

УДК 523.9—355—17

## Приближенный метод исключения аппаратной функции из наблюдаемых линий солнечного спектра

С. И. Ганджа

Предложен приближенный метод исключения аппаратной функции из наблюдаемых линий солнечного спектра. Для спектральных линий с полуширинами, в два и более раза превосходящими полуширину аппаратной функции, искаженных случайной ошибкой, превышающей 0.1 %, предлагаемый метод восстанавливает истинный контур линии точнее метода Бургера и Ван Ситтерта.

*AN APPROXIMATE METHOD FOR ELIMINATION OF THE APPARATUS FUNCTION FROM THE OBSERVED PROFILES OF SOLAR LINES, by Gandzha S. I.*—An approximate method is suggested for eliminating the apparatus response function from the observed profiles of solar lines. The method permits obtaining the true line profile with a higher accuracy than the Burger and Van Sittert method in the case when the spectral lines have half-widths at least twice as large as the half-width of the apparatus response function.

Задача получения истинных профилей линий солнечного спектра связана с исключением аппаратной функции спектрографа из наблюдаемых спектральных линий. Она относится к классу некорректных обратных задач математики и встречается в тех случаях, когда по известной аппаратной функции и отклику прибора требуется восстановить истинное значение входного сигнала. Большой прогресс в решении и понимании данных задач связан с применением фурье-преобразований, в том числе алгоритма быстрого преобразования Фурье [1, 2]. Тем не менее алгоритм его вычисления достаточно сложен. Поэтому если приближенные методы обеспечивают требуемую точность коррекции входного сигнала, то они с успехом могут конкурировать с методами, основанными на фурье-преобразованиях, так как приближенные методы позволяют обойти трудоемкие вычисления фурье-преобразований, корректное применение которых связано с определенными трудностями.

Простота алгоритма, быстродействие, а также преимущества по сравнению с другими приближенными методами [3, 7] позволили методу Бургера и Ван Ситтерта (методу итерации) стать наиболее распространенным при коррекции линий солнечного спектра [3, 4, 7]. В работе [6] проведено сравнение метода итераций с методом, основанным на фурье-преобразованиях с применением регуляризации. Показано, что спектральные линии, полуширина которых в два и более раза превосходит полуширину аппаратной функции, редуцируются обоими методами одинаковым образом. К недостаткам метода итераций следует отнести быстрое накопление случайных ошибок коррекции в последующих приближениях [3, 5, 6]. Это обстоятельство ограничивает возможность применения данного метода одним-двумя приближениями.

Цель настоящей работы — разработка метода последовательных приближений, при применении которого случайные ошибки в последующих приближениях накапливаются значительно медленнее, чем в методе итераций. Предлагаемый метод сравним по простоте с алгоритмом метода итераций и позволяет в ряде случаев получить более точное изображение наблюдаемых линий солнечного спектра. Для пояснения алгоритма этого метода запишем уравнение свертки

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y) \cdot H(y) dy, \quad (1)$$

где  $G(x)$  и  $F(x)$  — соответственно наблюдаемый и истинный контуры спектральной линии, а аппаратная функция  $H(y)$  нормирована к единице. Задавая необходимую точность интегрирования выбором шага  $\Delta x$ , а также ограничением крыльев контура  $H(y)$ , перепишем уравнение (1) в виде суммы (при  $\Delta x=1$ )

$$G(x) = \sum_{i=-m}^n F(x-i) \cdot H(i), \quad (2)$$

$$\sum_{i=-m}^n H(i) = 1. \quad (3)$$

Здесь  $n$  и  $m$  — число точек соответственно правого и левого крыльев контура  $H(i)$ , а полное число точек

$$N = n + m + 1. \quad (4)$$

В дальнейшем используем следующие обозначения: индекс  $j$  ( $j=1, L$ ) — порядковый номер точек наблюдаемого и истинного контуров. В выражении типа  $F_m^n$  верхний индекс соответствует числу приближений, нижний — числу шагов, выполненных в течение одного приближения. Например,  $F_{L-N+1}^1(L)$  соответствует крайней точке правого крыла истинного контура, полученного на  $(L-N+1)$ -шаге первого приближения.

