УДК 551.463.22

РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ ТЕЧЕНИЙ

© А.И. Гончар, Ю.А. Гончар, О.С. Голод, Н.С. Григорьева, 2008

Государственный Северо-Западный технический университет, г. Санкт-Петербург

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины, г. Запорожье

У даній статті вирішено задачу про поширення звуку в неоднорідному середовищі, що рухається, у вигляді рядів по ступенях ε. У цьому випадку нульове наближення відповідає завданню про поширення звуку в нерухливому неоднорідному середовищі, а виправлення, обумовлене наявністю течії, виражається через нульове наближення. Оскильки відношення характерного розміру зміни властивостей середовища по вертикалі до характерного розміру зміни властивостей середовища в горизонтальному напрямку має порядок 10^{-3}, то за допомогою просторово-тимчасового променевого методу вирішено задачу по знаходженню коефіцієнтів ряду по ступенях малого параметра ε.

В данной статье решена задача о распространении звука в неоднородной движущейся среде в виде рядов по степеням ε. В этом случае нулевое приближение соответствует задаче о распространении звука в неподвижной неоднородной среде, а поправка, обусловленная наличием течения, выражается через нулевое приближение. Так как отношение характерного размера изменения свойств среды по вертикали к характерному размеру изменения свойств среды в горизонтальном направлении имеет порядок 10^{-3}, то с помощью пространственно-временного лучевого метода решена задача по нахождению коэффициентов ряда по степеням малого параметра ε.

This article solves the problem about the propagation of sound into nonhomogeneous moving medium in series in terms of power of ε. In this case zeros approximation corresponds to the problem of sound propagation into nonmoving nonhomogenenous medium and the allowance conditioned by availability of current is expressed by zeros approximation. Since the relation of characteristic dimension of change of medium properties in vertical position to characteristic dimension of change of medium properties in horizontal position has the order 10^{-3} the problem for estimation of ratios of series in terms of powers of small parameter ε was solved by the spatio-temporal ray-path method.

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СКОРОСТЬ ЗВУКА, РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА, НЕОДНОРОДНАЯ ДВИЖУЩАЯСЯ СРЕДА, УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Акустические поля течений могут быть как в свободном пространстве, так и вблизи разного рода препятствий, где образуются колебания частиц среды или условия, что вызывают течения.

В условиях реального океана все основные характеристики среды (давление, плотность, температура, скорость движения жидкости) – функции координат и времени (диапазон изменения составляет, в частности: для температуры – от 4 до 40 ^{0}С, давления – от 0 до 1000 бар, плотности – от 1,00 до 1,04 г/см^3, скорости движения жидкости – от 0 до 2,5 м/с, скорости распространения звука – от $1{,}45\cdot10^3$ до $1{,}60\cdot10^3$ м/с). При этом, так как отношение ϑ_{max}/c_{min} не превосходит $2\cdot10^{-3}$, где ϑ_{max} – максимальное значение скорости течения, c_{min} – минимальное значение скорости звука, то при моделировании распространения акустических волн в неоднородном океане с течениями всегда имеется малый параметр ε.

Наша цель состоит в том, чтобы представить решение задачи о распространении звука в неоднородной движущейся среде в виде рядов по степеням ε.

В этом случае нулевое приближение будет соответствовать задаче о распространении звука в неподвижной неоднородной среде, а поправка, обусловленная наличием течения, выразится через нулевое приближение.

Так как отношение характерного размера изменения свойств среды по вертикали к характерному размеру изменения свойств среды в горизонтальном направлении имеет порядок 10^{-2}, то с помощью пространственно-временного лучевого метода [7, 8] решение задач по нахождению коэффициентов ряда по степеням малого параметра ε удается существенно упростить.

Как показывают экспериментальные исследования [1], наличие течений существенно влияет на распространение звука в океане. Необходимость учета движения среды подтверждается и теоретическими работами [2 - 6], в которых рассматривается распространение звука в канале с горизонтальными граничными поверхностями. В [2] в пределах канала скорость звука постоянна, а скорость течения $\vec{\vartheta}$ имеет постоянное направление и величину: $\vec{\vartheta} = \vartheta_x \vec{i} + \vartheta_y \vec{j}$; ϑ_x, ϑ_y=const. В [3] скорость звука также предполагается постоянной, однако скорость течения линейно меняется с глубиной: $\vec{\vartheta} = \vartheta_x(z)\vec{i} + \vartheta_y(z)\vec{j}$; $\vartheta_x(z)$, $\vartheta_y(z)$ – линейные функции z. В работах [4] и [5] скорость звука линейно зависит от глубины, причем в [4] скорость течения имеет постоянное направление и величину, а в [5]: $\vec{\vartheta} = \vartheta(z)\vec{j}$; $\vartheta(z) = \vartheta_0 + \nu z$, где ϑ_0 – скорость течения у источника, ν – градиент скорости течения. Наконец, в [6] для лучевого представления поля получены поправки к оптическим длинам лучей и амплитудам поля на них для произвольного профиля скорости течений в предположении, что скорость звука в канале постоянна (все окончательные формулы в [2 - 6] содержат только линейные члены относительно $\left|\vec{\vartheta}\right| / c_0$, где c_0 – скорость звука у источника. Члены, порядка $\left(\left|\vec{\vartheta}\right| / c_0\right)^2$ отбрасываются, т.к. $\left|\vec{\vartheta}\right| / c_0$ имеет порядок 10^{-3}.

На рис. 1*а* представлен профиль изменения скорости звука *c(z)* по всей глубине океана для района расположения приемного судна. Ось ПЗК находилась на глубине около 300 м. Значение скорости звука у дна превышало его значение у поверхности на 40-50 м/с. Глубина перемешивания приповерхностного слоя составила 35-45 м. Подробное гидрологическое обследование трассы дальнего распространения было проведено несколько дней спустя после окончания опыта. На рис. 1*б* для верхнего 1000-метрового слоя представлены профили *c(z)*, зарегистрированные в начале, в конце и на середине обследованной трассы. Всего вдоль трассы гидрологическим зондом "Исток-3" было зарегистрировано 15 профилей изменения температуры и солености (электропроводности) с глубиной. Максимальная глубина зондирования составила 1000-1200 м. Шаг по расстоянию между соседними гидрологическими станциями составил 25-30 км. По материалам этого обследования для 800-метрового подповерхностного слоя воды было построено поле значений скорости звука, представленное на рис. 1*в*. В приповерхностном перемешанном слое воды скорость звука по мере продвижения на юг вдоль обследуемой трассы изменялась от 1493 до 1510 м/с. Наиболее резкие изменения скорости звука (температуры) с расстоянием в приповерхностном слое наблюдались на участке трассы 130-160 км. Именно с этого участка трассы и далее на юг происходило проникновение теплых вод на глубины до 300-400 м. Трасса дальнего распространения в этом опыте пересекала северную границу зоны, выходящую к поверхности на расстоянии -140-160 км от приемного судна. Средний наклон линий постоянной скорости звука южнее этой границы составил 0.10-0.15°. По мере продвижения на юг происходило их заглубление, составившее -100-150 м на каждые 50 км (см. рис. 1*в*) [10].

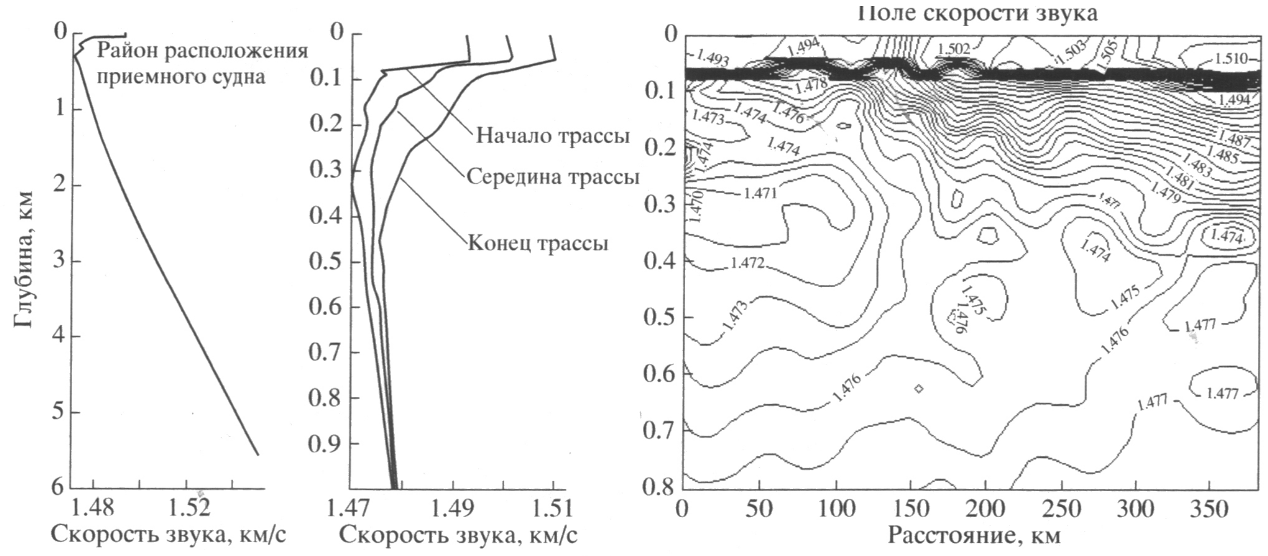

Рис. 1 – Тихий океан. Район субарктического фронта. Профили скорости звука с глубиной: а) у приемного судна (по всей глубине океана), б) – в начале, в середине и в конце трассы (для глубин до 1000 м), в) – поле скорости звука, построенное по материалам гидрологического обследования трассы дальнего распространения (числа у изолиний – скорость звука в км/с) [10]

