УДК 523.812

О совместной обработке дифференциальных меридианных наблюдений

В. В. Тельнюк-Адамчук

Обсуждается метод совместной обработки ряда дифференциальных меридианных наблюдений в результате решения единой системы уравнений. Для случая, когда решение ищется в виде поправок к координатам, получены необходимые системы уравнений. Выполнено сопоставление весов постоянных инструмента и поправок к координатам для случая совместной и раздельной обработки. Показано, что совместное решение при прочих равных условиях (они связаны со степенью сложности модели системы инструмент-наблюдатель) не хуже и не лучше раздельного. С учетом возможности получения статистически обоснованной модели совместная обработка более предпочтительна, однако окончательные выводы могут быть сделаны с учетом результатов обработки реального ряда наблюдений.

ON THE BLOCK-ADJUSTMENT REDUCTION OF THE DIFFERENTIAL MERIDIAN OBSERVATIONS, by Tel'nyuk-Adamchuk V. V.— The advantage of block-adjustment reduction of meridian observations is discussed. The conditional and normal equations are obtained for the case when solution is found in the form of the corrections to the coordinates. The weights of the instrument constants and coordinate corrections in the case of block-adjustment and in the case of traditional reduction are compared for each night separately. Taking into account the possibility of obtaining the statistically substantial model of the instrument the block-adjustment reduction is more preferable in the sense of the result accuracy. The final conclusions however may be drawn considering results of an actual observation series reduction.

Введение. Сложность современных астрометрических наблюдений и их обработка требует больших затрат времени. Использование ЭВМ позволяет в значительной степени упростить процесс обработки, а также извлекать максимальную информацию из выполненных наблюдений. Последнее весьма актуально для таких трудоемких наблюдений, какими являются меридианные. Одной из таких возможностей посвящена данная статья.

В 1960 г. был предложен способ обработки совокупности астрофотографий как единого целого [4], получивший название метода перекрытий. Анализ математической стороны метода [6, 7] и его практическое применение (напр. [5]) показали ряд преимуществ и новых возможностей как в отношении повышения точности результатов, так и в отношении исследования и учета различных тонких эффектов, сопровождающих процесс получения и редукции снимков.

Подобную схему нетрудно перенести и на процесс обработки относительных меридианных наблюдений. Принципиальная основа способа — корректное извлечение информации, содержащейся в наблюдении определяемых звезд, для уточнения постоянных математической модели инструмента (точнее, системы, включающей параметры инструмента, условия наблюдений, особенности наблюдателя и т. п.). Это достигается путем совместной обработки по методу наименьших квадратов (МНК) всей совокупности вечеров, составляющих ряд наблюдений. Идея привлечения определяемых звезд не нова, вопрос обсуждался неоднократно, постепенно облекаясь в строгую с точки зрения фундаментальной астрометрии форму. Преимущества таких схем почти очевидны, они будут обсуждены ниже.

Предложение использовать такой подход для обработки дифференциальных меридианных наблюдений, сделанное в [2], в настоящей статье рассмотрено более детально: даны необходимые выражения для обработки наблюдений, сравнена точность результатов для рассматриваемой модели, рассмотрены некоторые возможности решения задачи на ЭВМ.

Общая для всего ряда система уравнений содержит неизвестные трех типов: координаты (или поправки к координатам) определяемых звезд, постоянные инструмента, сохраняющие свое значение в течение всего вечера наблюдений, и глобальные постоянные, сохраняющиеся на протяжении всего периода наблюдений. Необходимое условие применения совместной обработки — неоднократные наблюдения определяемых звезд. В противном случае рассматриваемая схема вырождается в традиционную.

Выражения для обработки наблюдений. Пусть ряд наблюдений состоит из n вечеров, в течение которых наблюдалось в общей сложности N определяемых звезд. Индекс i относится к номерам звезд, j — к номерам вечеров, k — к постоянным инструмента. Для прямых восхождений по формуле Бесселя имеем:

$$T_{ij} + c_j \sec \delta_{ij} + u_j + n_j \operatorname{td} \delta_{ij} = \alpha^o_{ij}, \tag{1}$$

где c_j — поправка коллимации с учетом суточной аберрации, u_j и n_j содержат поправку часов и постоянные ориентирования оси инструмента в экваториальной системе, T_{ij} — момент наблюдения i-й звезды в j-м вечере. Индексом o отмечено наблюденное значение. Для определяемой звезды

$$T_{ij} + c_j \sec \delta_{ij} + u_j + n_j \operatorname{tg} \delta_{ij} = \alpha_i^{\text{cat}} + \theta_i + \text{Red}_i = \alpha^c_{ij} + \theta_i. \tag{2}$$

Здесь α_i^{cat} — положение звезды в подходящем каталоге, θ_i — неизвестная поправка к положению звезды в нем, Red_{ij} — редукционная поправка для перехода к видимому месту α_{ij}. Случайные ошибки в уравнениях (2) и далее, для упрощения записи не записываются.

