https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033
УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, https://orcid.org/0000-0003-1266-4042
П.В. Фернаті, https://orcid.org/0000-0002-5521-2225
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

Дослідження зміни концентрації напружень у просторовій пластині з в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Розв'язано просторову задачу лінійної в'язкопружності для трансверсально ізотропного елемента конструкції (просторова пластина з круглим отвором). Використано конститутивні співвідношення в інтегральній формі Больцмана–Вольтерра. Інтеграли в конститутивних рівняннях перетворено до інкрементної форми на часовій сітці. На кожному часовому інтервалі задача розв'язується відносно приростів переміщень. Функції релаксації модулів в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу описано в експоненціальній формі. Для цих модулів за допомогою принципу пружно-в'язкопружної аналогії побудовано аналітичні вирази для конститутивної матриці методу скінченних елементів. Проілюстровано зміни напружень в площині пластини та поперечних напружень з часом на лінії концентрації. Числові приклади побудовано для середини відрізка концентрації напружень та її кінців.

Ключові слова: *концентрація напружень, в'язкопружне тіло, трансверсально ізотропне тіло, інкрементне в'язкопружне формулювання, метод скінченних елементів.*

Вступ і постановка задачі. Мотивацією для поточної роботи є розробка ефективного алгоритму дослідження концентрації напружень в просторовому елементі конструкції з в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу за допомогою надійного числового інструменту для прогнозування напружено-деформованого стану тіла з матеріалу зі спадковими характеристиками.

Детальний огляд підходів скінченно-елементного моделювання ізотропних та трансверсально-ізотропних в'язкопружних матеріалів проведено в [1]. Для реалізації коду скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану елемента конструкції з лінійно в'язкопружного матеріалу було запропоновано підхід внутрішньої змінної, який вимагає лише маніпулювання величинами, що оцінюються в точках інтегрування. Підхід внутрішньої змінної використовувався в [2] для ортотропних в'язкопружних матеріалів. З цією метою було

Цитування: Селіванов М.Ф., Фернаті П.В. Дослідження зміни концентрації напружень у просторовій пластині з в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 1. С. 33—39. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

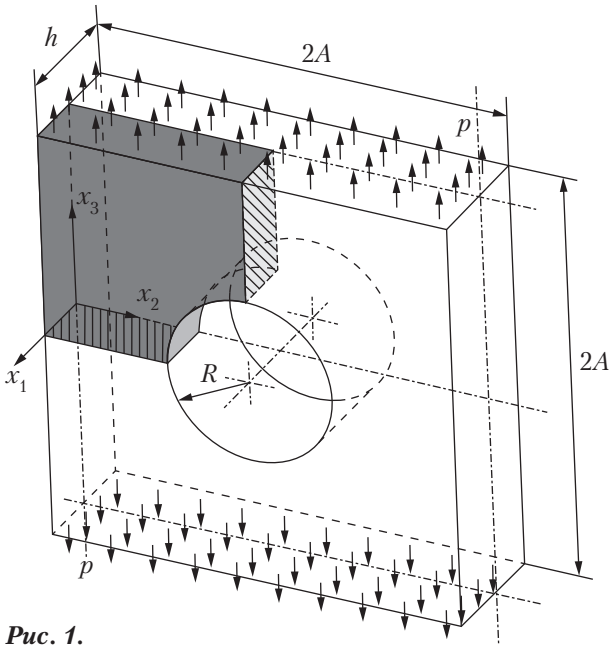


Рис. 1.

перетворено складові конститутивного рівняння в інтегральній формі в інкрементну форму на основі скінченних різниць, що призводить до рекурсивних лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дозволило впровадити у формулюванні методу скінченних елементів процедуру розв'язання задач лінійної в'язкопружності. У дуже схожому підході в [3] використовувалась інтегральна форма конститутивних рівнянь в термінах податливості замість релаксації щоб вивести інкрементні конститутивні рівняння для лінійних в'язкопружних матеріалів.

Дана робота є продовженням [4], де було представлено розв'язок задачі про концентрацію напружень біля круглого отвору у в'язкопружній ортотропній пластині в умовах плоского напруженого стану.

Розрахунки проведемо для просторової пластини з центральним круговим отвором (рис. 1). Пластину навантажено рівномірно розподіленим розтягувальним навантаженням. Об'ємні сили відсутні. Матеріал вважаємо лінійно в'язкопружним трансверсально ізотропним із залежними від часу модулями E_{33}, E_{22}, G_{23}, ν_{23}. Тіло знаходиться в однорідному температурному полі, переміщення є малими.

