

Т. В. Карнаухова, В. Г. Карнаухов

Активне демпфування вимушених згинальних резонансних коливань ізотропних в'язкопружних пластин з невідомими граничними умовами при дії на них невідомого механічного навантаження

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Запропоновано новий підхід до активного демпфування вимушених резонансних згинальних коливань ізотропних в'язкопружних пластин за допомогою розподілених п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Механічні граничні умови та механічне навантаження вважаються невідомими. Одержано формулу для компенсуючої зовнішньої механічної навантаження різниці потенціалів, яка визначається через експериментальні показники сенсора.

У роботах [1–3] запропоновано новий підхід до активного демпфування вимушених резонансних згинальних коливань тонких пластин при дії на них невідомого механічного навантаження. При цьому вважалось, що граничні умови відомі.

У даній роботі вказаний підхід узагальнюється на випадок, коли невідомі не тільки механічне навантаження, але й граничні умови. Показано, що різниця потенціалів, яку необхідно подати на актуатор для компенсації механічного навантаження, може бути визначена через експериментальні показники сенсора.

Розглянемо прямокутну пластину розмірами $a \times b$ з ізотропного в'язкопружного матеріалу, на яку діє гармонічний за часом невідомий нерівномірний тиск $p = p_0(x, y)e^{i\omega t}$ з частотою, близькою до резонансної частоти пластини.

Обмежимося випадком тришарової пластини, середній шар якої товщиною h_0 виготовлено з пасивного в'язкопружного ізотропного матеріалу, а два зовнішніх шари однакової товщини h_1 — з п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного матеріалу з однаковими електромеханічними властивостями і протилежним напрямком поляризації. Тоді рівняння руху матиме вигляд:

$$D\Delta\Delta w - \tilde{\rho}\omega^2 w - p_0 - \Delta M_0 = 0. \quad (1)$$

Тут $D = D' + iD''$ — комплексна згинальна жорсткість, яка визначається через електромеханічні характеристики пластини; $\tilde{\rho}$ — приведена густина пластини;

$$M_0 = \gamma_{31}(h_0 + h_1)V_A; \quad (2)$$

V_A — різниця потенціалів, яка підводиться до актуатора.

Рівняння (1) описує коливання пластини при дії на неї механічного навантаження p_0 та електричного навантаження V_A .

Якщо частота електромеханічного навантаження близька до резонансної частоти коливань пластини, розв'язок задачі про вимушені коливання можна подати в одномодовому наближенні

$$w = Af(x, y), \quad (3)$$

де A — невідома амплітуда коливань; $f(x, y)$ — невідома форма резонансних коливань. Для визначення A застосуємо метод Бубнова–Гальоркіна. В результаті одержимо

$$A = \frac{A_1}{A_2},$$

$$A_1 = \iint_{(S)} p_0 f dS + \iint_{(S_1)} f \Delta M_0 dS, \quad A_2 = \iint_{(S)} [Df \Delta \Delta f - \tilde{\rho} \omega^2 f^2] dS. \quad (4)$$

Тут S, S_1 — площі пластини та нанесеного на неї актуатора.

З (4) видно, що амплітуда резонансних коливань дорівнюватиме нулю при виконанні співвідношення

$$\iint_{(S)} p_0 f dS + \iint_{(S_1)} f \Delta M_0 dS = 0. \quad (5)$$

Ввівши позначення

$$M_0 = V_A \varphi(x, y), \quad (6)$$

знайдемо ту різницю потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації дії механічного навантаження:

$$V_A = - \frac{\iint_{(S)} p_0 f dS}{\iint_{(S_1)} f \Delta \varphi dS}. \quad (7)$$

Для визначення V_A необхідно знати чисельник і знаменник виразу (7), які є інтегральними характеристиками. Якщо форма коливань $f(x, y)$, навантаження p_0 , властивості і розміри пластини та актуатора відомі, то V_A легко знаходиться з (7). Але ми вважаємо, що вказані величини невідомі. Для їх визначення розглянемо такі дві задачі.