Опишем алгоритм метода. Постулируемой основой его является коррекция

$$F_1^1(k-i) = F_0^1(k-i) + B_1^1(k) \cdot H(i), \quad i = -m, n. \quad (5)$$

Здесь  $F_0^1(j)$ ,  $j=1, N$ , — предварительно полученные первые  $N$  точек истинного контура (их определение, а также физическое обоснование метода будет рассмотрено нами в дальнейшем);

$$B_1^1(k) = G(k) - G_1^1(k) \quad (6)$$

где

$$G_1^1(k) = \sum_{i=-m}^n F_0^1(k-i) \cdot H(i), \quad k = n+1 \quad (7)$$

Точки  $F_1^1(j)$ ,  $j=1, N$ , лучше соответствуют истинному контуру, чем  $F_0^1(j)$ ,  $j=1, N$  (рис. 1). Для следующей коррекции точек необходимо получить  $G_2^1(k+1)$

$$G_2^1(k+1) = \sum_{i=-m}^n F_1^1(k+1-i) \cdot H(i). \quad (8)$$

В выражении (8) не определена  $F_1^1(N+1)$  — точка истинного контура. Допуская, что функции  $G(x)$ ,  $F_1^1(x)$  меняются плавно, приближенно вычислим точку  $F_1^1(N+1)$  из соотношения

$$F_1^1(N+1) \approx G(N+1) - G(N) + F_1^1(N). \quad (9)$$

Аналогично (6) получим

$$B_2^1(k+1) = G(k+1) - G_2^1(k+1). \quad (10)$$

Уточним точки истинного контура  $F_1^1(j)$ , где  $j=2, N+1$

$$F_2^1(k+1-i) = F_1^1(k+1-i) + B_2^1(k+1) \cdot H(i), \quad i = -m, n. \quad (11)$$

На рис. 1 показаны изменения предварительно полученных точек  $F_0^1(j)$  в результате коррекций (5), (11).

Продолжая начатый цикл, получаем для  $(M+1)$ -го шага алгоритма следующие выражения:

$$G_{M+1}^1(k+M) = \sum_{i=-m}^n F_M^1(k+M-1) \cdot H(i), \quad (12)$$

$$F_M^1(N+M) \approx G(N+M) - G(N+M-1) + F_M^1(N+M-1), \quad (13)$$

$$B_{M+1}^1(k+M) = G(k+M) - G_{M+1}^1(k+M), \quad (14)$$

$$F_{M+1}^1(k+M-i) = F_M^1(k+M-i) + B_{M+1}^1(k+M) \cdot H(i), \quad i = -m, n. \quad (15)$$

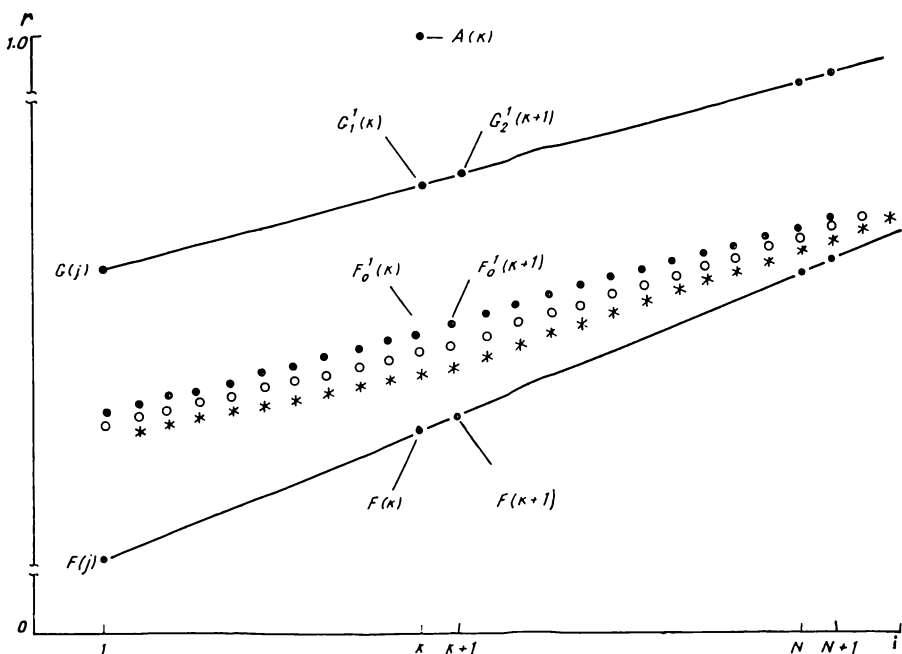


Рис. 1. Изменение точек контура  $F_0^1(j)$ ,  $j = 1, N$ , в течение двух коррекций метода  $F_1^1(j)$ ,  $j = 1, N+1$ ;  $F_2^1(j)$ ,  $j = 2, N+2$  (кружочки и звездочки соответственно).