Уравнения акустики неоднородной движущейся среды. Переход к безразмерным переменным

Общие уравнения движения сжимаемой жидкости выражают законы сохранения вещества, импульса и энергии. Для того чтобы сформулировать эти законы, выберем некоторую систему координат x, y, z, неподвижную относительно невозмущенной среды. Пусть, далее, t – время, $\vec{\vartheta}=(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$ - скорость жидкости в этой системе, ρ и μ - соответственно плотность и вязкость жидкости, а p – скалярное давление в ней. В этих обозначениях закон сохранения вещества, выражаемый уравнением непрерывности, и закон сохранения импульса запишутся в форме [9]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\vec{\vartheta}\right)=0 \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}=-\nabla p+\mu\Delta\vec{\vartheta}+\frac{1}{3}\mu\nabla div\vec{\vartheta}+\rho\vec{g}\,, \qquad (2)$$

где g – вектор ускорения силы тяжести, направленный всегда к центру Земли,
$\rho\vec{g}$ – сила тяжести, действующая на единицу объёма жидкости,
$d\vec{\vartheta}/dt$ - полная производная скорости жидкости $\vec{\vartheta}$ по времени:

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}=\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta},\nabla\right)\vec{\vartheta}=\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}+\nabla\frac{\vartheta^2}{2}+\left[rot\,\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}\right]\cdot$$

Уравнение сохранения энергии, в свою очередь, можно записать в виде [9]:

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{\lambda}{\rho}\Delta\mathrm{T}+\frac{\tilde{Q}}{\rho}, \qquad (3)$$

где T - температура жидкости,
S - ее энтропия,
$\tilde{Q}$ - диссипативная функция

$$\tilde{Q}=\sum_{i;k=1}^{3}S_{ik}\vartheta_{ik}\,, \qquad (4)$$

которая выражается через тензор деформаций ϑ_{ik}:

$$\vartheta_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\right);\ S_{ik}=2\mu\vartheta_{ik};\ S_{ii}=2\mu\vartheta_{ii}-\frac{2}{3}\mu div\vec{\vartheta}, \qquad (5)$$

$$\lambda=\rho c_v\chi,$$

c_v - теплоемкость жидкости при постоянном объёме,
χ - коэффициент теплопроводности жидкости;

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta},\nabla S\right).$$

К выписанным трем законам гидродинамики (1) – (3) следует еще присоединить уравнение состояния жидкости, связывающее давление p, плотность ρ и энтропию S:

$$P=F(\rho, S).$$

Пусть теперь в среде, состояние которой описывается величинами $\vec{\vartheta}$, p, ρ, S, распространяется звук. Исходное состояние среды будем считать устойчивым, а звук будем рассматривать как малое колебание. Тогда при прохождении звука все величины $\vec{\vartheta}$, p, ρ, S получат малые приращения $\vec{\xi},\pi,\delta,\sigma$, то есть $\vec{\xi}$ - скорость звуковых колебаний, π - давление звука, δ - изменение плотности среды, σ - изменение энтропии.

Чтобы получить уравнение акустики неоднородной движущейся среды, заменим в (1) – (3) $\vec{\vartheta}$ на $\vec{\vartheta}+\vec{\xi}$, p на $p+\pi$, ρ на $\rho+\delta$, S на $S+\sigma$ и, ограничиваясь линейным приближением, отбросим члены второго и более высоких порядков относительно малых величин $\vec{\xi},\pi,\delta,\sigma$. Влиянием вязкости и теплопроводности среды на распространение звука пренебрежем. Это означает, что в линейных уравнениях для $\vec{\xi},\pi,\delta,\sigma$ отбрасываются члены пропорциональные вязкости μ и теплопроводности λ (согласно (4), (5), диссипируемое в жидкости тепло $\tilde{Q}$ также принадлежит к числу величин, пропорциональных μ), и мы получаем [9]:

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}+\left[rot\,\vec{\xi},\vec{\vartheta}\right]+\left[rot\,\vec{\vartheta},\vec{\xi}\right]+\nabla\left(\vec{\vartheta},\vec{\xi}\right)=-\frac{\nabla\pi}{\rho}+\frac{\delta}{\rho^2}\nabla p\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\left(\vec{\xi},\nabla\rho\right)+\left(\vec{\vartheta},\nabla\delta\right)+\rho div\vec{\xi}+\delta div\vec{\xi}+\delta div\vec{\vartheta}=0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta},\nabla\sigma\right)+\left(\vec{\xi},\nabla S\right)=0\,, \tag{8}$$

$$\pi=c^2\delta+h\sigma\,, \tag{9}$$

где c^2 – адиабатическая скорость звука:

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S,\quad h=\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho.$$

Пусть для рассматриваемой жидкости p_0 и T_0 – характерные значения давления и температуры, а ρ_0 - значение плотности ρ при $p=p_0$ и $T=T_0$. Определим характерную адиабатическую скорость звука формулой:

$$c_0=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}\,,$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – коэффициент Пуассона (c_p, c_v – теплоемкости среды при постоянном давлении и объёме соответственно), и перейдём от размерных переменных x, y, z, t к новым безразмерным переменным $x^* = x/\ell$, $y^* = y/\ell$, $z^* = z/r$, $t^* = c_0 t/\ell$. Здесь r – характерный размер изменения свойств среды по вертикали, а ℓ - характерный размер изменения свойств среды в горизонтальном направлении.

Введем также новые безразмерные величины $\vec{\vartheta}^*, p^*, \rho^*$, описывающие состояние среды, $\vec{\xi}^*, \pi^*, \delta^*$, описывающие процесс прохождения звука через среду $\vec{\vartheta}^* = \dfrac{\vec{\vartheta}}{\vartheta_0}$, $\vartheta_0 = \max\left|\vec{\vartheta}\right|$; $p^* = \dfrac{p}{p_0}$; $\rho^* = \dfrac{\rho}{\rho_0}$; $\vec{\xi}^* = \dfrac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \xi_0 = \max\left|\vec{\xi}\right|$; $\pi^* = \dfrac{\pi}{p_0}\dfrac{c_0}{\xi_0}, \delta^* = \dfrac{\delta}{\rho_0}\dfrac{c_0}{\xi_0}$.

Очевидно, что p^*, ρ^* - величины порядка единицы; $\left|\vec{\vartheta}^*\right| \le 1$, $\left|\vec{\xi}^*\right| \le 1$.

Предположим, что при распространении звуковых колебаний $\dfrac{\pi}{p_0}\dfrac{c_0}{\xi_0}$ и $\dfrac{\delta}{\rho_0}\dfrac{c_0}{\xi_0}$ также будут величинами порядка единицы (нетрудно убедиться, что в случае плоской волны это условие действительно выполнено).

Если теперь в качестве уравнения состояния взять

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \ell^{\frac{S-\tilde{S}}{c_v}}, \tag{10}$$

где $\tilde{S}$ - энтропия среды при $p = p_0$, $\rho = \rho_0$,
то, заменяя p на $p+\pi$, ρ на $\rho+\delta$, S на $S+\sigma$ и отбрасывая члены второго и более высоких порядков малости относительно малых величин π, δ и σ, получим

$$\frac{\pi}{p_0} = \gamma\frac{\delta}{\rho_0} + \frac{\sigma}{c_v}.$$

Значит, σ/c_v, c_0/ξ_0 по порядку величин не превосходит единицы, поэтому определим безразмерное изменение энтропии σ^*, вызванное прохождением звука, равенством

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{c_v}\frac{c_0}{\xi_0}.$$

Для того, чтобы ввести безразмерную энтропию среды, обратимся к уравнению (3) сохранения энергии. Его левая часть $T\dfrac{dS}{dt}$ представляет собой прирост тепла единицы массы вещества и, значит, этот прирост обусловлен исключительно теплопроводностью и работой сил трения.

