

УДК 521.9—323.2

Опыт использования ортогональных полиномов для установления связи между измеренными и идеальными координатами

А. Н. Курьянова, Л. Н. Кизюн

Дается краткое описание метода использования ортогональных полиномов для установления зависимости между измеренными и идеальными координатами. Программа, реализующая предложенный алгоритм, проверена на примере обработки астронегатива, снятого с помощью двойного широкоугольного астрографа ГАО АН УССР. Показано, что из анализа коэффициентов при кубических членах полинома можно оценить коэффициент для предварительного учета дисторсии в измеренных координатах.

EXPERIENCE OF USING THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS FOR ESTABLISHING THE RELATION BETWEEN MEASURED AND IDEAL COORDINATES, by Kur'yanova A. N., Kizyun L. N.—The procedure of using the orthogonal polynomials to establish the dependence between measured and ideal coordinates is briefly discussed. The method is applied to reduction of astronomical negatives obtained with the wide-angle astrograph of the Main Astronomical Observatory (Kiev). It is shown that the coefficient for preliminary accounting for the distortion in the measured coordinates may be estimated from the analysis of cubic polynomial terms.

Связь между сферическими координатами (α, δ) звезды на небесной сфере и прямоугольными измеренными координатами (x, y) изображения этой звезды на пластинке в некоторой системе прямоугольных координат Oxy осуществляется через посредство некоторых промежуточных координат (X, Y) изображений звезд на пластинке, так называемых идеальных. Идеальные координаты представляют собой координаты центральных проекций точек небесной сферы на гномоническую плоскость при единичном фокусном расстоянии и выражаются через экваториальные координаты известными формулами [3]. С другой стороны, идеальные координаты могут быть представлены в виде полинома по степеням измеренных координат формулами:

$$X - x = \sum_{n=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} b_{nm} x^n y^m + \zeta, \quad Y - y = \sum_{n=0}^{g'_1} \sum_{m=0}^{g'_2} b'_{nm} x^n y^m + \zeta', \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, g_1$, $m = 0, 1, 2, \dots, g_2$; g_1 и g_2 — наивысшие члены по индексам n и m соответственно, и аналогично: $n = 0, 1, 2, \dots, g'_1$, $m = 0, 1, 2, \dots, g'_2$; ζ, ζ' — остаточные отклонения.

Коэффициенты b_{nm} и b'_{nm} принимаются обычно постоянными на протяжении всей пластинки и носят название постоянных пластинки.

При обработке пластинок, полученных на длиннофокусных астрографах, можно обычно ограничиться линейными членами в выражениях (1) (формулы Тернера):

$$X - x = b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, \quad Y - y = b'_{10}x + b'_{01}y + b'_{00}. \quad (2)$$

Эти формулы отражают несовпадение нуль-пунктов измеренной (x, y) и идеальной (X, Y) систем координат, различие ориентации осей этих систем координат, неравенство масштаба по осям x и y . Линейные члены уравнений вида (1) позволяют учесть дифференциальную рефракцию и дифференциальную абберацию первого порядка.

При обработке снимков, полученных на широкоугольных астрографах, поле которых равно $5^\circ \times 5^\circ$ и более, следует учитывать квадратич-

ные члены, появляющиеся из-за наклона пластинки к оптической оси, так как в таких случаях нет уверенности в точном знании положения оптического центра. Члены второго, а иногда и третьего порядков приходится вычислять для учета дифференциальной рефракции при наблюдениях на больших зенитных расстояниях; члены второго порядка дифференциальной аберрации обычно очень малы и принимаются во внимание в очень редких случаях. Кроме того, реальная фотографическая проекция отличается от идеальной проекции из-за оптических аберраций объектива. При математической обработке учитывают только дисторсионные искажения. Остальные аберрации не поддаются пока аналитическому учету и их влияние стремятся заранее свести к минимуму.

