



УДК 539.3;616.314

© 2010

Академик НАН Украины Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко,  
Н. Н. Тормахов, Ю. А. Триль, П. С. Флис

## О форме зубных дуг при ортогнатической окклюзии

*Наведено результати дослідження форми зубних дуг верхньої та нижньої щелеп при ортогнатичній оклюзії в постійному періоді прикусу. Розроблено методикку визначення параметрів кривих, що огинають вестибулярні поверхні верхнього та нижнього зубних рядів. Показано, що з кривих другого порядку еліпс найкраще описує форму цих кривих і що довжина малої осі цього еліпса дорівнює відстані між вестибулярними поверхнями сьомих зубів, а більша піввісь еліпса дорівнює чи на 30% більше відстані від вестибулярної поверхні перших зубів до лінії, що з'єднує виступаючі точки на вестибулярній поверхні сьомих зубів.*

Формирование зубной дуги пациента является одной из важных задач ортодонтии. При этом зубные ряды верхней и нижней челюстей должны иметь определенную форму, удовлетворяющую функциональным и эстетическим запросам пациента. Под выражением “форма зубного ряда” мы будем понимать форму внешних обводов зубного ряда — кривую, которая касается выступающих точек вестибулярной поверхности верхнего и нижнего зубных рядов.

В последнее время для анализа различных аспектов ортопедического и ортодонтического лечения в стоматологии все шире применяются методы механико-математического моделирования [1–3]. Использование математического моделирования позволяет не только точнее описать форму зубной дуги пациента, разработать план лечения больного, но и прогнозировать его результаты. В литературе встречаются высказывания о том, что зубной ряд имеет форму кривых второго порядка — эллипса или параболы [4–6], однако методики определения параметров этих кривых не конкретизированы.

Наша цель — определение вида кривой второго порядка, которая касается выступающих точек вестибулярной поверхности зубного ряда, и расчет параметров этой кривой. Поставленная задача решается методами математического моделирования на основе исследования 50 пар гипсовых моделей верхней и нижней челюстей при ортогнатической окклюзии в постоянном периоде прикуса.

Предположим, что кривая, огибающая вестибулярные поверхности верхнего и нижнего зубных рядов, является кривой второго порядка. Общее уравнение кривой второго порядка в произвольной прямоугольной системе координат  $xOy$  имеет вид [7, 8]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  — постоянные коэффициенты.

Уравнение (1) имеет характеристическую форму [7, 8]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \quad (2)$$

Свойство характеристической формы (2) заключается в том, что определитель  $I$ , составленный из ее коэффициентов, является ее инвариантом, так как он не меняет своей величины при вращении и поступательном перемещении осей координат, в которых построена кривая (1):

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Инвариант  $I$  определяет, к какой кривой второго порядка можно отнести кривую, описываемую уравнением (1). Если инвариант  $I$  больше нуля, то уравнение (1) описывает эллипс, если  $I$  меньше нуля — гиперболу, а если  $I$  равен нулю — параболу.

Таким образом, для того чтобы знать, к какой кривой принадлежит огибающая вестибулярной поверхности зубного ряда, необходимо определить коэффициенты, входящие в характеристическую форму (2), а затем вычислить по формуле (3) величину инварианта  $I$ .

Для определения коэффициентов уравнения (1) воспользуемся тем свойством кривых второго порядка, согласно которому любая кривая второго порядка вполне определяется пятью своими точками, если четыре из них не лежат на одной прямой [8]. Уравнение кривой второго порядка, проходящей через пять точек  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ ,  $(x_5, y_5)$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Если определитель (4) развернуть по его первой строке, то мы получим уравнение (1), коэффициенты которого можно вычислить по формулам

$$a_{11} = \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$a_{22} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$a_{13} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

В качестве точек  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), входящих в выражения (4)–(10), возьмем координаты выступающих точек на вестибулярной поверхности седьмых и третьих зубов, а также точку, которая делит пополам отрезок, соединяющий середины вестибулярных поверхностей первых зубов. При отсутствии седьмых зубов можно брать соответствующие координаты шестых зубов. На рис. 1 показана сканограмма гипсовой модели верхнего зубного