Если среда неподвижна, т.е. $\vec{\vartheta} = \vec{0}$, то диссипативная функция обращается в нуль, и уравнение (3) сохранения энергии принимает вид:

$$T\frac{dS}{dt} = T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho}\Delta \mathrm{T}.$$

В этом случае весь прирост тепла единицы массы вещества связан только с теплопроводностью.

При $\vec{\vartheta} = \vec{0}$ естественно предположить, что работа сил трения вызывает прирост тепла единицы массы вещества по порядку величины равный $T(\vec{\vartheta}, \nabla S)$.

Если $T^* = T/T_0$ – безразмерная температура, а $S^* = \dfrac{S - \tilde{S}}{S_0}$ - безразмерное приращение энтропии, то

$$T\left(\vec{\vartheta}, \nabla S\right) = \frac{T_0 \vartheta_0 S_0}{r} T^*\left(\vec{\vartheta}^*, \frac{1}{q}\nabla_* S^*\right), \text{ где } \nabla_* S^* = \frac{\partial S^*}{\partial x^*}\vec{i} + \frac{\partial S^*}{\partial y^*}\vec{j} + q\frac{\partial S^*}{\partial z^*}\vec{k},$$

$Q = \ell/r$ – отношение характерного размера изменения свойств среды в горизонтальном направлении к характерному размеру изменения свойств среды по вертикали; в океане q имеет порядок 10^2.

С другой стороны,

$$\frac{\tilde{Q}}{\rho} = \frac{\mu \vartheta_0^2}{\rho_0 r^2}\frac{1}{\rho^*}\sum_{i,k=1}^{3} S_{ik}^* \vartheta_{ik}^*.$$

Здесь

$$\vec{\vartheta}^* = \left(\vartheta_x^*, \vartheta_y^*, \vartheta_z^*\right);\ \vec{\vartheta}_{11} = \frac{1}{q}\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial x^*};\ \vartheta_{22}^* = \frac{1}{q}\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial y^*};\ \vartheta_{33}^* = \frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial z^*};$$

$$\vartheta_{12}^* = \vartheta_{21}^* = \frac{1}{2q}\left(\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial x^*}\right);\ \vartheta_{13}^* = \vartheta_{31}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*} + \frac{1}{q}\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial x^*}\right);$$

$$\vartheta_{23}^* = \vartheta_{32}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*} + \frac{1}{q}\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial y^*}\right);\ S_{ik}^* = 2\vartheta_{ik}^*;\ S_{ii}^* = 2\vartheta_{ii}^* - \frac{2}{3}\frac{1}{q}div_* \vec{\vartheta}^*;$$

$$div_* \vec{\vartheta}^* = \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial y^*} + q\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial z^*}.$$

Поэтому введем S_0 таким образом, чтобы

$$\frac{T_0 \vartheta_0 S_0}{r} = \frac{\mu \vartheta_0^2}{\rho_0 r^2},$$

то есть положим $S_0 = \dfrac{\mu \vartheta_0}{\rho_0 T_0 r}$.

После перехода в уравнениях (6) – (9) к безразмерным переменным и безразмерным величинам $\vec{\vartheta}^*, p^*, \rho^*, S^*;\ \vec{\xi}^*, \pi^*, \delta^*, \sigma^*$, получаем

$$\frac{\partial \vec{\xi}^*}{\partial t} + \varepsilon\left[rot_* \vec{\xi}^*, \vec{\vartheta}^*\right] + \varepsilon\left[rot_* \vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}^*\right] + \varepsilon\nabla_*\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}^*\right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho^* \gamma}\nabla_* \pi^* + \frac{1}{\gamma}\frac{\delta^*}{p^{*2}}\nabla_* p^*. \tag{11}$$

$$\frac{\partial \delta^*}{\partial t} + \left(\vec{\xi}^*, \nabla_*, \delta^*\right) + \rho^* div_* \vec{\xi}^* + \varepsilon \delta^* div_* \vec{\vartheta}^* = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(\vec{\vartheta}^*, \nabla \sigma^*\right) + \frac{S_0}{c_v}\left(\vec{\xi}^*, \nabla_* S^*\right) = 0, \tag{13}$$

$$\pi^* = c^{*2}\delta^* + h^*\varepsilon^*, \tag{14}$$

где γ- коэффициент Пуассона;

$\varepsilon = \vartheta_0/c_0$.

В океане $\varepsilon \le 2{,}5/1500 < 2\cdot 10^{-3}$, т.е. ε- безразмерный малый параметр задачи

$$rot_* \vec{\xi}^* = \left(\frac{\partial \xi_z^*}{\partial y^*} - q\frac{\partial \xi_y^*}{\partial z^*}\right)\vec{i} + \left(q\frac{\partial \xi_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \xi_z^*}{\partial x^*}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial \xi_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \xi_x^*}{\partial y^*}\right)\vec{k};$$

$$c^{*2} = \left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho^*}\right)_S; \quad h^* = \left(\frac{\partial p^*}{\partial S^*}\right)_\rho.$$

Оценим параметр $\dfrac{S_0}{c_v}=\dfrac{\mu\vartheta_0}{\rho_0 T_0 c_v r}$. Так как для воды μ=1·10^{-2} г/см·с, ρ_0=1 г/см^3, T_0=3·10^2 град., c_v=4·10^7 см^2/с^2·град, то в случае, когда ϑ_0=2·10^2 см/с, r=1·10^5 см, мы получим, что $\dfrac{S_0}{c_v}\approx 1{,}5\cdot 10^{-15}$ и, значит, не умаляя общности, можно положить множитель S_0/c_v равным нулю, а уравнение (13) заменить уравнением

$$\frac{\partial\sigma^*}{\partial t^*}+\varepsilon\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla\sigma^*\right)=0\,. \tag{15}$$

Если теперь в качестве уравнения состояния взять (10), то для коэффициента h^* получится следующее выражение

$$h^*=\left(\frac{\partial p^*}{\partial S^*}\right)_\rho=\frac{S_0}{c_v}\ell^{\frac{S-\tilde{S}}{c_v}},$$

так как $S^*=\dfrac{S-\tilde{S}}{S_0}$.

Таким образом h^* также можно положить равным нулю и заменить уравнение (14) на

$$\pi^*=(c^*)^2\delta^*. \tag{16}$$

При этом

$$\nabla_* P^*=(c^*)^2\,\nabla_*\rho^*+h^*\,\nabla_* S^*\approx(c^*)^2\,\nabla_*\rho^*. \tag{17}$$

Система (11), (12), (15), (16) содержит малый параметр $\varepsilon=\vartheta_0/c_0$, поэтому будем искать $\vec{\xi}^*$, π^*, δ^*, σ^* в виде:

$$\vec{\xi}^*=\sum_{m=0}^{\infty}\vec{\xi}_m\varepsilon^m;\ \pi^*=\sum_{m=0}^{\infty}\pi_m\varepsilon^m;\ \delta^*=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m\varepsilon^m;\ \sigma^*=\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m\varepsilon^m\,. \tag{18}$$

Тогда нулевое приближение в (18) будет соответствовать решению задачи о распространении звука в неоднородной неподвижной среде.