Умножим уравнение (2) на квадратный корень его веса пропорциональный $\cos \delta_{ij}$, обозначим далее $\theta_i \cos \delta_{ij}$ тем же символом θ_i, а известные величины объединим в l_{ij}. Принимая модель инструмента в виде, например, линейной формы

$$u_j \cos \delta_{ij} + n_j \sin \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{g} a_{kj}\varphi_{kij} + \sum_{k=1}^{h} b_k \psi_{kij},$$

вместо (2) получим

$$\sum_k a_{kj}\varphi_{kij} + \sum_k b_k \psi_{kij} - \theta_i = l_{ij}.$$

Здесь a_{kj} и b_k — параметры модели инструмента, первые — неизменные в течение вечера, вторые — в течение всего периода наблюдений, φ_{kij} и ψ_{kij} — избранные базисные функции, в пространстве которых строится модель [1].

В выражениях для Red_{ij} должны стоять точные, с учетом θ_i, координаты. Если вести вычисления с точностью до 0.01″, то при θ_i не превышающих 1″ и интервале до 5 лет в Red_{ij} θ_i можно не учитывать, если склонения наблюдавшихся звезд не превышают 80°. В противном случае задачу надо решать в два приближения, уточнив на первом шаге каталог определяемых звезд (т. е. уменьшив θ_i).

Если обозначить величины, относящиеся к опорным звездам одним штрихом, а к определяемым — двумя, то для прямых восхождений (и, как легко показать, для склонений), отбросив у φ и ψ, слабо зависящих от времени, индекс j, получим уравнения:

$$\begin{aligned} &\sum_k a_{kj}\varphi'_{kl} + \sum_k b_k \psi'_{kl} = l'_{ij}, \quad i \text{ — по опорным; } j = 1, \ldots, n; \\ &\sum_k a_{kj}\varphi''_{kl} + \sum_k b_k \psi''_{kl} - \theta_i = l''_{ij}, \quad i \text{ — по определяемым; } j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

Или в матричной записи для j-вечера:

$$\begin{gathered}\varphi'_{(j)}a_j + \psi'_{(j)}b = l'_j,\\ \varphi''_{(j)}a_j + \psi''_{(j)}b - \theta_{(i)} = l''_j, \quad j = 1, \dots, n.\end{gathered} \tag{3'}$$

Здесь $\theta_{(j)}$ и l_j — столбцы величин θ_i и l_{ij}, соответствующие наблюдавшимся в j-вечере звездам.

$$a_j^{\text{т}} = \| a_{1j}, \dots, a_{gj} \|, \quad b^{\text{т}} = \| b_1, \dots, b_h \|, \quad \varphi_{(j)}^{\text{т}} = \| \varphi_{ki} \|, \quad \psi_{(j)}^{\text{т}} = \| \psi_{ki} \|$$

для звезд j-вечера, т — знак транспонирования.

Для всего ряда наблюдений можно написать

$$\left\| \begin{matrix} G'\Phi' & G'\Psi' & 0 \\ G''\Phi'' & G''\Psi'' & -G'' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a \\ b \\ \theta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} L' \\ L'' \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Здесь

$$\Phi^{\text{т}} = \|\varphi_{ki}\|, \quad \Psi^{\text{т}} = \| \psi_{ki} \|, \quad L^{\text{т}} = \| l_1^{\text{т}}, \dots, l_n^{\text{т}} \|$$

для всех опорных (или определяемых),

$$\theta = \| \theta_i \|$$

для всех определяемых,

$$a^{\text{т}} = \| a_1^{\text{т}}, \dots, a_n^{\text{т}} \|. \quad G^{\text{т}} = \| g_{(1)}^{\text{т}}, \dots, g_{(n)}^{\text{т}} \|,$$

где $g_{(j)}$ — матрица с длиной строки по числу наблюдавшихся в программе звезд (опорных или определяемых) и длиной столбца по числу наблюдений этих звезд в j-вечере. $g_{(j)mn}$ равно 1, если m-й по порядку наблюдалась n-ая звезда общего списка (опорных или отдельно определяемых) звезд, остальное — нули.