Система рівнянь для визначення напружено–деформованого стану тіла:

$$\sigma_{ij,\,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,\,j} + u_{j,\,i}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\sigma_{ij,\,j} n_j = T_i, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} C_{ijkl}(t-\tau)\mathrm{d}\varepsilon_{kl}(\tau), \tag{1}$$

де σ_{ij}, ε_{ij} і C_{ijkl} — компоненти тензорів напружень, деформацій та функцій релаксації; u_i, T_i і n_i — компоненти векторів переміщень, поверхневих сил та одиничного вектора нормалі до поверхні тіла; Ω — об'єм тіла; $\partial\Omega$ — частина поверхні, де задані поверхневі сили; t — час. В силу симетрії задачу будемо розв'язувати на восьмій частині пластини, зазначеній на рис. 1.

Розв'язання задачі. Інтегральний зв'язок між компонентами тензора напружень і деформацій для лінійного в'язкопружного матеріалу, що не старіє, (1), у загальному тривимірному аналізі запишемо в матричній формі

$$\sigma_i(t) = \int_{-\infty}^{t} C_{ik}(t-\tau)\mathrm{d}\varepsilon_k(\tau),$$

де σ_i та ε_k — компоненти векторів

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}^{\mathrm{T}}.$$

Для імплементації в'язкопружної моделі в розрахункову схему метода скінченних елементів запишемо приріст напружень на часовому інтервалі (t_{n-1}, t_n)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n-1)} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)},$$

де $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}(t_n)$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_n)$ ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ — внутрішня змінна задачі), $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t_n)$,

$$\tilde{\sigma}_i^{(n)} = -\int_{-\infty}^{t_{n-1}} [C_{ik}(t_n - \tau) - C_{ik}(t_{n-1} - \tau)] \mathrm{d}\varepsilon_k(\tau),$$

$$\hat{\sigma}_i^{(n)} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_{ik}(t_n - \tau) \mathrm{d}\varepsilon_k(\tau).$$

Будемо визначати вектор інкременту переміщень $\Delta\mathbf{u}^{(n)}$ та деформацій $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ в елементі,

$$\Delta\mathbf{u}^{(n)} = \mathrm{N}^{\mathrm{T}} \Delta\mathbf{q}^{(n)}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \Delta\mathbf{q}^{(n)}$$

з дискретизованої системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується для невідомих приростів вузлових переміщень, $\Delta\mathbf{q}^{(n)}$:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{F}^t - \mathbf{F}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{F}}^{(n)},$$

де

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{E}}^{(n)} \mathbf{B} \mathrm{d}V,$$

$$\mathbf{F}^t = \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{T} \mathrm{d}S, \quad \mathbf{F}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \mathrm{d}V, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(n)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} \mathrm{d}V,$$

$\mathbf{B}$ — стандартна матриця деформації–переміщення, яка пов'язує деформації з вектором вузлового переміщення; $\mathbf{T}$ — вектор поверхневих сил; $\mathbf{N}$ — вектор функцій форм; $\mathbf{K}$ — інкрементна матриця жорсткості; Ω^e — об'єм елемента; $\partial\Omega^e$ — його границя.

Якщо функції релаксації матеріалу визначено в формі ряду Проні–Діріхле (далі будемо вказувати індекси, за якими йде підсумовування; за іншими індексами, що повторюються, підсумовування немає)

$$C_{ik}(t) = E_{ik}^{\infty} + \sum_m E_{ik}^{(m)} \exp\{-t / \rho_{ik}^{(m)}\},$$

то внутрішню змінну можна визначати рекурсивно:

$$\tilde{\sigma}_i^{(n)} = \sum_m \sum_k (1-\zeta_{ik}^{(m,n)}) S_{ik}^{(m,n)},$$

$$S_{ik}^{(m,1)} = E_{ik}^{(m)} \varepsilon_k^{(0)},$$

$$S_{ik}^{(m,n)} = \zeta_{ik}^{(m,n-1)} S_{ik}^{(m,n-1)} + \eta_{ik}^{(m,n-1)} (1-\zeta_{ik}^{(m,n-1)}) \Delta\varepsilon_k^{(n-1)}, \quad n = 2, \ldots,$$