Представление решения задачи о распространении звука в неоднородной движущейся среде в виде (18)

Подставим ряды (18) в систему (11), (12), (15), (16). Тогда в нулевом приближении по ε получим:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_0}{\partial t_0} = -\frac{1}{\gamma\rho^*}\nabla_*\pi + \frac{\delta_0 c^{*2}}{\gamma\rho^{*2}}\nabla_*\rho^*, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial t^*} + \left(\vec{\xi}_0, \nabla_*\rho^*\right) + \rho^* div_*\vec{\xi}_0 = 0\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = 0\,, \tag{21}$$

$$\pi_0 = (c^*)^2\delta_0. \tag{22}$$

Из равенства (21) следует, что σ_0 – не зависит от t^*, то есть

$\sigma_0 = \sigma_0\big|_{t^*=0} = 0$

Уравнение (19), в свою очередь, с помощью формул (17) и (22) можно переписать в форме:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_0}{\partial t^*} = -\frac{1}{\gamma}\nabla_*\left(\frac{\pi_0}{\rho^*}\right).$$

Положив $\Pi_0 = \frac{\pi_0}{\rho^*}$, мы получим для определения $\vec{\xi}_0$ и Π_0 систему:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_0}{\partial t^*} = -\frac{1}{\gamma}\nabla_*\Pi_0, \tag{23}$$

$$\frac{\rho^*}{(c^*)^2}\frac{\partial \Pi_0}{\partial t^*} + \left(\vec{\xi}_0, \nabla_*\rho^*\right) + \rho^* div_*\vec{\varepsilon}_0 = 0\,. \tag{24}$$

Исключим $\vec{\xi}_0$. Для этого продифференцируем уравнение (24) по t^* и воспользуемся формулой (25):

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^{*2}} = \frac{c^{*2}}{\gamma}\Delta_*\Pi_0 + \frac{c^{*2}}{\rho^*\gamma}\left(\nabla_*\Pi_0, \nabla_*\rho^*\right). \tag{25}$$

Следует заметить, что (25) нетрудно преобразовать в уравнение типа волнового. С этой целью достаточно вместо Π_0 ввести новую искомую функцию $\tilde{\Pi}_0$, положив

$$\tilde{\Pi}_0 = \sqrt{\rho^*}\Pi_0.$$

Функция $\tilde{\Pi}_0$ будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_0}{\partial t^{*2}} = \frac{c^{*2}}{\gamma} \Delta_* \tilde{\Pi}_0 + f\, \Pi_0,$$

где

$$f = \frac{1}{4} \frac{c^{*2}}{\gamma \rho^{*2}} \left[\left(\nabla_* \rho^*, \nabla_* \rho^* \right) - 2\rho^* \Delta_* \rho^* \right]. \tag{26}$$

Для определения поправки, обусловленной наличием течения, подставим ряды (18) в систему (11), (12), (15), (16) и приравняем коэффициенты при ε в левых и правых частях полученных уравнений. Тогда для нахождения первого приближения $\vec{\xi}_1, \pi_1, \delta_1, \sigma_1$ будем иметь систему:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t^*} + \frac{1}{\gamma \rho^*} \nabla_* \pi_1 - \frac{\delta_1 c^{*2}}{\gamma \rho^{*2}} \nabla_* \rho^* = \vec{L}_0 \,, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial t^*} + \left(\vec{\xi}_1, \nabla_* \rho^* \right) + \rho^* div_* \vec{\xi}_1 = M_0 \,, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t^*} = -\left(\vec{\vartheta}^*, \nabla_* \sigma_0 \right) = 0 \,, \tag{29}$$

$$\pi_1 = (c^*)^2 \delta_1. \tag{30}$$

Здесь введены обозначения:

$$\vec{L}_0 = -\left[rot_* \vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}_0 \right] - \nabla_* \left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}_0 \right), \tag{31}$$

$$M_0 = -\left(\vec{\vartheta}^*, \nabla_* \delta_0 \right) = \delta_0 div_* \vec{\vartheta}^* \,. \tag{32}$$

Из соотношения (29) сразу же следует, что

$$\sigma_1 = \sigma_1 \big|_{t^*=0} = 0 \,.$$

Сведем оставшиеся уравнения системы к неоднородному уравнению для давления π_1. Подставляя выражение для δ_1 из (30) в уравнения (27), (28) и полагая

$$\Pi_1 = \frac{\pi_1}{\rho^*},$$

получаем

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t_1} + \frac{1}{\gamma} \nabla_* \Pi_1 = \vec{L}_0, \tag{33}$$

$$\frac{\rho^*}{c^{*2}} \frac{\partial \Pi_1}{\partial t^*} + \left(\vec{\xi}_1, \nabla_* \rho\right) + \rho^* div_* \vec{\xi}_1 = M_0. \tag{34}$$

Продифференцировав затем (16) по t^* и воспользовавшись формулой (15), находим, что Π_1 – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t^{*2}} = \frac{c^{*2}}{\gamma} \Delta_* \Pi_1 + \frac{c^{*2}}{\gamma \rho^*} \left(\nabla_* \Pi_1, \nabla_* \rho^*\right) + F_0, \tag{35}$$

где

$$F_0 = \left[\frac{\partial M_0}{\partial t^*} - \rho^* div_* \vec{L}_0 - (\vec{L}_0, \nabla_* \rho^*) \right] \frac{c^{*2}}{\rho^*}.$$

Если же перейти к новой искомой функции $\tilde{\Pi}_1 = \sqrt{\rho^*}\Pi_1$, то $\tilde{\Pi}_1$, функция будет решением уравнения типа волнового (26):

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t^{*2}} = \frac{c^{*2}}{\gamma} \Delta_x \tilde{\Pi}_1 + f\, \tilde{\Pi}_1 + \sqrt{\rho^*} F_0.$$

Зная Π_1, с помощью (35) получаем $\vec{\xi}_1$:

$$\vec{\xi}_1 = -\frac{1}{\gamma} \int^{t^*} \nabla_* \Pi_1 dt^* + \int^{t^*} \vec{L}_0 dt^*.$$

Вполне аналогично, для m–го приближения будем иметь (m=2,3…)

$$\vec{\xi}_m = -\frac{1}{\gamma}\int^{t*}\nabla_*\Pi_m dt + \int^{t*} L_{m-1}dt*;$$

$$\sigma_m = \sigma_m\big|_{t*=0}\,0.$$

Здесь $\Pi_m = \pi_m/\rho*$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} = \frac{c^{*2}}{\gamma}\Delta_*\Pi_m + \frac{c^{*2}}{\gamma\rho*}\left(\nabla_*\Pi_m, \nabla_*\rho*\right) + F_{m-1}.$$

Функции $F_{m-1}, \vec{L}_{m-1}$ выражается через решения задачи на предыдущем шаге:

$$\vec{L}_{m-1} = -\left[rot_*\,\vec{\xi}_{m-1}, \vec{\vartheta}_*\right] - \left[rot_*\,\vec{\vartheta}*, \vec{\xi}_{m-1}\right] - \nabla_*\left[\vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}_{m-1}\right],$$

$$F_{m-1} = \left[\frac{\partial M_{m-1}}{\partial t*} - \rho*\,div_*\vec{L}_{m-1} - \left(\vec{L}_{m-1}, \nabla_*\rho*\right)\right]\frac{c^{*2}}{\rho*},$$

$$M_{m-1} = -\left(\vec{\vartheta}^*, \nabla_*\delta_{m-1}\right) - \delta_{m-1}div_*\vec{\vartheta}^*.$$

Все предыдущие рассмотрения никак не использовали тот факт, что исследуемая задача имеет ещё один малый параметр $1/q = r/\ell$ - отношение характерного размера изменения свойств среды по вертикали к характерному размеру изменения свойств среды в горизонтальном направлении. Наличие такого малого параметра позволяет существенно упростить решение задач по нахождению Π_0 и последующих приближений Π_m, $m=1,2\ldots$ благодаря возможности использования аппарата пространственно-временного лучевого метода [7, 8].

Применение пространственно-временного лучевого метода для нахождения коэффициентов рядов (18)

Будем предполагать, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью $z=0$, а снизу – твердым дном $z=-H(x,y)$. Пусть $\overline{P}$ - постоянное давление на свободной поверхности. Условие непрерывности давления на поверхности $z=0$ и кинематическое граничное условие даются уравнениями

$$P\big|_{z=0} = \overline{P}\;;\;\vartheta_z\big|_{z=0} = 0\,.$$

На твердом дне *z=-H(x,y)* должна обращаться в нуль нормальная компонента скорости $\vec{\vartheta}$:

$$\vartheta_z + \vartheta_x \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = 0\,.$$

Таким образом, коэффициенты рядов (18) (*m*=1,2…) должны удовлетворять граничным условиям:

$$\pi_m\Big|_{z^*=0} = 0,\ \xi_{m,z}\Big|_{z^*=0} = 0\,, \tag{36}$$

$$\xi_{m,z} + \frac{1}{q}\left[\xi_{m,x}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*} + \xi_{m,y}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial y^*}\right] = 0 \quad \text{при}$$

$$z^* = -\frac{1}{r} H\left(x^*\ell, y^*\ell\right) = -H^*\left(x^*\ell, y^*\ell\right). \tag{37}$$

В частности, если *m*=0, то, продифференцировав равенство (37) по *t** и воспользовавшись уравнением (23), мы получим, что при $z^* = -H^*(x^*\ell, y^*\ell)$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z^*} + \frac{1}{q^2}\left[\frac{\partial \Pi_0}{\partial x^*}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \Pi}{\partial y^*}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial y^*}\right] = 0\,. \tag{38}$$

Будем искать решение задачи (25), (36), (38), на основе пространственно-временного лучевого метода, в виде ряда по степеням малого параметра iq^{-1}:

$$\Pi_0 = e^{\frac{q}{i}Q(x^*,y^*,t^*)} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(0)}\left(x^*, y^*, z^* t^*\right), \tag{39}$$

где $Q(x^*, y^*, t^*)$ и $A_j^{(0)}(x^*, y^*, z^*, t^*)$; *j*=0,1,2 функции, подлежащие определению.

