8, 9] обсуждены качественные и количественные характеристики функций  $F_{ij}^q$  при разных  $q$  (см. рис. 1) и показана принципиальная возможность такого их использования в (5), которая — в случае распределения  $N$  масс на сфере определенного радиуса  $R_0 < R_B$  — обеспечивает при  $q > 1.5$  диагонально доминирующую матрицу  $F$  и с точки зрения минимума (5) (независимо от величин  $m_i$  точечных масс) гарантированно не будет приводить к наихудшему варианту. В соответствии с обсуждаемым подходом, удастся также установить следующее неравенство для величин  $d_i$ :

$$R^* \leq d_i < R_B, \quad (8)$$

где  $R_B$  — радиус сферы Бьерхаммара,  $R^*$  — радиус сферы, вычисляемый для равноотстоящих  $N$  точечных масс на основании замкнутого выражения для скалярного произведения  $F_{ij}^q = (r_i^{-1}, r_j^{-1})_{H_2^q}$ .

Таким образом, проведенные исследования [6—9] позволяют, с одной стороны использовать для повышения устойчивости при аппроксимации (2)—(5) неравенство (8) и искать распределение точечных масс в сферическом слое, ограниченном радиусами  $R_B$  и  $R^*$ , «толщина» которого согласована с условиями гладкости, накладываемыми на решение, а с другой стороны — выбирать в качестве начального приближения для величин  $d_i$  значение радиуса  $R_0$  ( $R^* < R_0 < R_B$ ) (рассчитанное в соответствии с алгоритмом [9] для равноотстоящих точечных масс) оптимальное с точки зрения величины нормы (5).

Следует отметить, что хорошо зарекомендовавший себя на практике подход фиксации плановых координат ( $\phi_i$ ,  $\lambda_i$ ) точечных масс под

экстремумами изучаемого поля (например,  $\Delta g$ ), а при реализации последовательного добавления масс [3, 16, 17] — под экстремумами остаточного поля, также основан на дополнительном изучении качественной картины этого поля. При этом в основу положено «подобие» в отдельных регионах аппроксимируемой и аппроксимирующей функции и строгие математические соотношения, выражающие, фактически, следующий известный факт: поле силы притяжения отдельной точечной массы в ее «эпицентре» имеет максимальное значение, кроме того, оно тем меньше, чем глубже она расположена. А по мере роста глубины точечной массы ее поле притяжения все больше приближается к однородному. Последнее, кстати, и накладывает определенные условия на  $d_i$  и величины  $m_i$  точечных масс, так как в целом для практики оказываются особенно ценными их локальные свойства в силу достаточно сложной структуры гравитационного поля Земли. Более подробно математические аспекты обсуждаемого вопроса рассмотрены в [17] с точки зрения аппроксимации исследуемого поля при последовательном увеличении числа точечных масс.

**Вариационный алгоритм построения моделей точечных масс.** Таким образом, если воспользоваться введенными выше линейными ограничениями (7), (8), то задачу минимизации (2) с условиями (7), (8) можно рассматривать как задачу нелинейного программирования, для решения которой используется метод регуляризации со стабилизатором в виде (5).

Для построения удобного алгоритма минимизации (2) желательно выбрать один из способов с высокой скоростью сходимости, например — метод Ньютона. Тем более, что итеративная регуляризация способа Ньютона для выпуклых задач [2] при обычных ограничениях гарантирует сходимость метода при любом выборе начального приближения. Поэтому в соответствии с рекомендациями [12] можно воспользоваться следующим устойчивым итерационным процессом:

$$X_{k+1} = X_k - [G^T(X_k)G(X_k) + \beta_k B]^{-1} G^T(X_k)[W(X_k) - L] \quad (9)$$

для поиска точки минимума (2). В (9)  $X_k$  — некоторое  $k$ -ое приближение ( $4N$ -мерный вектор) уточняемых параметров ( $m_i, d_i, \varphi_i, \lambda_i$ );  $G$  — матрица ( $n \times 4N$ ) производных, вычисленных в точках  $j$  от функций  $\omega_{ji}$  (3) по параметрам,  $m_i, d_i, \varphi_i, \lambda_i$ ;  $\beta_k$  — параметр, подобный [12] параметру регуляризации;  $B$  — линейный самосопряженный положительно определенный оператор, который на практике аппроксимируется некоторой конечномерной матрицей  $\tilde{B}$ .