елементи матриці $\tilde{\mathbf{E}}^{(n)}$,

$$\tilde{E}_{ik}^{(n)} = E_{ik}^{\infty} + \sum_m \eta_{ik}^{(m,n)} (1-\zeta_{ik}^{(m,n)}),$$

$$\zeta_{ik}^{(m,n)} = \exp\{-\Delta t_n / \rho_{ik}^{(m)}\}, \qquad \eta_{ik}^{(m,n)} = \frac{E_{ik}^{(m)} \rho_{ik}^{(m)}}{\Delta t_n}.$$

Величини $S_{ik}^{(m,n)}$ рекурентно визначаються в точках інтегрування на кожному часовому інтервалі. Матриця $\mathbf{K}$ не потребує переобчислення для кожного n за рівномірного розбиття інтервалу часу, на якому проводиться дослідження.

Числовий розв'язок. Дослідимо зміну з часом концентрації напружень біля кругового отвору в трансверсально ізотропній пластині заданої товщини. Матриця жорсткості для задачі теорії пружності має наступний вигляд:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{21}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{32}\nu_{23}}{E_{22}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu_{21}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu_{21}^2}{E_{22}^2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{симетрія} & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{23} & 0 \\ & & & & & \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{21})} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

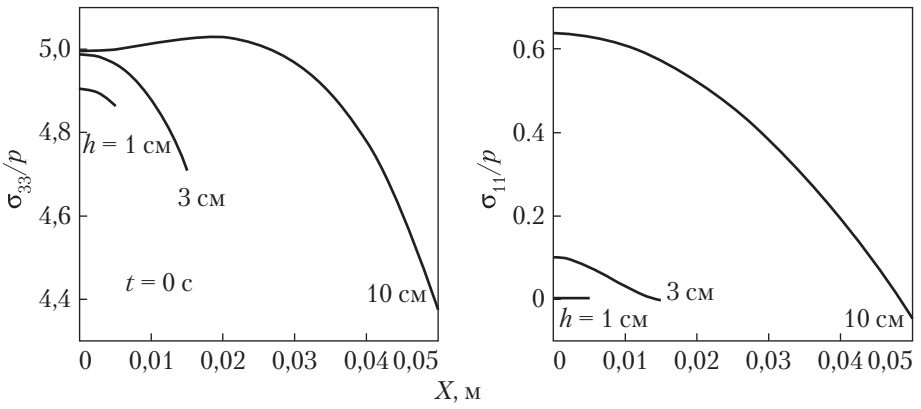
$$\nu_{23}E_{33} = \nu_{32}E_{22}, \quad \Delta = \frac{(1+\nu_{21})(1-\nu_{21}-2\nu_{23}\nu_{32})}{E_{22}^2 E_{33}}.$$

Побудуємо в'язкопружний аналог цієї матриці для випадку, коли кожен з модулів E_{33}, E_{22}, G_{23} задано однією експоненціальною функцією з тим самим часом релаксації:

$$E_{33}(t) = E_{33}^{\infty} + E_{33}^{1} \exp\{-t/\rho\}, \qquad E_{22}(t) = E_{22}^{\infty} + E_{22}^{1} \exp\{-t/\rho\},$$

$$G_{23}(t) = G_{23}^{\infty} + G_{23}^{1} \exp\{-t/\rho\}, \qquad \nu_{21} = \text{const}, \quad \nu_{32} = \text{const}.$$

Рис. 2.



В цьому випадку легко знайти в'язкопружний аналог матриці $\mathbf{D} = [D_{ij}]$. Для цього підставимо в (2) перетворення Лапласа–Карсона відповідних модулів. Обернене перетворення дає

$$D_{11}(t) = \frac{b_\infty}{a_\infty} + \frac{b_1}{a_1}\exp\{-t/\rho\} - c\exp\{-t/\rho_2\},$$

$$D_{12}(t) = \frac{d_\infty}{a_\infty} + \frac{d_1}{a_1}\exp\{-t/\rho\} - c\exp\{-t/\rho_2\},$$

$$D_{13}(t) = \nu_{32}\left[\frac{E^\infty_{22}E^\infty_{33}}{a_\infty} + \frac{E^1_{22}E^1_{33}}{a_1}\exp\{-t/\rho\} - 2c\exp\{-t/\rho_2\}\right],$$

$$D_{33}(t) = (1-\nu_{21})\left[\frac{(E^\infty_{33})^2}{a_\infty} + \frac{(E^1_{33})^2}{a_1}\exp\{-t/\rho\}\right] - 4c\nu^2_{32}\exp\{-t/\rho_2\},$$

$$D_{44}(t) = D_{55}(t) = G_{23}(t), \quad D_{66}(t) = \frac{E_{22}(t)}{2(1+\nu_{21})},$$