Найденные значения  $F_1^1(1), F_2^1(2), \dots, F_M^1(M)$ , а также точки  $F_{L-N+1}^1(j)$ , где  $j = L - N + 1$ ,  $L$ , — первое приближение метода. Эти точки можно использовать в следующем приближении вместо выражения (13). Получим первые  $N$  точек истинного контура

$$F_0^1(j) = G(j) - A(k), \quad j = 1, N. \quad (16)$$

Здесь  $A(k)$  вычисляется методом итераций

$$A(k) = \sum_{i=-m}^n G(k-i) \cdot H(i) - G(k). \quad (17)$$

Точка  $F_1^1(k)$  получена первым приближением метода итераций и достаточно близко подходит к истинному значению  $F(k)$ . Положения ближайших к ней точек определены почти столь же точно. По мере удаления в обе стороны от  $F_1^1(k)$  ошибка вычисления возрастает, а влияние этих ошибок на формирование  $G_1^1(k)$  уменьшается. Параллельный перенос первых  $N$  точек контура  $G(x)$  на величину  $A(k)$  показан на рис. 1. В дальнейших приближениях для определения первых  $N$  точек истинного контура целесообразно использовать первые  $N$  точек предыдущего приближения.

Следует отметить, что величина  $B_1^1(k) \equiv 0$  в выражении (6), но  $B(j)$  ( $j > k$ ) в общем случае не равны 0.

Рассмотрим физические предпосылки метода. Если нам известны  $N$  точек  $J$ -го приближения истинного контура  $F_I^J(j)$ ,  $j=I, I+N-1$ , где  $1 \leq I \leq L-N+1$ , то уточнить положения точек истинного контура в рассматриваемом методе, как и в методе итераций, позволяет соотношение

$$B_I^J(I+k-1) \approx F(I+k-1) - F_I^J(I+k-1). \quad (18)$$

Здесь  $B_I^J(I+k-1)$  вычисляются аналогично (6), (7). Обоснование соотношения (18) подробно описано в работе [3]. Основное отличие предлагаемого метода от метода итераций заключается в том, что величина  $B_I^J(I+k-1)$  в методе итераций исправляет только одну точку истинного контура

$$F_I^{J+1}(I+k-1) = F_I^J(I+k-1) + B_I^J(I+k-1). \quad (19)$$

В предлагаемом нами методе величиной  $B_I^J(I+k-1)$  исправляется одновременно  $N$  точек истинного контура (5), (11), (15). Суммарная же коррекция этих точек будет:

$$\sum_{i=-m}^n B_I^J(I+k-1) \cdot H(i) = B_I^J(I+k-1). \quad (20)$$

Другое отличие предлагаемого метода от метода итераций заключается в следующем. В методе итераций точки истинного контура вычисляются независимо в течение одного приближения. В предлагаемом методе на положение каждой определяемой точки оказывают влияние другие точки этого приближения в пределах действия аппаратной функции, так как точки истинного контура вычисляются и уточняются в течение одного приближения. Следовательно,  $F_I^J(j)$ ,  $j=N, L-N+1$ , исправляются в течение одного приближения не одним значением  $B_I^J(I+k-1)$ , как в методе итераций, а в общем случае  $N$  раз.

Множественная коррекция каждой точки в течение одного приближения является основной причиной сдерживания роста случайных ошибок точек истинного контура в последующих приближениях. В дальнейшем предлагаемый нами метод будем называть методом коррекций.

В подтверждение сделанных выводов рассмотрим порядок проведения и результаты численного эксперимента.

Контур  $F(x)$  и  $H(y)$  задавались доплеровскими. Сверткой этих контуров определялся контур  $G(x)$ . Полученный наблюдаемый контур суммировался с шумом, имитирующим случайную ошибку. Смоделированный экспериментальный контур  $G(j)$  исправлялся методом коррекций и итераций.