Тем не менее, вместо алгоритма (9), очевидно, более эффективно (по крайней мере с точки зрения экономии памяти ЭВМ для хранения матриц  $G$  и  $W$  и размерности обрабатываемых матриц) построить итерационный процесс типа Гаусса — Зейделя для раздельного последовательного уточнения параметров  $m_i, d_i, \varphi_i, \lambda_i$  с регуляризацией (9) на каждом шаге. Тем более, что в нашем случае уточнение масс  $m_i$  с условиями (7) приводит [8] к решению системы линейных уравнений и определению величин  $m_i$  из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} M &= Q [W^T C_{nn}^{-1} L - S^T (SQS^T)^{-1} (SQW^T C_{nn}^{-1} L - P)], \\ Q &= (W^T C_{nn}^{-1} W + \alpha F)^{-1}, \quad \alpha = \beta_k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Уточнение  $\varphi_i$  и  $\lambda_i$  не связано в такой постановке с ограничениями, и лишь уточнению  $d_i$  сопутствует система (8) условий в виде линейных неравенств. Естественно, что алгоритмически более выгодно учитывать эти две группы ограничений раздельно. Теперь мы можем сформулировать, с учетом сделанных выше замечаний, алгоритм последовательного построения модели точечных масс с регуляризацией по А. Н. Тихонову, который удобно изложить в виде ряда этапов.

1. Выбор начального приближения для координат  $N$  точечных масс (фиксация  $N$  базисных функций для аппроксимации (2)). Здесь могут иметь место различные подходы [10, 16, 17]. В данном исследовании изучались две возможности:

а) фиксация плановых координат  $\varphi_i, \lambda_i$  в соответствии с особенностями аномального поля и с учетом ошибок исходных данных; вычисление расстояний  $d_i=R_0$  с помощью алгоритма [9] для неравноотстоящих точечных масс, лежащих на сфере радиуса  $R_0>R^*$  (значение  $R^*$  вычисляется для  $N$  равноудаленных масс);

**Некоторые характеристики построенных моделей сопряженных точечных масс**

Исходная информация в виде набора гармоник		Характеристики полученных моделей точечных масс							Размеры стандартной трапеции, соответствующей масштабу усечения
		Название модели	Количество точечных масс			Точность описания $\sigma_N$ высот геоида, м		Среднее значение $D$ расстояний до точечных масс*	
Название модели	Порядок и степень усечения		(четная) $N_1$	(нечетная) $N_2$	(общая) $N_1+N_2$	Усеченного набора гармоник	Полного набора гармоник		
<i>GEM-9</i>	(8×8)	<i>M2A</i>	23	25	48	1.8	5.1	0.76	22.5°×22.5°
<i>GEM-9</i>	(12×12)	<i>M3A</i>	29	28	57	1.9	3.1	0.77	15°×15°
<i>GEM-9</i>	(29×12)	<i>M3B</i>	30	31	61	1.9	3.0	0.78	15°×15°
<i>GEM-9</i>	(29×16)	<i>M3C</i>	33	38	71	1.9	2.4	0.79	11.2°×11.2°
<i>GEM-9</i>	(29×20)	<i>M4A</i>	40	43	83	2.0	2.0	0.80	9°×9°
<i>GEM-L2</i>	(29×20)	<i>ML4A</i>	42	43	85	2.0	2.0	0.81	9°×9°
<i>GEM-10B</i>	(24×24)	<i>M5</i>	50	53	103	1.9	2.3	0.82	7.5°×7.5°
<i>GEM-10B</i>	(28×28)	<i>M6</i>	55	55	110	2.0	2.2	0.83	6.4°×6.4°
<i>GEM-10B</i>	(32×32)	<i>M7</i>	59	65	124	1.9	2.1	0.84	5.6°×5.6°
<i>GEM-10B</i>	(36×36)	<i>M8</i>	60	68	128	2.0	2.0	0.845	5°×5°

\* В единицах большой полуоси земного эллипсоида

б) использование в качестве начального приближения координат  $(d_i, \varphi_i, \lambda_i)$  точечных масс уже построенной модели, описывающей наиболее уверенно определяемую часть геопотенциала, соответствующую разложению по сферическим функциям до 8-го — 12-го порядка и степени.

2. На основании выбранных координат  $N$  масс, находятся их величины  $m_i$  в соответствии с алгоритмом (10), обеспечивающим минимум (2) при ограничениях (7) в линейной постановке.