Задача 1 — це задача про коливання пластини при дії на неї нерівномірного тиску $p_0(x, y)$ і нульової різниці потенціалів $V_A = 0$. Наведемо її розв'язок у вигляді

$$w = w_1 f(x, y). \quad (8)$$

Тут w_1 — невідома амплітуда коливань, а $f(x, y)$ — невідома форма резонансних коливань. Для визначення w_1 застосовуємо метод Бубнова–Гальоркіна. Одержимо співвідношення

$$w_1 A_2 - \iint_{(S)} p_0 f dS = 0. \quad (9)$$

З (9) матимемо

$$w_1 = \frac{\iint_{(S)} p_0 f dS}{A_2}. \quad (10)$$

Розглянемо тепер задачу 2 про коливання пластини при дії на неї нульового механічного тиску $p_0 = 0$ та одиничної різниці потенціалів $V_A = 1$. Подамо її розв'язок у вигляді

$$w = w_2 f(x, y). \quad (11)$$

Для визначення амплітуди w_2 також застосовуємо метод Бубнова–Гальоркіна і використаємо (4). В результаті матимемо

$$w_2 = \frac{\iint_{(S)} f \Delta \varphi dS}{A_2}. \quad (12)$$

З (10) і (12) знаходимо

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\iint_{(S)} p_0 f dS}{\iint_{(S_1)} f \Delta \varphi dS}. \quad (13)$$

З (7) і (13) матимемо

$$V_A = -\frac{w_1}{w_2}. \quad (14)$$

Таким чином, задача визначення тієї різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження, зведена до визначення величин w_1 і w_2 .

Різниця потенціалів, яку показує сенсор при довільному механічному навантаженні, визначається співвідношеннями:

1) для короткозамкнутих електродів з сенсора знімається заряд

$$Q = \gamma_{31}(h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} \Delta w dx dy; \quad (15)$$

2) для розімкнутих електродів різниця потенціалів, яка знімається з сенсора, дається формулою

$$V_S = \frac{\gamma_{31} h_1 (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} \Delta w dx dy}{S_1 \gamma_{33}}. \quad (16)$$

З (16) маємо, що для задачі 1

$$V_S^{(1)} = \frac{\gamma_{31} h_1 (h_0 + h_1)}{S_1 \gamma_{33}} w_1 \iint_{(S_1)} \Delta f dS. \quad (17)$$

Звідси знаходимо

$$w_1 = \frac{S_1 \gamma_{33} V_S^{(1)}}{\gamma_{31} h_1 (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} \Delta f dS}. \quad (18)$$

Аналогічно для задачі 2 знаходимо

$$w_2 = \frac{S_1 \gamma_{33} V_S^{(2)}}{\gamma_{31} h_1 (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} \Delta f dS}. \quad (19)$$

З (18), (19) маємо

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_S^{(1)}}{V_S^{(2)}}. \quad (20)$$

З (14) і (20) одержуємо

$$V_A = -\frac{V_S^{(1)}}{V_S^{(2)}}. \quad (21)$$

Таким чином, для визначення тієї різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації дії невідомого поперечного тиску при резонансних коливаннях пластини з невідомими механічними граничними умовами, необхідно: 1) зняти з сенсора, розміщеного на пластині, різницю потенціалів $V_S^{(1)}$; 2) визначити з експерименту еталонне значення показника сенсора $V_S^{(2)}$ при дії на пластину одиничної різниці потенціалів та нульового механічного тиску. Еталонне значення $V_S^{(2)}$ визначається експериментально до початку роботи пластини, як елемента конструкції. Власна частота коливань пластини також визначається з експерименту.

Хоча всі міркування проведено в декартовій системі координат, одержаний результат має місце для пластин довільної форми.

Легко бачити, що наведені вище судження мають місце не тільки при коливаннях на резонансних частотах, а й у всіх тих випадках, коли прогин може бути представлено у вигляді (3).

1. Карнаухова Т. В. О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 78–82.
2. Карнаухова Т. В. Активное демпфирование вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов // Там само. – 2009. – № 6. – С. 68–72.
3. Карнаухова Т. В. Влияние механических граничных условий на активное демпфирование вынужденных изгибных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин // Там само. – 2009. – № 8. – С. 58–62.

НТУ України “Київський політехнічний інститут”
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.03.2009

T. V. Karnaukhova, V. G. Karnaukhov

The active damping of forced resonant bending vibrations of isotropic viscoelastic plates with unknown boundary conditions and mechanical loading

A new approach to the active damping of forced resonant bending vibrations of viscoelastic isotropic plates by the distributed piezoelectric sensors and actuators is proposed. It is supposed that the boundary conditions and the mechanical load are unknown. A formula for the potential difference to compensate the forced vibrations of plates at the resonant mode is obtained. The potential difference is found by the experimental indications of a sensor.