Для сравнения точности редукции методов вычислялись следующие

$$\text{ошибки: } A = \sum_{i=1}^M (F(i) - F'(i)), \quad D = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{(F(i) - F'(i))^2}{M-1}} \quad \text{и} \quad K = \sum_{i=1}^M \frac{|F(i) - F'(i)|}{M}.$$

Здесь  $M$  — число точек вычисленного контура  $F'(i)$ ;

$A$  — характеризует ошибку в эквивалентной ширине контура;  $D$  и  $K$  — соответственно средняя квадратичная и средняя арифметическая ошибки. Первая серия вычислений проделана с полуширинами контуров  $F(x)$  и  $H(y)$ , равными соответственно 17.5 и 11.7  $m\text{Å}$  (контур  $F(x)$  рассчитывался эмиссионным).

Рис. 2, а, б иллюстрирует сходимость метода коррекций и итераций. Исходное приближение представляет случайную (входную) ошибку ( $A$ ,  $D$  и  $K$ ), вносимую шумом, в данном случае равную нулю. Сходи-

мость метода итераций более высокая — ошибки  $D$  и  $K$  третьего приближения метода итераций соответствуют ошибкам шестого приближения метода коррекций. Седьмым и двадцатым приближениями метода итераций и коррекций можно ограничиться, так как  $D \leq 0.1\%$ . Линейный рост ошибки  $A$  (рис. 2 б), по-видимому, связан с восьмизначной точностью прделанных вычислений.

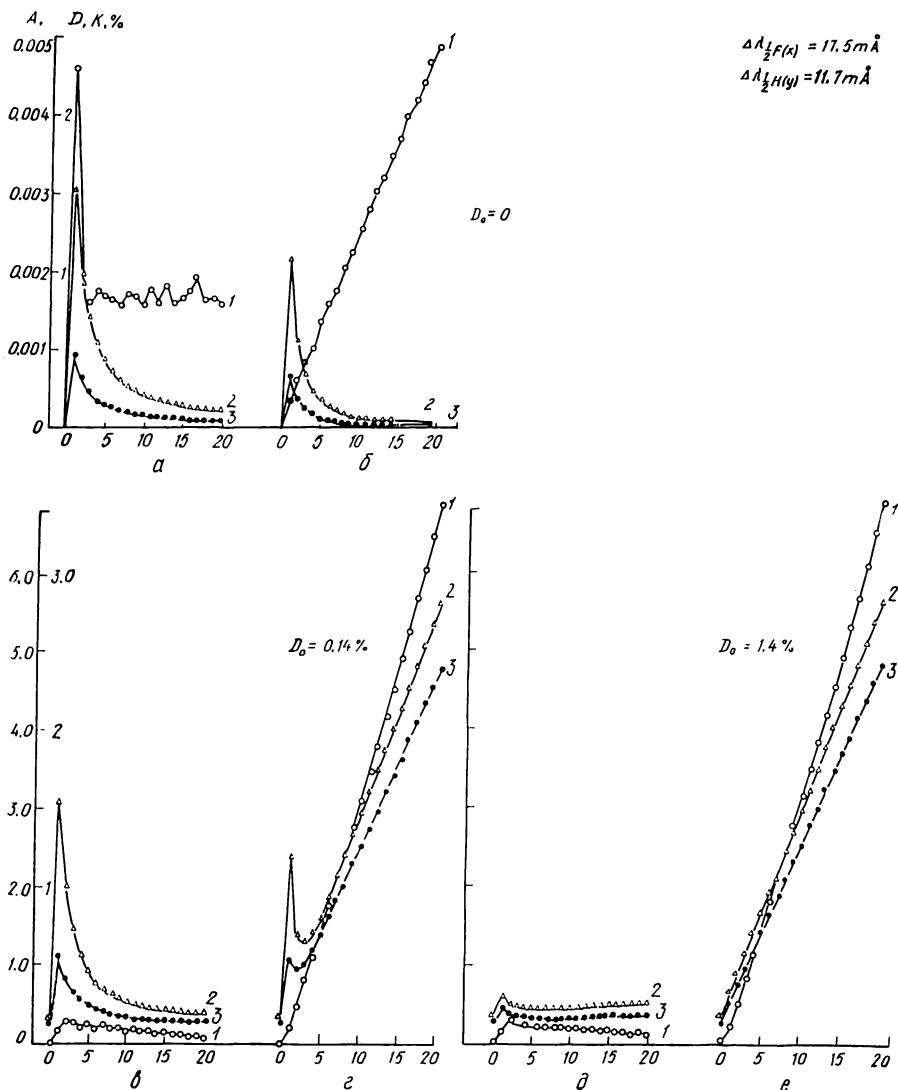


Рис. 2. Сходимость методов коррекций и итераций. (По оси абсцисс отложено число приближений метода коррекций (а, в, г) и итераций (б, г, е), по оси ординат — ошибки  $A$  (1),  $D$  (2),  $K$  (3).