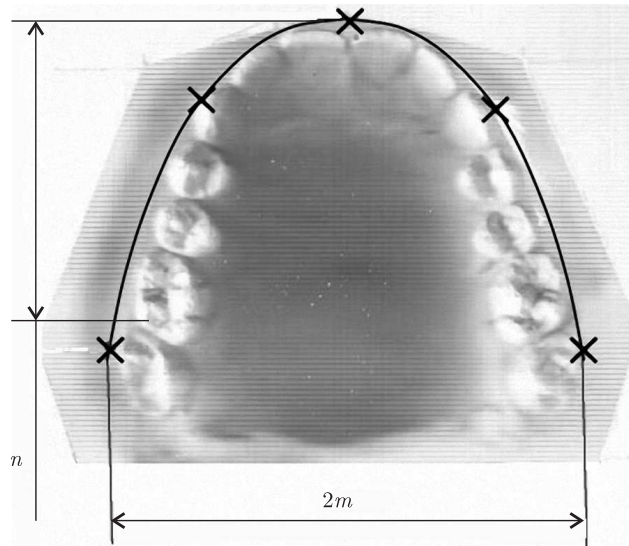


Рис. 1

ряда с огибающей вестибулярной поверхности зубного ряда. Точки  $(x_i, y_i)$  для определения искомым коэффициентов уравнения (1) отмечены на рис. 1 крестиками.

Для определения координат выступающих точек вестибулярных поверхностей зубных рядов гипсовые модели зубных рядов с ортогнатическим прикусом сканировали со стороны окклюзионной плоскости. Обработку сканированного изображения проводили с помощью персонального компьютера. На изображении зубного ряда определяли координаты выступающих точек вестибулярной поверхности зубного ряда и получали таблицу прямоугольных координат этих точек. По полученным координатам точек  $(x_i, y_i)$  согласно формулам (4)–(10) затем определяли коэффициенты  $a_{ij}$ .

Исследование формы зубного ряда проводилось на гипсовых моделях верхней и нижней челюстей трех пациентов. Координаты выступающих точек вестибулярной поверхности зубного ряда приведены в табл. 1. После обработки числовых данных были рассчитаны коэффициенты квадратичной формы  $a_{ij}$  и величина инварианта  $I$ . Установлено, что величина инварианта  $I$  для верхнего и нижнего зубных рядов всех пациентов больше нуля, из чего следует, что кривые второго порядка, описываемые уравнением (1), являются эллипсами и уравнение (1) после ортогонального поворота и поступательного перемещения системы координат [7, 8] можно записать в следующем каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (11)$$

где  $a, b$  — полуоси эллипса.

Значения  $a$  и  $b$  из (11) определяли по формулам [7]

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{\Delta}{\lambda_1 I}, \\ b^2 &= -\frac{\Delta}{\lambda_2 I}, \end{aligned} \quad (12)$$