Решение совокупности условных уравнений (4) находится из нормальной системы (квадратными скобками обозначены суммы произведений матриц для опорных и определяемых звезд)

$$\left\| \begin{matrix} [\Phi^{\text{т}}G^{\text{т}}G\Phi] & [\Phi^{\text{т}}C^{\text{т}}G\Psi] & -\Phi''^{\text{т}}G''^{\text{т}}G'' \\ [\Psi^{\text{т}}G^{\text{т}}G\Phi] & [\Psi^{\text{т}}G^{\text{т}}G\Psi] & -\Psi''^{\text{т}}G''^{\text{т}}G'' \\ -G''^{\text{т}}G''\Phi'' & -G''^{\text{т}}G''\Psi'' & G''^{\text{т}}G'' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a \\ b \\ \theta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} [\Phi^{\text{т}}G^{\text{т}}L] \\ [\Psi^{\text{т}}G^{\text{т}}L] \\ -G''^{\text{т}}L'' \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

иначе

$$\begin{gathered}\sum_k a_{kj} \sum_{ij} \varphi_{ki}\varphi_{si} + \sum_k b_k \sum_{ij} \psi_{ki}\varphi_{si} = \sum_{ij} \theta_i\varphi_{si} = \sum_{ij} l_{ij}\varphi_{si};\\ s = 1, \dots, g; \qquad j = 1, \dots, n;\\ \sum_j \sum_k a_{kj} \sum_{ij} \varphi_{ki}\psi_{si} + \sum_k b_k \sum_j \sum_{ij} \psi_{ki}\psi_{si} - \sum_i m_i\theta_i\psi_{si} = \sum_j \sum_{ij} l_{ij}\psi_{si};\\ s = 1, \dots h; \quad j = 1, \dots, n;\\ \sum_{ji} \sum_k a_{kj}\varphi_{ki} + \sum_k b_k m_k \psi_{ki} - m_i\theta_i = \sum_{ji} l_{ij}; \quad i = 1, \dots, N.\end{gathered} \tag{5'}$$

Суммы с индексом ij относятся ко всем опорным и определяемым звездам j-вечера, с индексом ji — ко всем вечерам, содержащим определяемую i-звезду, m_i — число наблюдений последней. θ_i для опорных звезд следует положить равными нулю.

Система (5) содержит $N+ng+h$ неизвестных и, несмотря на большое их число, может быть решена с помощью ЭВМ. Однако можно существенно упростить задачу, если воспользоваться предложением Гуджа [6] и исключить из системы неизвестные θ_i, оставив только a_{kj} и b_k. Если определяемая i — звезда наблюдалась s раз на протяжении вечеров $j1, \ldots, js$, то, исключив из каждой такой группы неизвестное θ_i и опустив уравнения для одиночных наблюдений, получим систему

$$\begin{gathered}\sum_k a_{kj}\varphi'_{ki} + \sum_k b_k\psi'_{ki} = l'_{ij}; \quad i \text{ — по опорным}; \quad j = 1, \ldots, n; \\ \sum_k (a_{kjl} - a_{kj1})\,\varphi''_{ki} = l''_{ijl} - l''_{ij1}; \ i \text{ — по определяемым}; \ jl = j2,\ j3, \ldots, js,\end{gathered} \tag{6}$$

или, в матричном виде,

$$G'\Phi'a + G'\psi'b = L'$$

$$(G''\Phi'' - G''(G''^{\mathrm{T}}G'')^{-1}G''^{\mathrm{T}}G''\Phi)\,a = L'' - G''(G''^{\mathrm{T}}G'')^{-1}G''^{\mathrm{T}}L''. \tag{6'}$$

Последнее уравнение получено из второго уравнения системы (4) путем обычного исключения из него θ по правилам матричной алгебры. Размерности системы (6) существенно ниже, на величину N числа определяемых звезд программы.

Описанную схему можно реализовать только с помощью ЭВМ. Если количество вечеров небольшое, решение может быть получено с помощью стандартных процедур обращения матрицы. При большом числе вечеров и определяемых звезд решение следует находить с помощью итерационных методов, например, с помощью схемы Гаусса — Зейделя, использовав при необходимости редуцированную систему (6).