де

$$\rho_2 = \frac{a_0}{a_\infty}\rho, \quad a_i = E^i_{33}(1-\nu_{21}) - 2\nu^2_{32}E^i_{22}, \quad b_i = \frac{E^i_{33} - \nu^2_{32}E^i_{22}}{1+\nu_{21}}E^i_{22},$$

$$c = \frac{(1-\nu_{21})\nu^2_{32}(E^\infty_{22}E^0_{33} - E^0_{22}E^\infty_{33})^2}{a_0a_1a_\infty}, \quad d_i = \frac{\nu_{21}E^i_{33} + \nu^2_{32}E^i_{22}}{1+\nu_{21}}E^i_{22}, \quad i = 0, 1, \infty.$$

Числові розв'язки отримано для наступних значень вихідних параметрів задачі: $E^0_{33} = E^\infty_{33} + E^1_{33} = 7$ ГПа, $E^\infty_{33} = 6{,}5$ ГПа, $E^0_{22} = E^\infty_{22} + E^1_{22} = 5{,}5$ ГПа, $E^\infty_{22} = 3$ ГПа, $G^0_{23} = G^\infty_{23} + G^1_{23} = 3$ ГПа, $G^\infty_{23} = 1$ ГПа, $\nu_{21} = \nu_{32} = 0{,}3$, $\rho = 20$ сек, $A = 10$ см, $R = 4$ см.

На рис. 2 зображені напруження на лінії концентрації, що відповідають моменту часу $t = 0$ с (розв'язок задачі теорії пружності), $x = 0$ відповідає площині симетрії пластини.

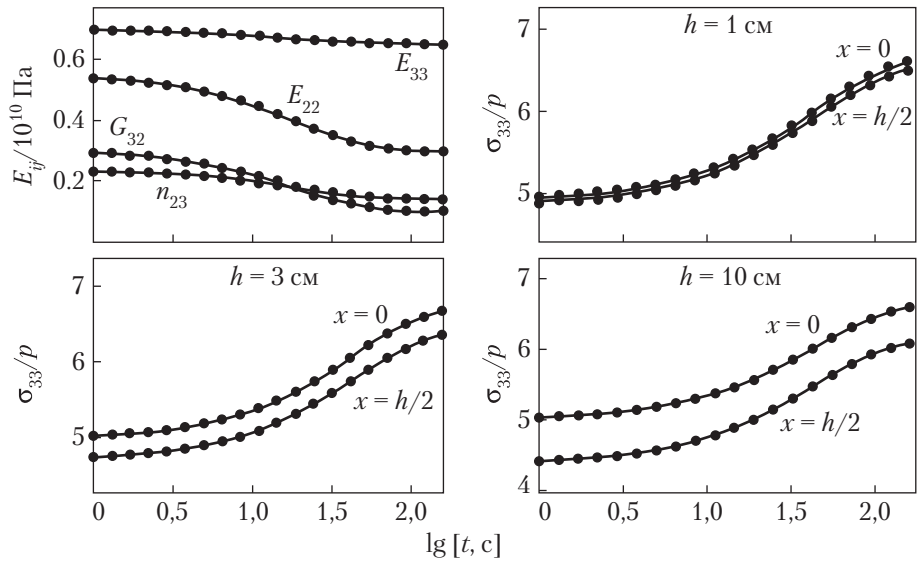


Рис. 3.