В специальных высококачественных объективах дисторсионные искажения представляют в виде центральносимметричной радиальной дисторсии и тангенциальной, возникающей из-за небольших децентрировок объектива. На практике учитывают только симметричную относительно геометрического центра дисторсию, влияние которой на координаты изображения выражается формулами [4]:

$$\Delta x_c = \Delta r_c \frac{x}{r}, \quad \Delta y_c = \Delta r_c \frac{y}{r}, \quad (3)$$

где Δr_c — изменение радиального расстояния r от оптического центра вследствие дисторсии, равно

$$\Delta r_c = c_0 r + c_1 r^3 + c_2 r^5 + \dots, \quad (4)$$

а x , y — измеренные координаты, приведенные к положению оптического центра.

Подставляя Δr_c из (4) в формулы (3), получаем:

$$\Delta x_c = (c_0 + c_1 r^2 + c_2 r^4 + \dots) x, \quad \Delta y_c = (c_0 + c_1 r^2 + c_2 r^4 + \dots) y. \quad (5)$$

Величины c_i можно определить предварительно из лабораторных исследований. Практика показывает, что для небольших полей величины c_i (начиная с $i=2$) малы и существенной роли не играют. Если влиянием дисторсии нельзя пренебречь, то прежде, чем перейти от измеренных координат к идеальным по формулам (2), нужно исправить измеренные координаты звезд, предварительно приведенные к положению принятого оптического центра снимка, за дисторсию (без учета линейной составляющей)

$$\Delta x_c = c_1 x (x^2 + y^2), \quad \Delta y_c = c_1 y (x^2 + y^2). \quad (6)$$

Здесь Δx_c и Δy_c следует рассматривать как ошибки измеренных координат, если понимать под c_1 коэффициент дисторсии в общепринятом смысле ($c_1 > 0$ для положительной дисторсии и $c_1 < 0$ для отрицательной дисторсии).

Влияние дисторсии сказывается особенно сильно на снимках широкоугольных астрографов, поскольку ее действие принимается пропорциональным кубу расстояния звезды от оптического центра для радиальной дисторсии и квадрату расстояния — для тангенциальной дисторсии. Поэтому при обработке снимков, полученных на широкоугольных астрографах, и установлении зависимости между измеренными и идеальными координатами недостаточно сохранять в формулах (1) лишь члены первого порядка относительно измеренных координат x и y .

Решая по методу наименьших квадратов систему уравнений вида (1), находят оценки постоянных пластинки b_{nm} и b'_{nm} , которые используются для определения координат искомого объекта. Эти оценки можно считать оптимальными лишь в том случае, если задана степень аппроксимирующего полинома или, другими словами, количество членов

разложения в (1). Нами предлагается следующая схема решения этой задачи.

Обозначая для удобства $\xi = X - x$ и $\eta = Y - y$, записываем уравнения (1) в виде:

$$\xi_i = \sum_{n=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} b_{nm} x_i^n y_i^m + \zeta_i, \quad (7a)$$

$$\eta_i = \sum_{n=0}^{g'_1} \sum_{m=0}^{g'_2} b'_{nm} x_i^n y_i^m + \zeta'_i, \quad (7b)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; N — число опорных звезд.

Так как системы уравнений (7a) и (7b) независимы друг от друга, в дальнейшем будем рассматривать решение только уравнений (7a), но все сказанное об этом можно отнести и к уравнениям (7b).

Для удобства изложения, аналогично [2], запишем уравнения (7a) в векторной форме. Пусть \bar{F}_{nm} — вектор, компонентами которого являются значения функции $x^n y^m$ в N точках; $\bar{\xi}$ — вектор, компонентами которого являются значения ξ_i ; $\bar{\zeta}$ — вектор с компонентами ζ_i . Тогда

$$\bar{\xi} = \sum_{n=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} b_{nm} \bar{F}_{nm} + \bar{\zeta}. \quad (8)$$

От разложения вида (8) целесообразно перейти к разложению

$$\bar{\xi} = \sum_{n=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} a_{nm} \bar{\Psi}_{nm} + \bar{\zeta}, \quad (9)$$

в котором векторы $\bar{\Psi}_{nm}$ удовлетворяют соотношению ортогональности $(\bar{\Psi}_{nm} \bar{\Psi}_{kl}) = 0$ для всех $n, m \neq k, l$ и получены из векторов \bar{F}_{nm} с помощью метода ортогонализации Грама-Шмидта [2].