Эффективность совместной обработки. Оценивая точность определения неизвестных в рассматриваемой схеме, рассмотрим упрощенный пример, когда модель содержит один глобальный параметр и один относящийся к конкретному вечеру. Тогда вместо блочных будем иметь обычные матрицы нормальных уравнений. Если в течение n вечеров наблюдались одни и те же звезды (опорные и определяемые отличаются штрихами), то для случая совместной и раздельной обработки получим:

$$\begin{Vmatrix} [\varphi\varphi] & 0 & & 0 & [\varphi\psi] & -\varphi''_1 & & -\varphi''_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & [\varphi\varphi] & [\varphi\psi] & -\varphi''_1 & & -\varphi''_m \\ [\varphi\psi] & [\varphi\psi] & \ldots & [\varphi\psi] & n\,[\psi\psi] & -n\psi''_1 & \ldots & -n\psi''_m \\ -\varphi''_l & -\varphi''_1 & \ldots & -\varphi''_1 & -n\psi''_1 & n & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varphi''_m & -\varphi''_m & \ldots & -\varphi''_m & -n\psi''_n & 0 & & n \end{Vmatrix}$$

и

$$\begin{Vmatrix} [\varphi\varphi] & [\varphi\psi] & -\varphi''_1 \ldots & -\varphi''_m \\ [\varphi\psi] & [\psi\psi] & -\psi''_1 \ldots & -\psi''_m \\ -\varphi''_1 & -\psi''_1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varphi''_m & -\psi''_m & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Квадратными скобками обозначены суммы (по всем звездам). Если обозначить размерность верхнего и нижнего диагональных блоков левой матрицы через r и s, а число на нижней диагонали — через t, то для определителя $A(r,\ s,\ 1,\ t)$ такой матрицы (третий аргумент обозначает число глобальных параметров) можно найти

$$A(r,\ s,\ 1,\ t) = t^s\,[\varphi\varphi]^{r-1}\,\{(t\,[\varphi\varphi] - r\,[\varphi''\varphi''])\,[\psi'\psi'] - r\,[\varphi'\psi']^2\}.$$

В табл. 1 приведены значения определителей основной матрицы и миноров, соответствующих неизвестным, а также веса неизвестных для случая совместной и раздельной обработок. Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha = [\varphi'\varphi'][\psi'\psi'] - [\varphi'\psi']^2; \qquad \beta = [\psi''\psi''][\varphi'\varphi'] + [\varphi'\psi']^2;$$

$$\gamma = \varphi_i^2 [\psi'\psi'] + \psi_i^2 [\varphi'\varphi'] - 2\varphi_i\psi_i [\varphi\psi].$$

В случае отсутствия корреляции между φ и ψ, а это близко к действительности, суммы типа $[\varphi\psi]$ обращаются в нуль, и для отношения весов неизвестных a_j, в предположении близости распределений опорных и определяемых по небу, получим $n/(f(n-1)+1)$.

Таблица 1. **Сравнение решений**

Виды определителей	Совместное	Раздельное	Отношение весов
Основной определитель	$A(n, m, 1, n) = n^{m+1} [\varphi\varphi]^{n-1}\alpha$	$A(1, m, 1, 1) = \alpha$	—
Минор a_j	$A(n-1, m, 1, n) = n^m [\varphi\varphi]^{n-2} (n\alpha + \beta)$	$A(0, m, 1, 1) = [\psi'\psi']$	—
Минор b	$A(n, m, 0, n) = n^m [\varphi\varphi]^{n-1} [\varphi'\varphi']$	$A(1, m, 0, 1) = [\varphi'\varphi']$	—
Минор θ_i	$A(n, m-1, 1, n) = n^m [\varphi\varphi]^n (\alpha + \beta)$	$A(1, m-1, 1, 1) = \alpha + \beta$	—
Веса			
p_{a_j}	$\dfrac{\alpha[\varphi\varphi]}{\alpha + \frac{\beta}{n}}$	$\dfrac{\alpha}{[\psi'\psi']}$	$\dfrac{[\varphi\varphi]\cdot[\psi'\psi']}{\alpha + \frac{\beta}{n}}$
p_b	$\dfrac{n\alpha}{[\varphi'\varphi']}$	$\dfrac{\alpha}{[\varphi'\varphi']}$	n
p_{θ_i}	$\dfrac{n\alpha}{(\alpha + \beta)}$	$\dfrac{\alpha}{(\alpha + \beta)}$	n

Таблица 2. **Отношение весов постоянных модели инструмента в случае совместной и раздельной обработки наблюдений**