3. Уточнение  $d_i, \varphi_i, \lambda_i$  выполняется, далее, отдельно в три шага на каждой итерации с помощью процесса (9). При этом, в (9) в качестве вектора  $X$  последовательно подразумеваются наборы из  $N$  уточняемых параметров  $d_i, \varphi_i, \lambda_i$ , матрица имеет теперь на каждом шаге размерность  $(N \times N)$  и состоит, соответственно, из производных от  $\omega_{ij}$  по  $d_i$  или  $\varphi_i$ , или  $\lambda_i$ ; в качестве матрицы  $\tilde{B}$ , аппроксимирующей оператор  $B$ , оказывается целесообразным принять матрицу  $(N \times N)$ , состоящую из элементов  $(m_i m_j F_{ij}^q)$  при  $\beta_k = 1$ .

Кроме того, на шаге уточнения  $d_i$  необходима проверка условий (8). Это может быть достигнуто при выполнении следующих соотношений:

$$d_i^{(k+1)} = \begin{cases} d_i^{(k+1)} & \text{если (8) — выполняется,} \\ d_i^{(k)} & \text{если (8) — не выполняется,} \end{cases} \quad (11)$$

что вполне обосновано, если на каждом шаге такого итеративного процесса выполняются условия монотонности. В нашей ситуации это означает последовательное уменьшение стандарта  $\sigma_N$  аппроксимации после уточнения параметров каждого вида:  $m_i, d_i, \varphi_i, \lambda_i$ .

4. Если улучшения стандарта после какого-либо шага уже не происходит, то возвращаемся к параметрам, полученным на предыдущей итерации и заканчиваем процесс для конкретного  $N$  на шаге уточнения величин  $m_i$  точечных масс; тем самым всегда обеспечивается выполнение (7), (8), а сам процесс будет «работать» только на увеличение точности  $\sigma_N$  аппроксимации.

5. Если  $\sigma_N > \sigma$  — требуемой точности описания поля, то выполняется добавление одной точечной массы в месте наибольшего по модулю остаточного отклонения с фиксацией координат  $\varphi_{N+1}$ ,  $\lambda_{N+1}$ ,  $d_{N+1}$  согласно пункту 1а). Принимаем  $N = N + 1$  и повторяем описанный итерационный процесс в соответствии с пунктами 2, 3, 4 до тех пор, пока  $\sigma_N \leq \sigma$ . Таким образом, каждая итерация включает в себя четыре шага (по числу типов уточняемых параметров), а сам процесс заканчивается всегда после уточнения величин масс  $m_i$ .

**Аппроксимация геопотенциала системой сопряженных точечных масс. Полученные результаты.** Как и в более ранних работах (см. [3, 10]) поле моделировалось не традиционной системой (1) функций, а «двойными» или «сопряженными» [10] точечными массами, фактически наборами четных и нечетных гармонических функций, ортогональных в  $H_2^2$  [7], что не имеет места для системы (1). Такой подход является следствием учета центральной симметрии области определения функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара (используемых для аппроксимации  $T$ ).

В качестве исходной информации использовались четная и нечетная составляющие как аномалий силы тяжести, так и высот геоида, вычисленные в центрах стандартных трапеций  $5^\circ \times 5^\circ$  на основании моделей гармоник *GEM-9*, *GEM-10B*, *GEM-L2*. Аппроксимацию (за счет свойства симметрии) достаточно выполнять для четной и нечетной составляющей в отдельности, причем не во всем внешнем полупространстве, а на земной полусфере ( $R = 6371$  км).

Для проверки алгоритма выбиралась на основании перечисленных наборов гармоник разная по степени сглаженности исходная информация за счет усечения моделей гармоник до разных порядков. Точностные характеристики полученных моделей точечных масс иллюстрируются таблицей. В результате можно сделать следующие выводы.

1. Использование ядра ЧНВ-2, хорошо согласованного со спектром степенных дисперсий  $c_n$  и общей дисперсии  $5^\circ$  поля аномалий силы тяжести позволило параметр регуляризации принимать равным 1.

2. Существенной на практике оказалась проверка условия монотонности на каждом шаге итерационного процесса. Это обеспечило всегда устойчивое построение минимизирующей последовательности  $\{T_N\}$ .

3. За счет использования метода регуляризации со стабилизатором ЧНВ-2 удается значительно улучшить спектр степенных дисперсий  $c_n$  многоточечных моделей, даже если в качестве исходных используются данные не об аномалиях силы тяжести, а о высотах геоида (т. е. информация не о производной потенциала, а фактически о самой функции  $T$ ). Отметим, что существенное улучшение согласования, очевидно, не имеет смысла из-за возможной потери гладкости решения, поскольку каждому конечному набору точечных масс соответствует бесконечное число степенных дисперсий, а каждый набор гармоник характерен конечным их числом.