Подставляя разложение (39) в (25) и сокращая на экспоненциальный множитель, получаем уравнение:

$$-q^2\left(\frac{\partial Q}{\partial t^*}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j + 2\frac{q}{i}\left(\frac{\partial Q}{\partial t^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial t^*}\left(\frac{i}{q}\right)^j + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^2 A_j^{(0)}}{\partial t^{*2}}\left(\frac{i}{q}\right)^j +$$

$$+\frac{q}{i}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^{*2}}\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j = \frac{c^{*2}}{\gamma}\left\{-q^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j + 2\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x^*}\times\right. \tag{40}$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial x}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\frac{q}{i}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^{*2}}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^2 A_j^{(0)}}{\partial x^{*2}}\left(\frac{i}{q}\right)^j-q^2\left(\frac{\partial Q}{\partial y*}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+2\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial y*}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\frac{q}{i}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{*2}}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^2 A_j^{(0)}}{\partial y^{*2}}\left(\frac{i}{q}\right)^j+q^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^2 A_j^{(0)}}{\partial z^{*2}}\left(\frac{i}{q}\right)^j\Bigg\}+\frac{c^{*2}}{\gamma\rho*}\left\{\frac{\partial\rho*}{\partial x*}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x*}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial x*}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right]+\frac{\partial\rho*}{\partial y*}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y*}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial y*}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right]+q^2\frac{\partial\rho*}{\partial z*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial z*}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right\}=0.$$

Граничные условия (36), (37), в свою очередь, дают:

$$\left.\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right|_{z*=0}=0, \tag{41}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial z*}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\frac{1}{q^2}\left\{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x*}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x*}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial x*}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{H}*}{\partial y*}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y*}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}\left(\frac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial y*}\left(\frac{i}{q}\right)^j\right]\right\}=0 \ \text{при}\ z*=-H*. \tag{42}$$

Приравнивая к нулю коэффициент при q^2 в уравнении (40) и коэффициенты при q^0 в граничных условиях (41), (42), будем иметь

$$W_0\left[A_0^{(0)}\right]=\frac{\partial}{\partial z*}\left[\rho*\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z*}\right]+\frac{\gamma\rho*}{c^{*2}}\omega^2A_0^{(0)}-\rho*\left|\vec{v}\right|^2A_0^{(0)}=0, \tag{43}$$

$$\left.A_0^{(0)}\right|_{z*=0}=0;\quad \left.\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z*}\right|_{z*=-H*}=0 \ . \tag{44}$$

Здесь введем обозначения:

$$\omega = -\frac{\partial Q}{\partial t^*},\ \vec{\upsilon} = \frac{\partial Q}{\partial x^*}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y^*}\vec{j} = \nabla_{\perp} Q .$$

Задача (43), (44) – задача на нахождение собственных значений. Она определяет некоторую связь между ω и $|\vec{\upsilon}|$:

$$\omega = \omega(|\vec{\upsilon}|). \tag{45}$$

Соотношение (45) называется дисперсионным уравнением. Это – аналог уравнения Эйконала.

Учитывая, что $\omega = -\dfrac{\partial Q}{\partial t^*},\ \vec{\upsilon} = \nabla_{\perp} Q,$ соотношение (45) можно записать в форме уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial Q}{\partial t^*} + \omega\left(x^*, y^*, \frac{\partial Q}{\partial x^*},\ \frac{\partial Q}{\partial y^*} \right) = 0, \tag{46}$$

где роль функции Гамильтона играет функция ω.

Характеристиками уравнения (46) являются кривые *x*=x*(t*), y*=y*(t*),* вдоль которых заданы

$$Q_{t^*} = \frac{\partial Q}{\partial t},\quad \upsilon_{x^*} = \frac{\partial Q}{\partial x^*},\quad \upsilon_{y^*} = \frac{\partial Q}{\partial y^*}.$$

Эти кривые находятся из классической канонической системы, соответствующей уравнению Гамильтона-Якоби (46):

$$\begin{gathered} \frac{\partial t^*}{\partial S} = 1,\quad \frac{dx^*}{dS} = \frac{\partial \omega}{\partial \upsilon_{x^*}},\quad \frac{dy^*}{dS} = \frac{\partial \omega}{\partial \upsilon_{y^*}},\quad \frac{d\upsilon_{x^*}}{dS} = \frac{\partial \omega}{\partial x^*}, \\ \frac{d\upsilon_{y^*}}{dS} = \frac{\partial \omega}{\partial y^*},\quad \frac{dQ_{t^*}}{dS} = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

Вектор

$$\vec{\vartheta}_{гр} = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \upsilon_{x^*}}, \frac{\partial \omega}{\partial \upsilon_{y^*}} \right\},$$

называется групповой скоростью. Первые три уравнения системы (47) показывают, что точка *x*=x*(t*), y*=y*(t*)* движется с групповой скоростью.

Кривые $t^*=S$, $x^*=x^*(S)$, $y^*=y^*(S)$ в пространстве x^*, y^*, t^*, определяемые из системы (47), называются пространственно-временными лучами.

Перейдем к нахождению амплитуды нулевого приближения $A_0^{(0)}$. Для этого рассмотрим задачу для первого приближения $A_1^{(0)}$. Приравнивая нулю коэффициент при iq в выражении (40) и коэффициенты при iq^{-1} в граничных условиях (41), (42), будем иметь (см. также (43))

$$W_0\left[A_1^{(0)}\right]=W_1\left[A_0^{(0)}\right], \tag{48}$$

где введено обозначение:

$$W_1\left[A_0^{(0)}\right]=2\frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}\omega\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial t^*}+2\rho^*\left(\vec{v},\nabla_1 A_0^{(0)}\right)+\left(\nabla_1\rho^*,\vec{v}\right)A_0^{(0)}+\frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}\frac{\partial\omega}{\partial t^*}A_0^{(0)}+\rho^*\Delta_1 Q A_0^{(0)}, \tag{49}$$

$$\Delta_\perp Q=\frac{\partial^2 Q}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{*2}},$$

причем

$$A_1^{(0)}\Big|_{z^*=0}=0;\ \frac{\partial A_1^{(0)}}{\partial z^*}=\left(\nabla_1\mathrm{H}^*,\vec{v}\right)A_0^{(0)}\quad при\ \ z^*=-H^*. \tag{50}$$

Задача (48), (50) – неоднородная задача Штурма-Лиувилля на собственном числе. Для того, чтобы найти условие ее разрешимости, умножим обе части уравнения (48) на $A_0^{(0)}$, проинтегрируем полученное равенство по z^* от $-H^*$ до нуля и воспользуемся уравнением (43):

$$\begin{gathered}2\omega\gamma\int\limits_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_0^{(0)}\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial t^*}dz^*+2\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*A_0^{(0)}\left(\vec{v},\nabla_1,A_0^{(0)}\right)dz^*+\\+\int\limits_{-H^*}^{0}\left(\nabla_\perp\rho^*,\vec{v}\right)\left[A_0^{(0)}\right]^2dz^*+\int\limits_{-H^*}^{0}\left(\rho^*\Delta_\perp+\frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}\frac{\partial\omega}{\partial t^*}\right)\left[A_0^{(0)}\right]^2dz^*+\\+\rho^*\left(\tilde{N}_1\mathrm{H}^*,\vec{v}\right)\left[A_0^{(0)}\right]^2\Big|_{z^*=-H^*}.\end{gathered} \tag{51}$$

Соотношению (51) нетрудно придать форму пространственно-временного закона сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left\{\gamma\omega\int\limits_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}\left[A_0^{(0)}\right]^2 dz^*\right\}+div_\perp\left\{\vec{v}\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[A_0^{(0)}\right]dz^*\right\}=0. \qquad (52)$$

Здесь

$$div_\perp\vec{b}=\frac{\partial bx}{\partial x^*}+\frac{\partial by}{\partial y^*}.$$

Пусть теперь $A_0^{(0)}(x^*, y^*, z^*, t^*)$ – решение уравнения (43), зафиксированное соотношением:

$$\int\limits_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*=1. \qquad (53)$$