Доля опорных f	Число вечеров n					
	1	2	3	4	10	∞
1/10	1.0	1.8	2.5	3.1	5.5	10.0
1/4	1.0	1.6	2.0	2,3	3.6	4.0
1/3	1.0	1,5	1.8	2.0	2.7	3.0
1/2	1.0	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0
1/1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Следует особо подчеркнуть, что, как это видно из табл. 1, точность положений, полученных двумя путями, при прочих равных условиях равна между собой (если учесть дальнейшее усреднение координат по n вечерам в случае раздельной обработки). Тем не менее весьма существенным преимуществом обсуждаемого метода, способствующим повышению точности результатов, является увеличение веса полученных значений постоянных модели инструмента a_{kj} и b_k, что дает возможность исследовать тонкие особенности поведения системы инструмент —

наблюдатель, а так же получать статистически обоснованную математическую модель, включающую члены типа уравнения яркости, личные разности, температурные и сезонные влияния и т. п. Корректно учесть подобные моменты в процессе раздельной редукции едва ли возможно, модель в этом случае должна быть проще. При совместной же обработке, без значительного усложнения решения, все это можно учесть в силу существенного повышения точности определения параметров модели. В определенном смысле здесь можно говорить о различной эффективности оценок θ_i: в случае совместной обработки она лучше. ЭВМ-эксперименты на моделях с перекрывающимися пластинками свидетельствуют о повышении точности на уровне 20 % [3]. В случае меридианных наблюдений есть основания ожидать более значимого улучшения.

В табл. 2 дано отношение весов искомых постоянных a для ряда значений n числа вечеров (числа наблюдений одной определяемой звезды) и доли опорных f. Эти результаты могут быть распространены на реальные наблюдения с многопараметрическими моделями и неодинаковой структурой вечеров. Для типичного случая $f=1/3$ и $n=4$, увеличение точности определения параметров a модели характеризуется фактором 2. Для глобальных параметров это увеличение еще заметнее.

Особо следует сказать о влиянии обсуждаемого способа на степень воспроизведения результирующим каталогом системы опорного. По-видимому, и в отношении систематических ошибок, способ совместной обработки вполне приемлем, более того — предпочтителен. Действительно, никакими новыми источниками информации, кроме опорного каталога, в схеме совместной редукции мы не пользуемся. Использование же строгой МНК-процедуры, лучшая, более обоснованная модель инструмента, могут повлиять на окончательный результат только благотворно. Если считать, что разность между системой полученного каталога и опорным есть проявление смещения в оценках a_{kj}, b_k (а следовательно, и в θ_i), то в случае совместной обработки естественно ожидать улучшения степени близости и качества привязки к опорному каталогу.

Тем не менее, окончательные выводы о преимуществах (и недостатках) метода можно будет сделать только после ЭВМ-экспериментов с моделями наблюдений, а также из анализа каталогов, полученных согласно обсуждаемой схеме. По этой причине опробование схемы на реальном наблюдательном материале является крайне желательным.

Автор благодарит А. П. Гуляева и А. С. Харина за полезное обсуждение затронутых в статье вопросов.

1. *Тельнюк-Адамчук В. В., Грегуль А. Я.* Обработка меридианных наблюдений на ЭВМ М-220 м.— Вестник Киев. ун-та. Астрономия, 1975, № 17, с. 98—105.
2. *Толчельникова-Мурри С. А.* Использование наблюдений определяемых звезд для повышения точности редукции на опорную систему.— Письма в астрон. журн., 1981, 7, с. 120—124.
3. *Ebner H.* Genauigkeitserwartung photographischen Sternpozitionen bei geschlossener Blockausgleichung.— Astron. Nachrichten, 1970, **292**, S. 65—69.
4. *Eichhorn H.* Über der Reduction von photographischen Sternpozitionen und Eigenbewegungen.— Astron. Nachricheten, 1960, **285**, S. 233—237.
5. *Eichhorn H., Goode W. G., Lukac C. F. et al.* Accurate position of 502 stars in the region of the Pleiades.— Mem. Roy. Astron. Soc., 1970, **73**, p. 125—152.
6. *Googe W.* The mathematical implementation of the overlap plate reduction technique.— Astron. J., 1967, **72**, p. 623—625.
7. *Jefferys W. H.* On computation technique for photographic astrometry with overlapping plates.— Astron. J., 1963, **68**, p. 111—113.

Астрономическая обсерватория
Киевского государственного университета
им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию
16.07.1984