4. Самостоятельное значение имеют приведенные в таблице (без учета масс, описывающих нормальное поле) средние значения  $D$  относительных расстояний  $d_i$  до точечных масс, которые связаны с гладкостью аппроксимируемого поля: чем больше величина дисперсии аномального поля, тем больше значение  $D$  (чем больше размеры эквивалентной равновеликой трапеции, по которой выполняется осреднение информации о геопотенциале, тем больше глубина расположения точечных масс).

Разработанный алгоритм применялся также при использовании наблюдательной информации о высотах геоида, полученных Раппом [21] из данных спутниковой альтиметрии GEOS-3 и осредненных по равновеликим трапециям  $5^\circ \times 5^\circ$ . Предварительно было выполнено сравнение исходного набора высот геоида с таковыми, рассчитанными по модели гармоник *GEM-10B* и приведенными в [22], построенном на основании спутниковой альтиметрии SEASAT. В результате анализа «отбраковано» 118 трапеций, в основном, либо попадающих, либо близлежащих

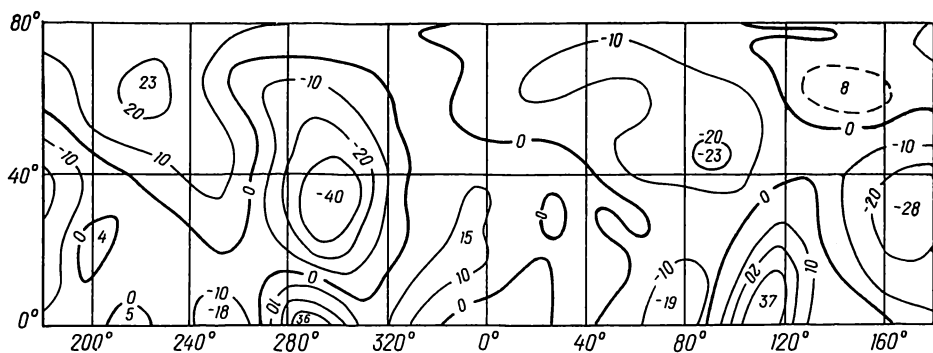


Рис. 2. Четная составляющая высот геоида (в метрах) относительно сфероида модели сопряженных точечных масс нормального поля [5, 6]

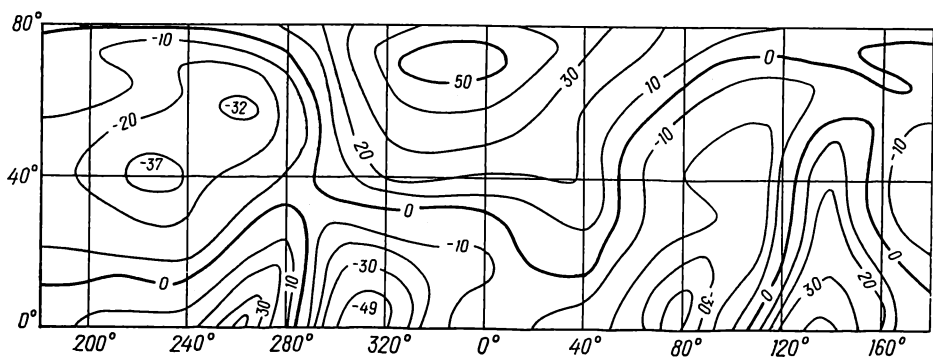


Рис. 3. Нечетная составляющая высот геоида (в метрах)

к переходной зоне материк — океан. Оставшиеся 839 осредненных значений высот геоида дополнены для полного покрытия таковыми, вычисленными по данным решения *GEM-10B*, до общего числа 1654 равновеликих трапеций  $5^\circ \times 5^\circ$ .

Для получения четной  $N^{ev}$  и нечетной  $N^{od}$  составляющих высот геоида  $N$  (относительно центра масс планеты) было выполнено методом средней квадратичной коллокации перепрогнозирование значений  $N$  в новую разграфку: каждой трапеции  $5^\circ \times 5^\circ$  соответствовала строго антиподная трапеция. Ковариационная функция высот геоида вычислялась на основании глобальной модели ЧНВ-2 [7] и несколько видоизмененной программы COVA [23]. Оказалось достаточным выполнить перепрогнозирование лишь для  $\sim 60\%$  (из 1654) значений высот геоида. Остальные (сумма которых в широтном поясе равна четному числу) имеют антиподные трапеции. После такой процедуры вычислялись величины  $N^{ev}$ ,  $N^{od}$  по формуле

$$\left. \begin{aligned} N^{ev}(\varphi, \lambda) \\ N^{od}(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} [N(\varphi, \lambda) \pm N(180^\circ - \varphi, 180^\circ + \lambda)] \quad (12)$$

( $\varphi, \lambda$  — полярные координаты центров трапеций).