Таблица 1

Верхняя челюсть						Нижняя челюсть					
Пациент 1		Пациент 2		Пациент 3		Пациент 1		Пациент 2		Пациент 3	
$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
-29,5	3,0	-25,6	12,1	-26,6	-13,8	-27,4	1,8	-25,5	-5,4	-25,7	12,3
-27,5	13,5	-23,7	19,2	-24,6	-2,9	-25,4	10,2	-22,0	6,3	-23,6	23,8
-25	20,6	-21,8	25,8	-24,1	4,5	-19,9	19,0	-20,6	13,1	-22,3	31,6
-23,3	28,2	-17,4	32,7	-21,7	11,0	-17,9	25,2	-18,4	20,6	-19,0	38,4
-18,7	36,3	-11,6	37,4	-17,8	18,7	-13,6	31,0	-14,1	26,8	-14,4	44,1
-12,8	42,6	-4,4	40,9	-12,3	23,1	-8,6	35,3	-8,7	30,5	-9,0	48,3
-3,9	46,4	5,2	40,9	-4,9	26,8	-2,9	36,6	-2,7	32,5	-3,0	49,9
4,9	46,4	12,1	37,4	4,9	26,8	2,9	36,6	3,3	32,5	2,6	49,9
13,3	42,6	17,8	32,7	12,5	23,1	8,2	35,3	8,9	30,5	8,4	48,3
18,1	36,3	21,6	25,8	16,8	18,7	13,2	31,0	13,3	26,8	13,8	44,1
22,3	28,2	23,5	19,2	21,5	11,0	17,1	25,2	18,7	20,6	18,6	38,4
24,7	20,6	24,4	12,1	23,9	4,5	20,9	19,0	20,9	13,1	22,3	31,6
27,7	13,5	-26,6	-13,8	25,4	-2,9	25,7	10,2	22,5	6,3	24,5	23,8
29,7	3,0	-24,6	-2,9	26,9	-13,8	27,7	1,8	24,3	-5,4	27,1	12,3

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - \quad (13)$$

определитель, составленный из коэффициентов, вычисленных в выражениях (4)–(10),  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического уравнения  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0$ , которые вычисляются согласно

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \quad (14)$$

В табл. 2 приведены величины полуосей эллипса  $a, b$  для верхней и нижней челюстей трех пациентов, определенные по формулам (11)–(13), а также расстояния  $m$  и  $n$  между крайними точками зубных рядов (см. рис. 1). Из табл. 2 можно видеть, что для всех пациентов величина полуоси эллипса  $a$  очень мало отличается от расстояния между вестибулярными точками седьмых зубов  $m$ . Величина большей полуоси эллипса  $b$  для 2-го и 3-го пациентов также мало отличается от расстояния  $n$  между вестибулярной поверхностью первых зубов до линии, соединяющей выступающие точки вестибулярных поверхностей седьмых зубов. А для 1-го пациента, у которого огибающая зубных рядов имеет более заостренную кпереди форму, полуоси эллипса  $b$  для верхней и нижней челюстей на 10–30% больше расстояния  $n$ .

На рис. 2 показаны огибающие внешних обводов зубных рядов верхней и нижней челюстей, построенные по каноническому уравнению эллипса (11) и данным табл. 2. Ромбиками и треугольниками на рис. 2 даны координаты  $(x_i, y_i)$  выступающих точек на вестибулярной поверхности зубов. Как можно видеть, кривые, построенные по каноническому уравнению эллипса, хорошо описывают форму огибающей зубных рядов верхней и нижней челюстей и отклонения точек  $(x_i, y_i)$  от кривых, построенных по уравнению (11) согласно вышеприведенной методике с коэффициентами, вычисленными по формулам (4)–(12), не превышают величины 2 мм.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Из кривых второго порядка эллипс наилучшим образом описывает форму внешних обводов как верхней, так и нижней челюстей. Это позволяет использовать каноническое уравнение эллипса для математического моделирования формы внешних обводов верхнего и нижнего зубных рядов. В качестве величины малой полуоси в этом каноническом уравнении можно принимать половину расстояния между вестибулярными поверхностями седьмых зубов, а в качестве большой полуоси в зависимости от формы зубных рядов — величину, равную или до 30% большую расстояния от вестибулярной поверхности первых зубов до линии, соединяющей выступающие точки вестибулярных поверхностей седьмых зубов.

Таблица 2

Пациент	Верхняя челюсть				Нижняя челюсть			
	$a$	$m$	$b$	$n$	$a$	$m$	$b$	$n$
1	29,7	29,6	47,1	43,4	28,8	27,6	49,2	34,8
2	24,9	25,0	28,3	28,8	25,0	24,9	35,1	37,9
3	27,1	26,8	35,2	40,6	26,4	26,4	37,4	37,7