Коэффициенты разложения в ортогональном базисе определяются независимо друг от друга по формуле $\hat{a}_{nm} = \frac{(\bar{\xi} \bar{\Psi}_{nm})}{(\bar{\Psi}_{nm} \bar{\Psi}_{nm})}$.

Средняя квадратичная ошибка a_j , $m(\hat{a}_j) = \frac{\sigma}{\sqrt{(\bar{\Psi}_{nm} \bar{\Psi}_{nm})}}$, где σ — средняя квадратичная ошибка ξ_i .

По методике, описанной в [2], можно перейти от \hat{a}_{nm} к коэффициентам разложения в неортогональном базисе \hat{b}_{nm} и вычислить их средние квадратичные ошибки $\sigma(\hat{b}_{nm})$.

Для проверки значимости коэффициентов ортогонального разложения использовался v^2 -критерий, основанный на сравнении двух независимых оценок дисперсии $S_2^2(N - r')$ и $S_1^2(1)$ [2]. Эти оценки вычислялись последовательно на каждом шаге по формулам:

$$S_2^2(N - r') = \frac{1}{N - r'} \left(\bar{\xi}^2 - \sum_{j=0}^{g-1} \hat{a}_j^2 \bar{\Psi}_j^2 \right), \quad S_1^2(1) = \hat{a}_g^2 \bar{\Psi}_g^2,$$

где j — порядковый номер члена в разложении, $(N - r')$ — число степеней свободы дисперсии S_2^2 , причем r' — количество слагаемых во второй сумме. Кроме того, можно проверить гипотезу о независимости остаточных отклонений $\hat{\zeta}_i = \xi_i - \sum_{n=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} \hat{b}_{nm} x_i^n y_i^m$ (γ -критерий). В работе [1] показано, что

если $\left| \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^T \frac{B(\tau)}{B(0)} \right| < -\frac{g+1}{N} + \frac{\beta_{\mu}}{\sqrt{TN}}$, то можно принять гипотезу о независимости уклонений и, следовательно, о правильном выборе числа членов разложения, равном $(g+1)$.

Здесь $B(\tau)$ — оценки ковариационных функций, вычисленные в радиальном и азимутальном направлениях со сдвигом $\tau=0, 1, 2, \dots, T$,

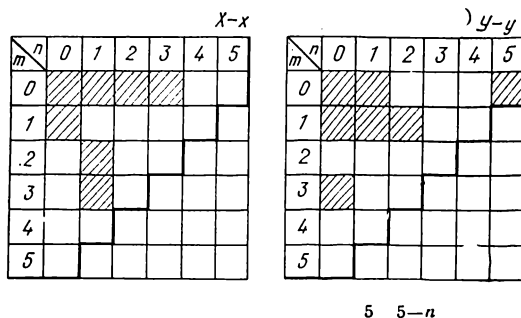


Рис. 1. Значимые члены полинома $\sum_{n=0}^5 \sum_{m=0}^{5-n} b_{nm} x^n y^m$, представляющего разности идеальных и измеренных координат

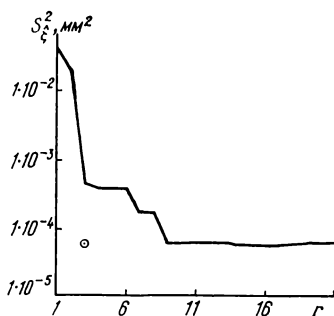
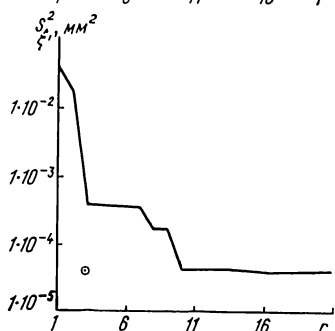