Положение существенным образом изменится, если принять во внимание случайную ошибку эксперимента. Величина входной ошибки (рис. 2 в, г)  $D_0 = 0.14\%$  не превышает ошибку фотоэлектрических наблюдений. Быстрое накопление случайной ошибки в методе итераций приводит к линейному росту всех ошибок, начиная с четвертого приближения. В то же время двадцать приближений метода коррекций не приводят к сильному «разгону» случайной ошибки и позволяют удовлетворительно восстановить истинный контур (рис. 3 а). Отношение ошибок двадцатого приближения метода коррекций к входным ошибкам следующее:  $D_{20}/D_0 \approx 1.36$ ,  $K_{20}/K_0 \approx 1.23$ . Аналогичные отношения в

методе итераций составляют:  $D_7'/D_0 \approx 7.71$ ,  $K_7'/K_0 \approx 7.75$ . В дальнейших обозначениях  $A'$ ,  $D'$  и  $K'$  — ошибки метода итераций.

Третье приближение метода итераций, имеющее минимальные ошибки:  $D_3'/D_0 \approx 4.57$ ,  $K_3'/K_0 \approx 4.17$ , не позволяет с нужной точностью восстановить ядро контура (рис. 3а).

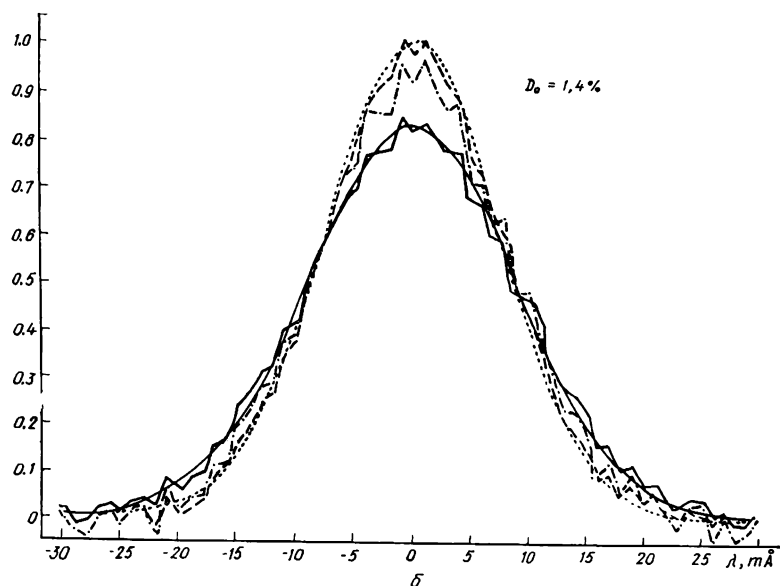
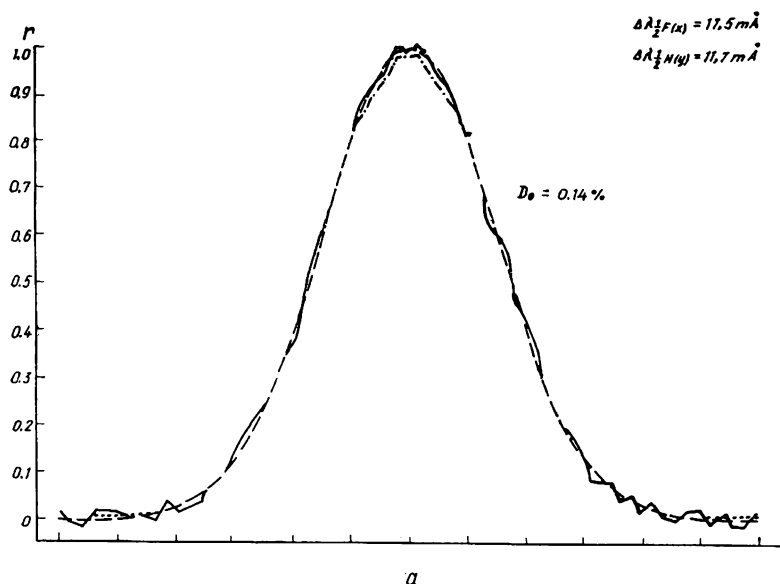