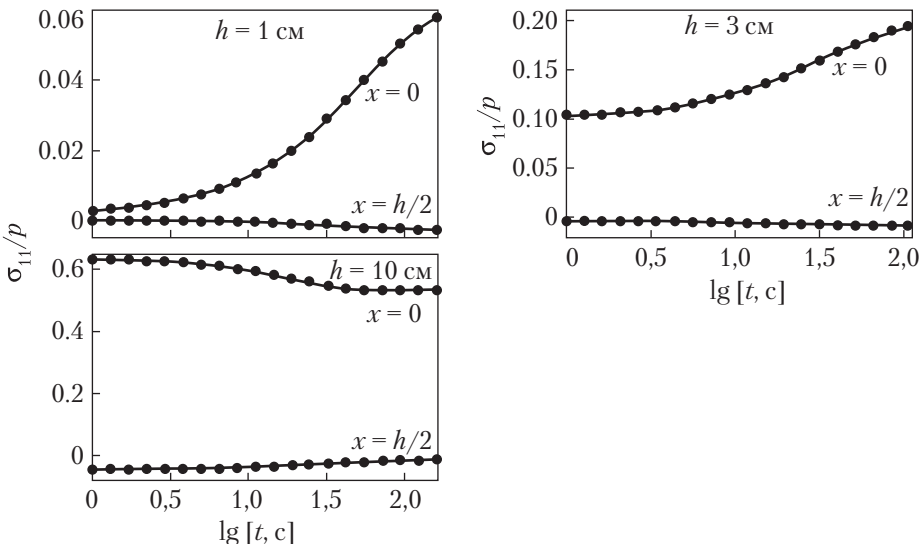


Рис. 4.

Для великих значень товщини максимальне напруження спостерігається не на площині симетрії. З ростом товщини різниця між напруженням на границі і в площині симетрії збільшується.

На рис. 3 проілюстровано функції релаксації та відносне розтягувальне напруження на лінії концентрації для декількох значень товщини пластини. Нижня крива на блоках, де відображені напруження, відповідає граничній поверхні пластини, верхня — площині симетрії. Аналогічно на рис. 4 проілюстровано відносне поперечне напруження. На границі поперечні напруження є близькими до нуля на всьому часовому інтервалі, тобто на поверхні пластини реалізується плоский напружений стан.

Таким чином, в роботі на прикладі дослідження концентрації напружень біля контуру отвору проілюстровано метод визначення напружено-деформованого стану лінійно в'язкопружних трансверсально ізотропних елементів конструкцій.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Zobeiry N. та ін. A differential approach to finite element modelling of isotropic and transversely isotropic viscoelastic materials. *J. Mechanics of Materials*. 2016. **97**. P. 76-91. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.02.013
2. Zocher M.A., Groves S.E., Allen D.H. A three dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 1997. **40**. № 12. P. 2267-2288. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P
3. Chazal C., Pitti R.M. Incremental constitutive formulation for time dependent materials: creep integral approach. *J. Mech. Time-Dep. Mater*. 2011. **15**. P. 239-253. https://doi.org/10.1007/s11043-011-9135-z
4. Селіванов, М.Ф., Кульбачний Є.Р., Онищенко Д.Р. Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 10. С. 28-34. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028

Надійшло до редакції 28.09.2022

REFERENCES

1. Zobeiry, N. and all (2016). A differential approach to finite element modelling of isotropic and transversely isotropic viscoelastic materials. J. Mechanics of Materials, 97, pp. 76-91. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.02.013
2. Zocher, M. A., Groves, S. E. & Allen, D.H. (1997). A three dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. Int. J. Numer. Meth. Engng., 40, No. 12, pp. 2267-2288. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970630)40:12<2267::AID-NME156>3.0.CO;2-P
3. Chazal, C. & Pitti, R. M. (2011). Incremental constitutive formulation for time dependent materials: creep integral approach. J. Mech. Time-Dep. Mater., 15, pp. 239-253. https://doi.org/10.1007/s11043-011-9135-z
4. Selivanov, M., Kulbachnyy, Y. & Onishchenko, D. (2020). Determining the change of stress concentration with time in a viscoelastic orthotropic solid. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., 10, pp. 28-34 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028

Received 28.09.2022

M.F. Selivanov, https://orcid.org/0000-0003-1266-4042
P.V. Fernati, https://orcid.org/0000-0002-5521-2225

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

DETERMINING THE CHANGE OF STRESS CONCENTRATION
WITH TIME IN A 3-D VISCOELASTIC TRANSVERSE ISOTROPIC PLATE

The 3-D problem of linear viscoelasticity for a transversely isotropic structural member (a 3-D plate with a circular hole) is solved. The constitutive equations in the Boltzmann-Volterra integral form were used. The integrals in the constitutive equations are converted to the incremental form on the time grid. At each time interval, the problem is solved with respect to displacement increments. The relaxation functions of viscoelastic transversally isotropic material modules are described in exponential form. Analytical expressions for the constitutive matrix of the finite element method were constructed for these modules using the principle of elastic–viscoelastic analogy. The changes of stresses in the plane of the plate and transverse stresses with time on the concentration line are illustrated. Numerical examples are constructed for the middle of the stress concentration line and its ends.

Keywords: stress concentration, viscoelastic solid, transverse isotropic solid, incremental viscoelastic formulation, finite element method.