Рис. 2. Изменение дисперсии оценок остаточных уклонений $\hat{\xi}_i$ и $\hat{\zeta}_i$ с увеличением числа членов разложения



$T \ll N$, а N — число точек, участвующих в вычислении ковариационных функций; β_{μ} — μ -процентная точка нормального распределения; $(g+1)$ — количество членов разложения. Мы полагали $T=3$.

Оценки ковариационных функций остаточных уклонений $\hat{\xi}_i$ в радиальном и азимутальном направлениях $[B_{\hat{\xi}}(\tau\Delta r)$ и $B_{\hat{\zeta}}(\tau\Delta A)$ соответственно] вычислялись по методике, описанной в [2]. Предварительно переходим к полярной системе координат, начало которой совпадает с оптическим центром пластинки. Радиус-вектор и азимут i -й звезды в этой системе координат можно вычислить по формулам:

$$r_i^2 = (\Delta\alpha_i \cos \delta_i)^2 + (\Delta\delta_i)^2, \quad A_i = \text{arctg} \frac{\Delta\delta_i}{\Delta\alpha_i \cos \delta_i},$$

где $\Delta\alpha_i = \alpha_i - A$, $\Delta\delta_i = \delta_i - D$ (A, D — сферические координаты оптического центра пластинки).

Пусть Δr — заданный шаг дискретизации по радиусу и ΔA — шаг дискретизации по азимуту. При вычислении $B_{\hat{\xi}}(\tau\Delta r)$ суммируются произведения

остаточных уклонений $\hat{\xi}_i \hat{\xi}_j$ для i -й и j -й звезд, разности азимутов которых $|A_i - A_j| \leq \Delta A$, а разности расстояний от оптического центра $(\tau - 1)\Delta r < |r_i - r_j| \leq \tau\Delta r$. При вычислении $B_{\hat{\zeta}}(\tau\Delta A)$ суммируются произведения

вида $\hat{\xi}_i \hat{\xi}_j$ для звезд с разностью расстояний $|r_i - r_j| \leq \Delta r$ и разностью азимутов $(\tau^* - 1)\Delta A < |A_i - A_j| \leq \tau\Delta A$.

Программа, реализующая предложенный алгоритм, составлена на языке FORTRAN-IV для машины ЕС-1022. Для проверки предложенной методики были использованы результаты измерений астронегатива

№ 1051, полученного С. П. Майором 27/28 июля 1978 г. с помощью двойного астрографа $D=40$ см, $F=2$ м по программе наблюдений малых планет. Поле снимка $8.5^\circ \times 8.5^\circ$. Эмульсия — ORWO ZU-2.

Продолжительность экспозиции — около 4 мин. На площадке $6^\circ 50' \times 6^\circ 50'$ с центром в точке $(20^h 01^m, -4^\circ 57')$ были выбраны 102 звезды $6.7^m - 9.6^m$ различных спектральных классов. Прямоугольные координаты x, y измерялись на машине «Аскорекорд». Тангенциальные координаты вычислялись по данным каталога SAO.