Рис. 3. Доплеровские профили  $F(\lambda)$  (точечные кривые) и  $G(\lambda)$  (б — сплошная кривая); наблюдаемый  $G(\lambda)$  (б — ломаная кривая) и седьмое приближение метода итераций  $F^7(\lambda)$  (а — ломаная кривая); двадцатое приближение метода коррекций (штриховые кривые); первое и третье приближения метода итераций  $F^1(\lambda)$  (б) и ядро  $F^3(\lambda)$  (а) (штрихпунктирные кривые)

На рис. 2 д, е показана сходимость рассматриваемых методов с ошибкой  $D_0 = 1.4\%$ , отвечающей фотометрическим измерениям. Ошибки  $A'_1$ ,  $D'_1$ ,  $K'_1$  первого приближения метода итераций больше таковых для двадцатого приближения метода коррекций (рис. 3 б):  $D_{20}/D_0 \approx 1.21$ ,  $K_{20}/K_0 \approx 1.16$ . Здесь показаны сплошной линией доплеровский и наблюдаемый («ис-

порченный шумом») контуры  $G(x)$ . Подобные результаты дают и другие вычисления, не приводимые в данной работе.

Дальнейшая проверка метода проводилась с полуширинами смоделированных линий и аппаратной функции, близких к реальным условиям наблюдений солнечного спектра. Контуры  $F(x)$  и  $H(y)$ , как и

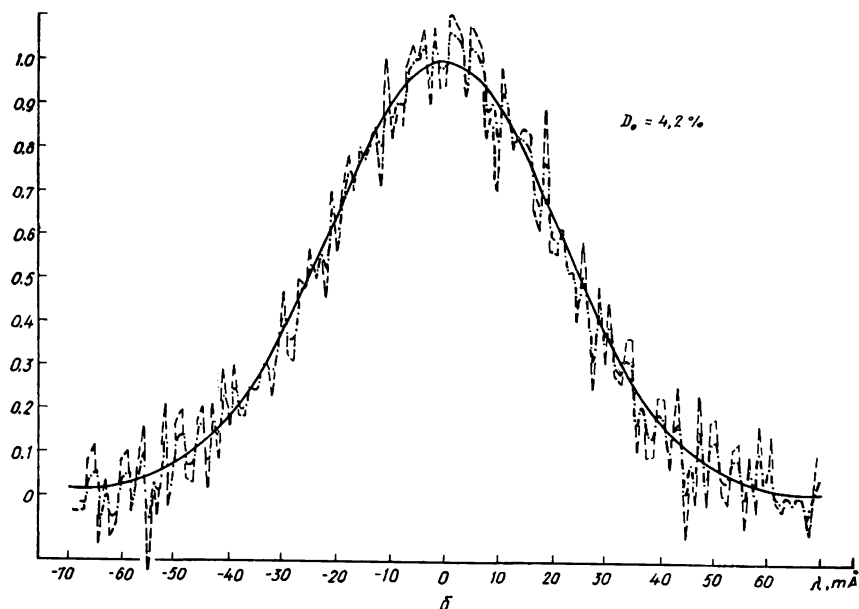
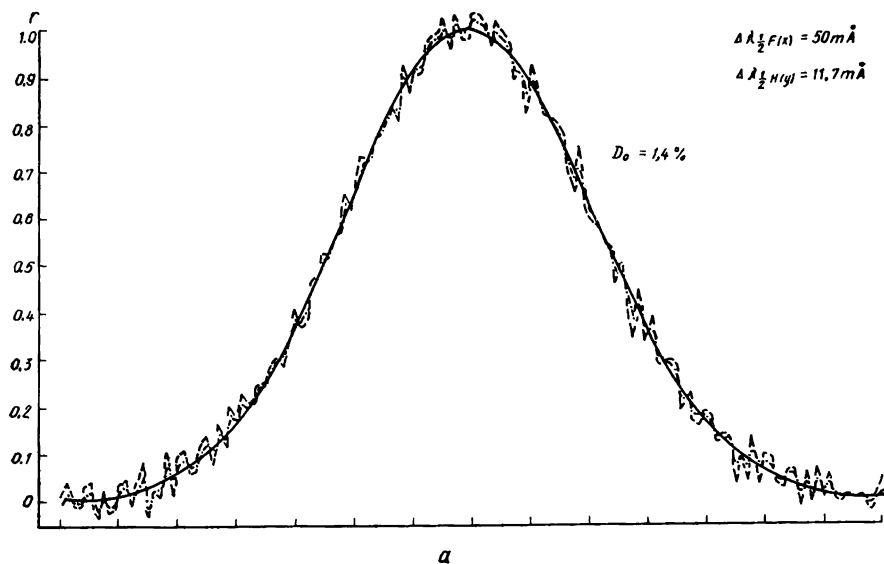
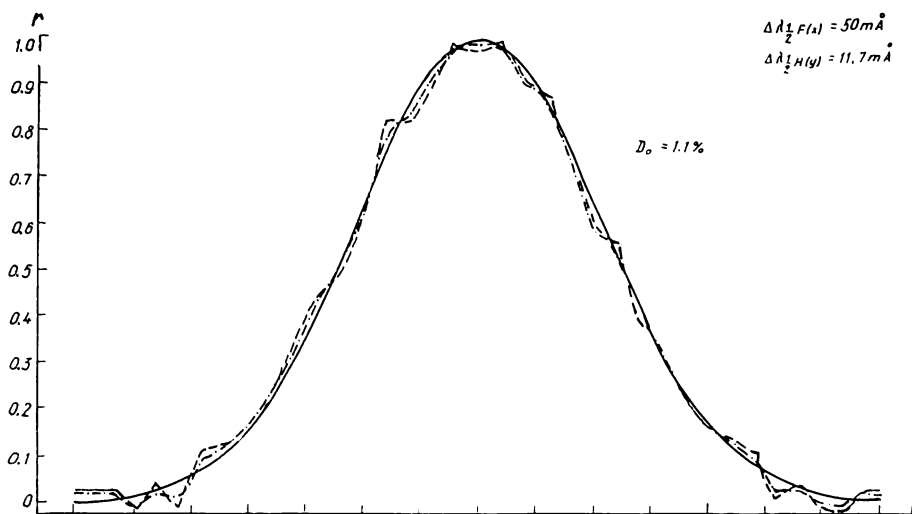