Тогда

$$A_0^{(0)}=a_0^{(0)}\left(x^*,y^*,t^*\right)\tilde{A}_0^{(0)},$$

где скаляр $a_0^{(0)}(x^*, y^*, t^*)$ играет роль амплитудного множителя, и

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left\{\gamma\omega\left[a_0^{(0)}\right]^2\right\}+div_\perp\left\{\vec{v}\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]dz^*\left[a_0^{(0)}\right]^2\right\}=0. \qquad (54)$$

Запишем равенство (54) в более удобной форме. Для этого обратимся к уравнению (43) для $\tilde{A}_0^{(0)}$. Умножим обе его части на $\tilde{A}_0^{(0)}$ и проинтегрируем по z^* от $-H^*$ до нуля. Тогда мы получим, что

$$\gamma\omega^2\int\limits_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*-\left|\vec{v}\right|^2\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*+\int\limits_{-H^*}^{0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right]\tilde{A}_0^{(0)}dz^*=0,$$

или

$$\gamma\omega^2-\left|\vec{v}\right|^2\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*-\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right]^2 dz^*=0.$$

Продифференцируем теперь последнее равенство по $\left|\vec{v}\right|$:

$$2\gamma\omega\frac{\partial\omega}{\partial\left|\vec{v}\right|}-2\left|\vec{v}\right|\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*-2\left|\vec{v}\right|^2\int\limits_{-H^*}^{0}\rho^*\tilde{A}_0^{(0)}\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial\left|\vec{v}\right|}dz^*- \qquad (55)$$

$$-2\int_{-H*}^{0}\rho*\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z*}\frac{\partial^2\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z^*\partial|\vec{v}|}dz*=0\,.$$

С другой стороны, умножая обе части уравнения (43) для $\tilde{A}_0^{(0)}$ на $\partial\tilde{A}_0^{(0)}$ и интегрируя по $z*$ от $-H*$ до нуля, будем иметь:

$$\int_{-H*}^{0}\frac{\partial}{\partial z*}\left[\rho*\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z*}\right]\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial|\vec{v}|}dz*+\gamma\omega^2\int_{-H*}^{0}\frac{\rho*}{c^{*2}}\tilde{A}_0^{(0)}\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial|\vec{v}|}dz*-$$

$$-|\vec{v}|^2\int_{-H*}^{0}\rho*\tilde{A}_0^{(0)}\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial|\vec{v}|}dz*=0\,,$$

или

$$-|\vec{v}|^2\int_{-H*}^{0}\rho*\tilde{A}_0^{(0)}\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial|\vec{v}|}dz*-\int_{-H*}^{0}\rho*\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z*}\frac{\partial^2\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z*d|\vec{v}|}dz*=0\,, \tag{56}$$

так как

$$\int_{-H*}^{0}\frac{\rho*}{c^{*2}}\tilde{A}_0^{(0)}\frac{\partial\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial|\vec{v}|}dz*=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial|\vec{v}|}\int_{-H*}^{0}\frac{\rho*}{c^{*2}}\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2dz*=0\,.$$

Таким образом (см. (55), (56)),

$$\gamma\omega\frac{\partial\omega}{\partial|\vec{v}|}=|\vec{v}|\int_{-H*}^{0}\rho*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2dz*\,,$$

и значит

$$\vec{\vartheta}_{гр}=\left\{\frac{\partial\omega}{\partial\nu_x},\frac{\partial\omega}{\partial\nu_y}\right\}=\frac{\vec{\nu}}{|\vec{\nu}|}\frac{\partial\omega}{\partial|\vec{\nu}|}=\frac{1}{\gamma\omega}\int_{-H*}^{0}\rho*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2dz*\vec{\nu}\,.$$

Используя полученное выражение для групповой скорости, можно соотношение (54) записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t*}\left\{\gamma\omega\left[a_0^{(0)}\right]^2\right\}+div_1\left\{\gamma\omega\left[a_0^{(0)}\right]^2\vec{\vartheta}гр\right\}=0\,. \tag{57}$$

Проинтегрируем уравнение (57). Будем считать, что у нас имеется поле пространственно-временных лучей, не имеющее особенностей в интересующей нас области. Рассмотрим лучевую трубку – совокупность лучей, пересекающих плоскость $t^*=0$ в точках бесконечно малого прямоугольника $x_0^* \le x^* \le x_0^* + dx_0^*$, $y_0^* \le x^* \le y_0^* + dy_0^*$

Проинтегрируем соотношение (57) по объёму Ω лучевой трубки, вырезанному плоскостями $t^*=0$ и $t^*=const>0$. Применяя формулу Остроградского, получим

$$\int \gamma\omega\left[a_0^{(0)}\right]^2 \left\{\cos\left(\vec{n}^\wedge,\vec{t}\right)+\left(\vec{\vartheta}_{гр.},\vec{n}\right)\right\} d\Sigma = 0\,. \qquad (58)$$

Здесь $\partial\Omega$ – граница объёма Ω.

Интеграл по боковой поверхности лучевой трубки равен нулю, так как вектор $\vec{\varphi}=\left\{\vartheta_{гр}.,x;\vartheta_{гр.},y,1\right\}$ направлен вдоль луча, т.е. лежит в касательной плоскости к боковой поверхности трубки, а подынтегральное выражение пропорционально $(\vec{\varphi},\vec{n})$, где $\vec{n}$ - внешняя нормаль. Таким образом, из соотношения (58) следует равенство интегралов по торцам выделенной трубки и значит

$$\omega\left(x^*,y^*,t^*\right)\left[a_0^{(0)}\left(x^*,y^*,t^*\right)\right]^2 d\Sigma_{t^*} = \omega\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\left[a_0^{(0)}\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\right]^2 d\Sigma_0\,, \qquad (59)$$

или

$$\omega\left(x^*,y^*,t^*\right)\left[a_0^{(0)}\left(x^*,y^*,t^*\right)\right]^2 = \omega\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\left[a_0^{(0)}\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\right]^2 \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma_{t^*}}\,.$$

Пространственно-временной луч в рассматриваемом поле лучей определяется той точкой x_0^*, y_0^*, в которой он пересекается с плоскостью $t^*=0$, поэтому $x^*=x^*(x_0^*, y_0^*, t^*)$, $y^*=y^*(x_0^*, y_0^*, t^*)$

Таким образом, равенство (59) можно переписать в виде:

$$\omega\left(x^*,y^*,t^*\right)\left[a_0^{(0)}\left(x^*,y^*,t^*\right)\right]^2 = \omega\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\left[a_0^{(0)}\left(x_0^*,y_0^*,0\right)\right]^2 \frac{1}{J}\,,$$

$$J=\frac{D(x^*,y^*)}{D(x_0^*,y_0^*)}\,.$$

Решение задачи (49), (50), в свою очередь, будем искать в форме:

$$A_1^{(0)} = \tilde{A}_1^{(0)} + a_1^{(0)}\tilde{A}_0^{(0)}\,.$$

Здесь $\tilde{A}_1^{(0)}$- частное решение (49), удовлетворяющее условиям (50), а функция $a_0^*(x^*, y^*, t^*)$ определяется из условия разрешимости задачи для $A_2^{(0)}$ и т.д. Зная Π_0, находим $\vec{\xi}_0$:

$$\vec{\xi}_0 = -\frac{1}{\gamma}\int^{t^*} \nabla_* \Pi_0 dt = e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*, y^*, t^*\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \vec{\alpha}_j^{(0)} \left(\tfrac{i}{q}\right)^j,$$

в частности,

$$\alpha_{0,x}^{(0)}\vec{i} + \alpha_{0,y}^{(0)}\vec{j} = \frac{1}{\gamma\omega} A_0^{(0)}\vec{v};\ \ \alpha_{0,z}^{(0)} = \frac{i}{\gamma\omega}\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}. \qquad (60)$$

Обратимся теперь к первому приближению по ε, то есть к поправке, обусловленной наличием течения. Будем искать $\Pi_1 = \pi_1/\rho^*$ в виде:

$$\Pi_1 = q^{\alpha} e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*, y^*, t^*\right)} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)}\left(x^*, y^*, z^*, t^*\right)\left(\frac{i}{q}\right)^j, \qquad (61)$$

где $Q(x^*,y^*,t^*)$ – функция, входившая в формулу (39), а постоянная α подлежит определению.