Полученные по 827 значениям наборы четной и нечетной составляющих  $N^{ev}$ ,  $N^{od}$  (рис. 2, 3) использовались для построения модели сопряженных масс. В качестве начального приближения была взята модель M8 (см. таблицу). После аппроксимации получено решение LPM-1A (*Lvov Point Model*), представляющее собой набор 135 сопряженных точечных масс ( $N_1=60$ ,  $N_2=75$ ). Среднее квадратичное значение остаточных для сборного набора (Рапп, 1979+GEM-10B) 1654 осредненных значений высот геоида составляет величину  $\sim 1.8$  м. Во 2-й части работы будут обсуждены результаты использования моделей ML4A и LPM-1A при вычислении орбит «Lageos» и «Starlette».

1. Алексидзе М. А. Об одном представлении аномального гравитационного поля. — Докл. АН СССР, 1966, 170, с. 828—830.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.—400 с.
3. Марченко А. Н. Модель точечных масс глобального гравитационного поля Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32, с. 81—89.
4. Марченко А. Н. О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3, с. 51—57.
5. Марченко А. Н. Вариант простейшей модели гравитационного поля Земли. — В кн.: Междунар. конф. ИНТЕРКОСМОС. «Использование наблюдений ИСЗ для геодезии и геофизики»: Тез. докл. М., 1982, с. 32—33.
6. Марченко А. Н. О построении модели точечных масс геопотенциала по результатам спутниковых наблюдений. — Киев, 1983. — 22 с. — (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 292 Ук-Д83).
7. Марченко А. Н. Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля. — Киев, 1983. — 43 с. — (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 293 Ук-Д83).
8. Марченко А. Н. Об использовании фундаментальных решений уравнения Лапласа для определения гравитационного поля и фигуры Земли. — В кн.: Proc. Intern. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other planets. Prague, 1983, p. 317—328. (Monogr. Ser. VUGTK).
9. Марченко А. Н. О выборе стабилизатора для устойчивой аппроксимации потенциала рядом фундаментальных решений уравнений Лапласа. — Ibid., p. 225—237.
10. Мецержков Г. А., Марченко А. Н. О многоточечных моделях геопотенциала. — В кн.: Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. Киев: Наук. думка, 1982, с. 121—131.
11. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979.—200 с.
12. Старостенко В. И., Оганесян С. М. Методы регуляризации и оптимизации в гравиметрии. — В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. Киев: Наук. думка, 1983, с. 87—108.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.—285 с.
14. Цюпак И. М. Об использовании метода вариаций при дифференциальном уточнении орбит ИСЗ. — Киев, 1984.—15 с. — (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 659 Ук-Д84).
15. Яцкив Я. С. Международный проект МЕРИТ. — Киев, 1980.—43 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики; ИТФ-81-124Р).
16. Balmino G. La representation du potentiel terrestre par masses ponctuelles. — Bull. Geod., 1972, N 111, p. 85—108.
17. Barthelmes F., Kautzleben H. A new method of modelling the gravity field of the Earth by point masses. — Hamburg, 1983.—18 p.— (Pap. Present General Assembly IAG: Symp. C).
18. Krarup T. A. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Danish Geod. Inst. Publ., 1969, N 44, p. 1—80.
19. Moritz H. Advanced physical geodesy. — S. L.: Wichmann, 1980.—500 p.
20. Project MERIT standards. — Washington, 1983.—85 p.— (Circular / U. S. Naval Observatory; N 167).
21. Rapp R. H. Global anomaly and undulation recovery using GEOS-3 altimeter data. — Columbus, 1979.—49 p.— (Report Dep. Geod. Sci./Ohio State Univ.; N 285).
22. Rapp R. H. Global atlas of sea surface heights based on the adjusted SEASAT altimeter data. — Columbus, 1982.—63 p.— (Report Dep. Geod. Sci./Ohio State Univ.; N 333).
23. Tscherning C. C., Rapp R. H. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of vertical implied by anomaly degree variance models. — Columbus, 1974.—89 p.— (Report Dep. Geod. Sci./Ohio State Univ.; N 208).