Рис. 4. Доплеровский профиль  $F(\lambda)$  (сплошные кривые); первое приближение метода итераций  $F^1(\lambda)$  (пунктирные кривые); метода коррекций  $F^1(\lambda)$  (штрихпунктирные кривые)

раньше, принимались доплеровскими, где полуширина  $F(x)$ , в отличие от первого случая, равна  $50 \text{ mÅ}$ . Истинный контур восстанавливается обоими методами в течение одного-двух приближений, поэтому рисунок, подобный рис. 2, мы не приводим. Сравнение первых приближений метода коррекций и итераций с ошибками, отражающими фотометрические наблюдения, показано на рис. 4 а, б. Отношение ошибок  $D$  первого

приближения методов будет:  $D_1'/D_1 \approx 1.9$ . Аналогичный результат дает входная ошибка 0.14 %.

С целью изучения редукции метода с различными шумами дальнейшие вычисления мы проводили с более низкочастотным шумом



а

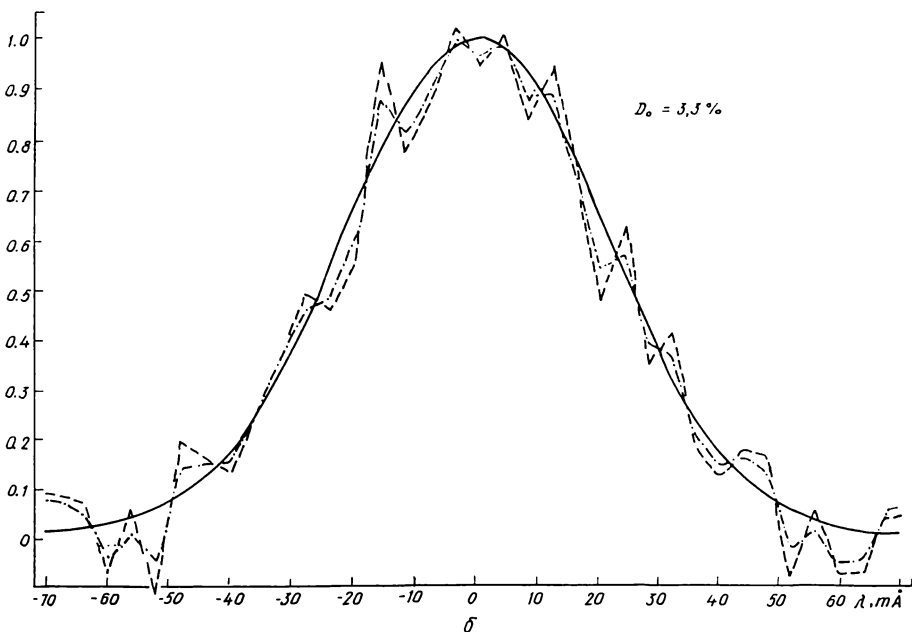


Рис. 5. Доплеровский профиль  $F(\lambda)$  (сплошные кривые); первое приближение  $F^1(\lambda)$  метода итераций (пунктирные кривые); метода коррекций  $F^1(\lambda)$  (штрихпунктирные кривые)