Подставляя разложение (61) в (52), получим, что при $q \to \infty$ (40)

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t^{*2}} - \frac{c^{*2}}{\gamma}\Delta_* \Pi_1 - \frac{c^{*2}}{\gamma\rho^*}\left(\nabla_* \Pi_1 \nabla_* \rho^*\right) = O\left(q^{\alpha+2}\right) e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*, y^*, t^*\right)}.$$

Обратимся теперь к

$$F = \left[\frac{\partial M_0}{\partial t^*} - \rho_* div_* \vec{L}_0 - \left(\vec{L}_0, \nabla_* \rho^*\right)\right]\frac{c^{*2}}{\rho^*},$$

где $\vec{L}_0, M_0$ определяется равенствами (48), (49). Получим вначале выражение для $\vec{L}_0$:

Так как

$$\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\xi}_0\right) = e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*, y^*, t^*\right)} \sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\frac{i}{q}\right)^j,$$

то

$$\nabla_*\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\xi}_0\right)=\nabla_*\left\{e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*,y^*t^*\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*\vec{\alpha}_j^0\right)\left(\frac{i}{q}\right)^j\right\}=$$

$$=\nabla_1\left\{e^{\frac{q}{i}Q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta},\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right\}+qe^{\frac{q}{i}Q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\vec{k}=$$

$$=\frac{q}{i}\nabla_\perp Q\sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j e^{\frac{q}{i}Q}+e^{\frac{q}{i}Q}\sum_{j=0}^{\infty}\nabla_\perp\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+$$

$$+qe^{\frac{q}{i}Q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\frac{i}{q}\right)^j\vec{k}\,.$$

Далее

$$\left[rot_*\vec{\vartheta},\vec{\xi}_0\right]=\left[\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\xi_{0,z}-\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\xi_{0,y}\right]\vec{i}+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\xi_{0,x}-\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\xi_{0,z}\right]\vec{j}+\left[\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\xi_{0,y}-\right.$$

$$\left.-\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\xi_{0,x}\right]\vec{k}=e^{\frac{q}{i}Q}\left\{\left[\left(q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j-\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]\vec{i}+\left[\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]\vec{j}+\left[\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j-\right.$$

$$\left.\left.-\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]\vec{k}\right\}.$$

Поэтому

$$div_* \vec{L}_0 = \frac{\partial L_{0,x}}{\partial x^*} + \frac{\partial L_{0,y}}{\partial y^*} + q\frac{\partial L_{0,z}}{\partial z^*} = -e^{\frac{q}{i}Q}\left\{ -q^2 \left|\nabla_\perp Q\right|^2 \sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + \right.$$

$$+\frac{q}{i}\frac{\partial}{\partial x^*}\left[\frac{\partial Q}{\partial x^*}\sum_{j=o}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] + \frac{q}{i}\frac{\partial}{\partial y^*}\left[\frac{\partial \Theta}{\partial y^*}\sum_{j=o}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] +$$

$$+\frac{q}{i}\frac{\partial \Theta}{\partial x^*}\sum_{j=o}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + \frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y^*}\sum_{j=o}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j +$$

$$+\sum_{j=o}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + \sum_{j=o}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + q^2\sum_{j=o}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j +$$

$$+\frac{q}{i}\frac{\partial \Theta}{\partial x^*}\left[\left(q\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j - \left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^*}\left[\left(q\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j - \left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] +$$

$$+\frac{q}{i}\frac{\partial \Theta}{\partial y^*}\left[\left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j - \left(\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial y^*} - q\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y^*}\left[\left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j - \left(\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial y^*} - q\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right] +$$

$$\left.+q\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\left(\frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial y^*} - q\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j - \left(q\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]\right\};$$

$$\left(\vec{L}_0, \nabla_* \rho^*\right) = L_{0,x}\frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + L_{0,y}\frac{\partial \rho^*}{\partial y^*} + qL_{0,z}\frac{\partial \rho^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \rho^*}{\partial x^*}e^{\frac{q}{i}Q} \times$$

$$\times\left\{\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x^*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*, \alpha_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\vec{\vartheta}^*, \vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j + \left(q\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \vartheta_z^*}{\partial x^*}\right) \times \right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}-\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\Bigg\}-\frac{\partial\rho^*}{\partial y^*}e^{\frac{q}{i}Q}\left\{\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y^*}\times\right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\vec{\vartheta}^*,\alpha_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\alpha_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}-$$

$$-\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,z}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\Bigg\}-q\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}e^{\frac{q}{i}Q}\left\{q\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*\vec{\alpha}_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial\vartheta_z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,y}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}-\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,x}^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\Bigg\}.$$

Рассмотрим теперь $M_0=-\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_*\delta_0\right)-\delta_0 div_*\vec{\vartheta}^*$. Так как

$$\delta_0=\frac{1}{c^{*2}}\pi_0=\frac{\rho^*}{c^{*2}}\Pi_0=e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*,y^*,t^*\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j},$$

то

$$M_0=-\left[\vartheta_x^*\frac{\partial\delta_0}{\partial x^*}+\vartheta_y^*\frac{\partial\delta_0}{\partial y^*}+q\vartheta_z^*\frac{\partial\delta_0}{\partial z^*}+\delta_0\left(\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}q\right)\right]=$$

$$=e^{\frac{q}{i}Q}\left\{\vartheta_x^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\right]+\right.$$

$$+\vartheta_y^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\right]+q\vartheta_z^*\times$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\left(\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}q\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\right\},$$

и значит

$$\frac{\partial M_0}{\partial t^*}=-\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial t^*}e^{\frac{q}{i}Q}\left\{\vartheta_x^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^{j}\right]+\right.$$

$$+\vartheta_y^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]+q\vartheta_z^*\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+\left(\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}q\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\Bigg\}-$$

$$-e^{\frac{q}{i}Q}\frac{\partial}{\partial t^*}\left\{\vartheta_x^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial x^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]+\right.$$

$$+\vartheta_y^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial Q}{\partial y^*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right]+q\vartheta_z^*\times$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j+\left(\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}+q\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^*}{c^{*2}}A_j^{(0)}\left(\tfrac{i}{q}\right)^j\right\}.$$

Таким образом,

$$F_0=\frac{c^{*2}}{\rho^*}e^{\frac{q}{i}Q}q^2\left\{\frac{\rho^*}{c^{*2}}\frac{\partial Q}{\partial t^*}A_0^{(0)}\left(\vartheta_x^*\frac{\partial Q}{\partial x^*}+\vartheta_y^*\frac{\partial Q}{\partial y^*}\right)+i\frac{\partial Q}{\partial t^*}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\vartheta_z^*\rho^*}{c^{*2}}A_0^{(0)}\right)+\right.$$

$$+\rho^*\left[-\left|\nabla_\perp Q\right|^2\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_0^{(0)}\right)+\frac{\partial}{\partial z^{*2}}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_0^{(0)}\right)-i\frac{\partial Q}{\partial x^*}\alpha_{0,z}^{(0)}\frac{\partial\vartheta_x}{\partial z^*}-i\frac{\partial Q}{\partial y^*}\frac{\partial\vartheta_y}{\partial z^*}\alpha_{0,z}^{(0)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\alpha_{0,x}^{(0)}\right)\right]+\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_0^{(0)}\right)-\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\alpha_{0,y}^{(0)}-\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}\alpha_{0,x}^{(0)}\right\}+$$

$$+e^{\frac{q}{i}Q}Q(q)=q^2\frac{c^{*2}}{\rho^*}e^{\frac{q}{i}Q}\left\{-\frac{\rho^*\omega}{c^{*2}}A_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{v}\right)-i\omega\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{\vartheta_z^*\rho^*}{c^{*2}}-A_0^{(0)}\right)-\right.$$

$$-\left|\vec{v}\right|\rho^*\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_0^{(0)}\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\alpha}_0^{(0)}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}\alpha_{0,x}^{(0)}+\right.$$

$$\left.\left.+\rho^*\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\alpha_{0,y}^{(0)}\right]-i\alpha_{0,z}^{(0)}\rho^*\left(\frac{\partial\vec{\vartheta}^*}{\partial z^*};\vec{v}\right)\right\}+e^{\frac{q}{i}Q}Q(q)\,,$$

где введено обозначение:

$$\left(\vec{\vartheta}^*;\vec{v}\right) \equiv \vartheta_x^* \frac{\partial Q}{\partial x^*} + \vartheta_y^* \frac{\partial Q}{\partial y^*}.$$

Воспользуемся формулами (60). Тогда выражение для F_0 можно будет записать в форме:

$$F_0 = -q^2 \frac{c^{*2}}{\gamma\rho^*} e^{\frac{q}{i}Q} f_0\left[A_0^{(0)}\right] + e^{\frac{q}{i}Q} Q(q).$$