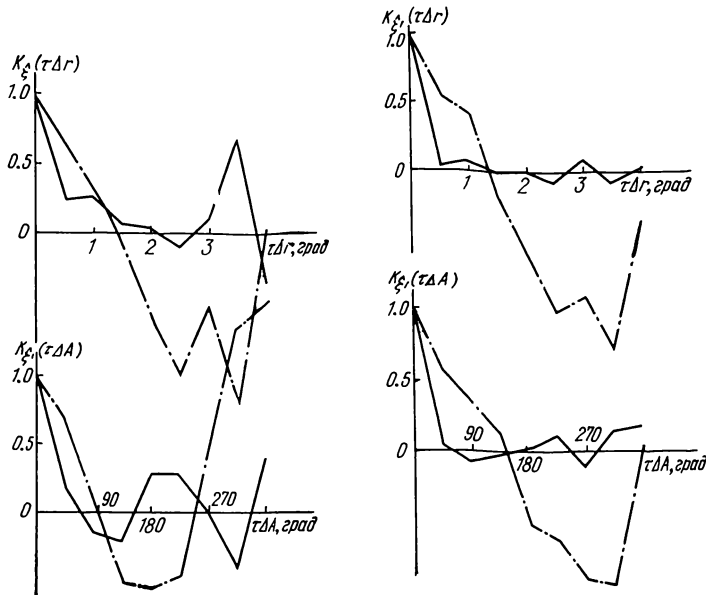


Рис. 3. Корреляционные функции оценок остаточных уклонений $\hat{\zeta}_i$ после учета модели (1) (сплошная линия) и линейной модели (пунктирная линия)

Рис. 4. Корреляционные функции оценок остаточных уклонений $\hat{\zeta}'_i$ после учета модели (1) (сплошная линия) и линейной модели (пунктирная линия)

Представляя разности идеальных и измеренных координат в виде полинома (1), мы ограничились членами пятой степени, т. е. $m=5-n$. На рис. 1 заштрихованы клетки (n, m) значимых членов ортогонального разложения.

Оценки коэффициентов неортогонального разложения \hat{b}_{nm} , вычисленные по значимым \hat{a}_{nm} , и их средние квадратичные ошибки $\hat{\sigma}(b_{nm})$ приведены в таблице. Анализ коэффициентов при членах полинома, содержащих x^3 и xy^2 (в разностях $X-x$) и x^2y и y^3 (в разностях $Y-y$), позволяют оценить коэффициент дисторсии c_1 . В среднем его можно положить равным $c_1 = -0.5 \cdot 10^{-7}$ мм $^{-2}$.

Изменение дисперсии оценок остаточных уклонений $\hat{\zeta}_i$ и $\hat{\zeta}'_i$ с увеличением числа членов разложения r' показано на рис. 2. После предварительного учета в измеренных координатах дисторсии с принятым коэффициентом $c_1 = -0.5 \cdot 10^{-7}$ мм $^{-2}$ и использования линейной модели дисперсия остаточных уклонений существенно уменьшилась (ее значение отмечено на рисунке кружком), следовательно, для данной пластинки после линейных членов наибольший вклад в разностях $X-x$ и $Y-y$ давали члены, зависящие от третьих степеней координат. Ошибка единицы веса после учета этой дисторсии уменьшилась с 20 мкм до 7 мкм. Графики корреляционных функций оценок остаточных уклонений $\hat{\zeta}_i$ и $\hat{\zeta}'_i$ в радиальном и азимутальном направлениях с шагом дискретизации $\Delta r = 0.5^\circ$ и $\Delta A = 45^\circ$ приводятся на рис. 3, 4. Корреляция

Коэффициенты неортогонального разложения и их средние квадратичные ошибки,
 $mm^{-[(n+m)-1]}$