(рис. 5 а, б):  $D_1'/D_1 \approx 1.5$ . Тожественные по абсолютной величине результаты были получены в расчетах с линией поглощения.

К недостаткам метода коррекций можно отнести вносимую им небольшую асимметрию в исправляемый контур. Одна из причин, вызывающих асимметрию, следующая: точки  $F_1^1(k-i)$ , где  $i = -m, n$ , полученные коррекцией (5), вычислены с одинаковой точностью относительно центральной точки  $F_1^1(k)$ . При вычислении  $G_2^1(k+1)$  точки  $F_1^1(j)$



( $j=2, k$ ) получены с меньшими ошибками, чем точки  $F_1^1(j)$  ( $j=k+2, N+1$ ), так как центральные точки коррекций (5) находятся более точно. В итоге больший вклад в величину  $B_2^1(k+1)$  внесут точки  $F_1^1(j)$ , где  $j=k+2, N+1$ . Не обсуждая другие возможные причины возникновения асимметрии, рассмотрим меры, позволяющие частично или полностью ее устранить. К уменьшению асимметрии приводят большее число приближений и небольшое изменение в алгоритме вычислений. Поясним последнее. Если для начала коррекций четных приближений метода использовать другое крыло контуров  $G(x)$  и  $F(x)$ , то четные приближения метода будут обладать достаточной симметрией. Как показали проданные вычисления, симметричные относительно центра точки  $F(x)$ , полученные вторым приближением, совпадают с точностью, превышающей 0.05 %.

Небольшое улучшение в сходимости метода коррекций вносит введение числового множителя  $L$  в выражения, аналогичные (5):

$$F_1^1(k-i) = F_0^1(k-i) + L \cdot B_1^1(k) \cdot H(i), \quad i = -m, n. \quad (21)$$

Увеличение  $L$  приводит к усилению асимметрии, поэтому мы рекомендуем использовать значения  $1 \leq L \leq 3$ . Во всех приводимых вычислениях  $L=2$ .

В заключение отметим основные преимущества метода коррекций. При наличии случайной ошибки  $D \geq 0.1$  % для спектральных линий с полушириной, в два и более раза превосходящей полуширину аппаратной функции, метод коррекций позволяет восстановить истинный контур точнее, чем метод итераций. Выигрыш в точности редукции метода коррекций по сравнению с методом итераций зависит от конкретных условий их применений и возрастает при обработке спектров, искаженных шумом с более высокой «частотой», а также при увеличении числа приближений.

Алгоритм метода, сводящийся к простым арифметическим операциям, немногим сложнее алгоритма вычисления метода итераций.

Предлагаемый метод можно использовать для исправления линий солнечного спектра за инструментальный контур при фотометрических и фотоэлектрических наблюдениях.

Автор выражает признательность Р. И. Костыку за обсуждение результатов и ценные замечания.

1. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М.: Наука, 1975.— 633 с.
2. Грей Д. Наблюдения и анализ звездных фотосфер.— М.: Мир, 1980.— 496 с.
3. Гуртовенко Э. А. Об исправлении профилей спектральных линий за ошибку инструментального контура с помощью цифровой вычислительной машины.— Астрон. журн., 1966, 43, с. 659—669.
4. Печинская Н. И. Получение истинных контуров фраунгоферовых линий солнечного спектра.— Солнеч. данные, 1974, № 10, с. 85—93.
5. Раутиан С. Г. Реальные спектральные приборы.— Успехи физ. наук, 1958, 66, вып. 3, с. 475—517.
6. Саггатов И. О численных методах исправления наблюдаемого профиля спектральных линий за влияние инструмента.— Астрон. журн., 1978, 55, с. 649—659.
7. de Jager C., Neven L. Note on the influence of the apparatus profile on spectral line profiles.— Bull. Astron. Inst. Neth. Suppl. Ser., 1966, 18, p. 306—310.