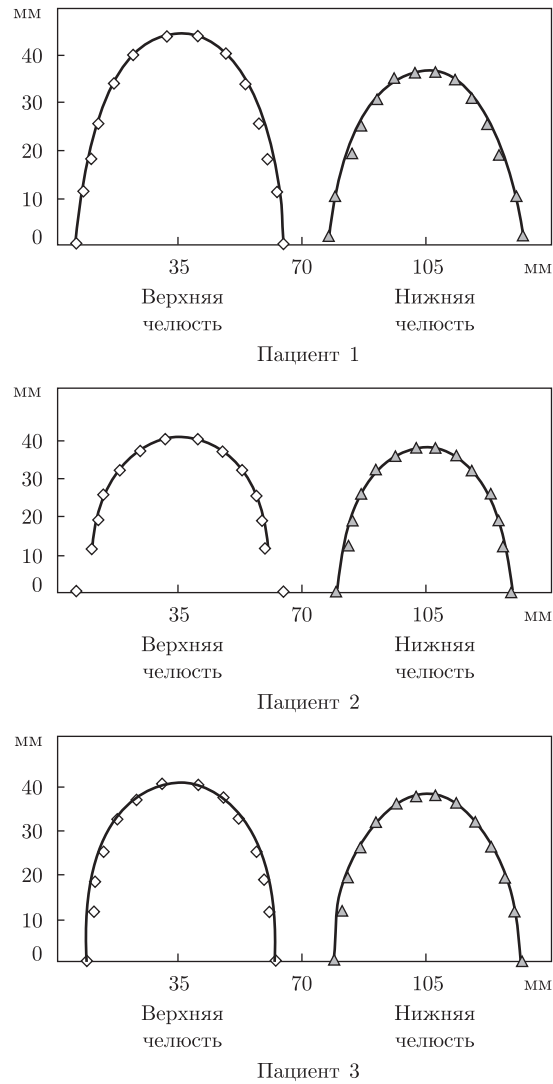


Рис. 2

1. Григоренко Я. М., Неспрядько В. П., Топка П. П., Григоренко А. Я. О влиянии неравномерности напряженного состояния на оценку остаточной мощности периодонта зубов // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 10. – С. 67–73.
2. Григоренко А. Я., Джарбуе М., Дорошенко С. И., Тормахов Н. Н., Флис П. С. Моделирование процесса расширения зубных дуг на основе ортодонтического устройства, оснащенного упругим элементом // Доп. НАН України. – 1999. – № 2. – С. 74–78.
3. Григоренко О. Я., Дорошенко С. І., Жачко Н. І., Тормахов М. М., Фліс П. С. Моделювання процесу повороту зуба при апаратурному лікуванні // Там само. – 2002. – № 7. – С. 183–188.
4. Ортопедическая стоматология / Под. ред. С. И. Криштаб. – Киев: Вища шк., 1986. – 275 с.
5. Персин Л. С. Ортодонтия. Диагностика, виды зубочелюстных аномалий: Учеб. для вузов. – Москва: Ортодент-инфо, 2005. – 51 с.
6. Руководство по ортодонтии / Под ред. Ф. Я. Хорошилкиной. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Медицина, 1999. – 113 с.
7. Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. – Москва: Наука, 1985. – 126 с.

8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1984. – 831 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев  
Национальный медицинский университет  
им. А. А. Богомольца, Киев*

*Поступило в редакцию 04.03.2009*

Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Grigorenko, A. Ya. Grigorenko,  
N. N. Tormakhov, Yu. A. Tril', P. S. Flis**

### **On the form of dental arches at orthognatic occlusion**

*The results of studies of the form of the top and bottom dental arches of the maxilla at orthognatic occlusion in the constant period of a bite are presented. The technique of determination of parameters of the curves which are bending around vestibular surfaces of the top and bottom dental lines is developed. It is shown that, among of curves of the second order, an ellipse describes the form of these curves better, and the minor axis of this ellipse is equal to the distance between vestibular surfaces of the seventh teeth, and the major semiaxis of the ellipse is equal or by up to 30% greater than the distance from the vestibular surface of the first teeth to a line connecting the extreme points of vestibular surfaces of the seventh teeth.*