n	m	X-x		Y-y	
		\hat{b}_{nm}	$\sigma(\hat{b}_{nm})$	\hat{b}_{nm}	$\sigma(\hat{b}_{nm})$
0	0	$0.35840 \cdot 10^1$	$\pm 0.22078 \cdot 10^{-2}$	$-0.60484 \cdot 10^1$	$\pm 0.20892 \cdot 10^{-2}$
1	0	$-0.27477 \cdot 10^{-2}$	$0.34166 \cdot 10^{-4}$	$-0.20726 \cdot 10^{-2}$	$0.43946 \cdot 10^{-4}$
0	1	$0.20193 \cdot 10^{-2}$	$0.34698 \cdot 10^{-4}$	$-0.27385 \cdot 10^{-2}$	$0.28647 \cdot 10^{-4}$
2	0	$0.78194 \cdot 10^{-6}$	$0.76697 \cdot 10^{-6}$	$-0.64944 \cdot 10^{-6}$	$0.63649 \cdot 10^{-6}$
1	1	$0.64316 \cdot 10^{-6}$	$0.67374 \cdot 10^{-6}$	$0.17119 \cdot 10^{-6}$	$0.56202 \cdot 10^{-6}$
0	2	$-0.87259 \cdot 10^{-7}$	$0.34274 \cdot 10^{-6}$	$-0.87623 \cdot 10^{-6}$	$0.69515 \cdot 10^{-6}$
3	0	$0.58790 \cdot 10^{-7}$	$0.32199 \cdot 10^{-8}$	$0.33573 \cdot 10^{-7}$	$0.12267 \cdot 10^{-7}$
2	1	$0.31295 \cdot 10^{-8}$	$0.35137 \cdot 10^{-8}$	$0.50036 \cdot 10^{-7}$	$0.28998 \cdot 10^{-8}$
1	2	$0.42130 \cdot 10^{-7}$	$0.33229 \cdot 10^{-8}$	$-0.22600 \cdot 10^{-8}$	$0.28867 \cdot 10^{-8}$
0	3	$0.15811 \cdot 10^{-8}$	$0.35227 \cdot 10^{-8}$	$0.46114 \cdot 10^{-7}$	$0.29741 \cdot 10^{-8}$
4	0	$0.33996 \cdot 10^{-11}$	$0.53023 \cdot 10^{-10}$	$0.32465 \cdot 10^{-10}$	$0.44869 \cdot 10^{-10}$
3	1	$-0.15890 \cdot 10^{-10}$	$0.51926 \cdot 10^{-10}$	$0.92925 \cdot 10^{-11}$	$0.42444 \cdot 10^{-10}$
2	2	$-0.97764 \cdot 10^{-11}$	$0.56554 \cdot 10^{-10}$	$-0.16786 \cdot 10^{-10}$	$0.49719 \cdot 10^{-10}$
1	3	$-0.14149 \cdot 10^{-9}$	$0.60574 \cdot 10^{-10}$	$0.38623 \cdot 10^{-10}$	$0.51529 \cdot 10^{-10}$
0	4	—	—	$-0.10589 \cdot 10^{-10}$	$0.47030 \cdot 10^{-10}$
5	0	—	—	$-0.20015 \cdot 10^{-11}$	$0.75727 \cdot 10^{-12}$

остаточных уклонений после исключения линейной модели заметно больше. Проверка по γ -критерию показала, что для представления зависимости между идеальными и измеренными координатами недостаточно линейных членов и нужно продолжать разложение до более высоких степеней. Даже проводя разложение до членов пятой степени включительно, мы не добились полного исключения зависимости от радиального расстояния до оптического центра в остаточных уклонениях. Одной из возможных причин этого могут быть ошибки опорного каталога.

Данная работа выполнялась по предложению и при непосредственном участии Я. С. Яцкива, за что авторы выражают ему искреннюю признательность. Авторы благодарят С. П. Майора за предоставленный наблюдательный материал и результаты измерений пластинки.

1. Боганик Г. П. Об установлении порядка уравнения параболической регрессии.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, с. 718—727.
2. Зверев М. С., Курьянова А. Н., Положенцев Д. Д., Яцкив Я. С. Сводный каталог фундаментальных слабых звезд со склонениями от $+90^\circ$ до -20° (ПФКСЗ-2).— Киев: Наук. думка, 1980.— 108 с.
3. Курс астрофизики и звездной астрономии / Под ред. А. А. Михайлова.— М.: Наука, 1973.— 600 с.
4. Основы спутниковой геодезии / Под ред. А. А. Изотова.— М.: Недра, 1974.— 315 с.

Главная астрономическая обсерватория АН УССР,
 Киев

Поступила в редакцию
 16.07.1984