Здесь

$$f_0\left[A_0^{(0)}\right] \equiv \gamma\omega\left[\frac{\rho^*}{c^{*2}} A_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{v}\right) + i\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\vartheta_z^*\rho^*}{c^{*2}} A_0^{(0)}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{\omega}\left\{-\rho^*\left(\frac{\partial\vec{\vartheta}^*}{\partial z^*},\vec{v}\right)\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*} + \rho^*\left|\vec{v}\right|^2\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{v}\right)A_0^{(0)} + i\left|\vec{v}\right|^2\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\vartheta_z^*\rho^* - \right. \tag{62}$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{v}\right)\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\right] - i\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vartheta_z^*\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)\right]\right\}.$$

Обратимся теперь к граничным условиям (36), (37) при $m=1$. Продифференцировав равенство (37) по t^* и воспользовавшись уравнением (33), мы получим, что при $z^*=-H^*$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z^*} + \frac{1}{q^2}\left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^*}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y^*}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial y^*}\right] = \frac{\gamma}{q}L_{0,z} + \frac{\gamma}{q^2}\left[\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*}L_{0,x} + \frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*}L_{0,y}\right].$$

Следовательно, $\alpha\geq 0$. Если бы $\alpha=0$, то для нахождения $A_0^{(1)}$ мы получили бы неоднородную задачу Штурма-Лиувилля на собственном числе (43), (62):

$$W_0\left[A_0^{(1)}\right] = f_0\left[A_0^{(0)}\right], \tag{63}$$

$$\left.\frac{\partial A_0^{(1)}}{\partial z^*}\right|_{z^*=-\mathrm{H}^*} = \frac{1}{\omega}\left.\left[\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{v}\right)\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*} + i\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vartheta_z^*\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)\right]\right|_{z^*=-\mathrm{H}^*} = -\frac{i}{\omega}\vartheta_z^*\left.\frac{\partial^2 A_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right|_{z^*=-\mathrm{H}^*}; \tag{64}$$

$$A_0^{(1)}\Big|_{z^*=0} = 0\,.$$

Коэффициент $A_0^{(0)}$ уже определен при рассмотрении приближения, соответствующего отсутствию течения ($\varepsilon=0$), поэтому $f_0[A_0^{(0)}]$ и $-\frac{i}{\omega}\vartheta_z^*\frac{\partial^2 A_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\Big|_{z^*=-H^*}$ - известные функции.

Значит, неоднородная задача Штурма-Лиувилля (63), (64), вообще говоря, не имеет решения. В связи с этим, будем искать Π_1 в виде

$$\Pi_1 = q e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*,y^*,t^*\right)}\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)}\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j . \tag{65}$$

Тогда для $W_0[A_0^{(1)}]$ получится однородное уравнение $W_0[A_0^{(1)}]=0$ с однородными краевыми условиями:

$$A_0^{(1)}\Big|_{z^*=0} = 0;\quad \frac{\partial A_0^{(1)}}{\partial z^*}\Big|_{z^*=-H} = 0\ .$$

Таким образом, $A_0^{(1)} = a_0^{(1)}\tilde{A}_0^{(0)}$, где $\tilde{A}_0^{(0)}$ - решение задачи (43), (44), зафиксированное соотношением (53).

Для определения $a_0^{(1)}$ надо рассмотреть задачу для $A_1^{(1)}$. Приравнивая нулю коэффициент при iq^2 в выражении, полученном в результате подстановки разложения (65) в уравнение (35), будем иметь (см. (43), (49), (62)):

$$W_0\left[A_1^{(1)}\right] = W_0\left[A_0^{(1)}\right] + \frac{1}{i} f_0\left[A_0^{(0)}\right], \tag{66}$$

причем

$$\frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial z^*}\Big|_{z^*=-H^*} = \left(\nabla_1 H^*,\vec{v}\right)A_0^{(1)} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vartheta_z^*\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\right) +$$

$$\frac{i}{\omega}\left(\left(\vartheta_z^*,\vec{v}\right)\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)\Big|_{z^*=-H^*} = \left(\nabla_1 H^*,\vec{v}\right)A_0^{(1)} - \frac{\vartheta_z^*}{\omega}\frac{\partial^2 A_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\Big|_{z^*=-H^*}, \tag{67}$$

$$A_1^{(1)}\Big|_{z^*=0} = 0.$$

Задача (66), (67) – неоднородная задача Штурма-Лиувилля на собственном числе. Для того, чтобы найти условие ее разрешимости, умножим обе части уравнения (66) на $A_0^{(0)}$, проинтегрируем полученное равенство по z^* от $-H^*$ до нуля и воспользуемся уравнением (43) и граничными условиями (44), (67):

$$\int_{-H^*}^{0} A_0^{(0)} W_1\left[A_0^{(1)}\right] dz^* - i\int_{-H^*}^{0} A_0^{(0)} f\left[A_0^{(0)}\right] dz^* = -A_0^{(0)}\rho^*\left[\left(\nabla_1 \mathrm{H}^*, \vec{v}\right) A_0^{(1)} - \frac{\vartheta_z^*}{\omega}\frac{\partial^2 A_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right]\Bigg|_{z^*=-\mathrm{H}^*} . \qquad (68)$$

Примем теперь во внимание, что

$$A_0^{(1)} = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}} A_0^{(0)} .$$

Тогда

$$\int_{-H^*}^{0} A_0^{(0)} W\left[A_0^{(1)}\right] dz^* + \rho^*\left(\nabla_\perp \mathrm{H}^*, \vec{v}\right) A_0^{(0)} A_0^{(1)}\Big|_{z^*=-\mathrm{H}^*} =$$

$$= \int_{-\mathrm{H}^*}^{0} A_0^{(0)}\left\{2 - \frac{\gamma\rho^*\omega}{c^{*2}}\frac{\partial A_0^{(1)}}{\partial t^*} + 2\rho^*\left(\vec{v}, \nabla_\perp A_0^{(1)}\right) + \left(\nabla_\perp \rho^*, \vec{v}\right) A_0^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}\frac{\partial\omega}{\partial t^*} A_0^{(1)} + \rho^*\Delta_1 Q A_0^{(1)}\right\} dz^* + \rho^*\left(\nabla_\perp \mathrm{H}^*, \vec{v}\right) A_0^{(0)} A_0^{(1)}\Big|_{z^*=-\mathrm{H}^*} =$$

$$= \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\int_{-\mathrm{H}^*}^{0} A_0^{(0)}\left\{2\frac{\gamma\rho^*\omega}{c^{*2}}\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial t^*} + 2\rho^*\left(\vec{v}, \nabla_\perp A_0^{(0)}\right) + \frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}\frac{\partial\omega}{\partial t^*} A_0^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \rho^*\Delta_\perp Q A_0^{(0)}\right\} dz^* + \rho^*\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\left(\nabla_\perp \mathrm{H}^*, \vec{v}\right)\left[A_0^{(0)}\right]^2\Big|_{z^*=-\mathrm{H}^*} + 2\gamma\omega\frac{\partial}{\partial t^*}\times$$

$$\times\left(\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right)\int_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}\left[A_0^{(0)}\right] dz^* + 2\left(\vec{v}, \nabla_\perp\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right)\int_{-H^*}^{0}\rho^*\left[A_0^{(0)}\right]^2 dz^*,$$

и равенства (51), (53) дают

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right) + \frac{1}{\gamma\omega}\int_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz^*\left(\vec{v}, \Delta_\perp\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right) = \varphi, \qquad (69)$$

где введено обозначение:

$$\varphi\left(x^*,y^*,t^*\right)=\frac{1}{2\gamma\omega}\left\{i\int_{-H^*}^{0}\tilde{A}_0^{(0)}f\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]dz^*+\frac{\vartheta_z^*\rho^*}{\omega}A_0^{(0)}\frac{\partial^2\tilde{A}_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\bigg|_{z^*=-H^*}\right\}.$$

Как было показано,

$$\vec{\vartheta}_{гр.}=\frac{1}{\gamma\omega}\int_{-H^*}^{0}\rho^*\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2dz^*\vec{\nu};$$

поэтому уравнение (69) можно переписать в форме:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right)+\left(\vec{\vartheta}_{гр.},\nabla_\perp\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right)=\varphi\left(x^*,y^*,t^*\right). \qquad (70)$$

На пространственно-временном луче $t^*=Q,\ x^*=x^*(t^*),\ y^*=y^*(t^*)$ справедливы равенства

$$\frac{dx^*}{dS}=\vartheta_{гр.},x, \qquad \frac{dy^*}{dS}=\vartheta_{гр.},y,$$

и, значит, уравнение (70) вдоль луча принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt^*}\left(\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}}\right)=\varphi\left(x^*,y^*,t^*\right).$$

Решение задачи (66), (67), в свою очередь, будем искать в форме:

$$A_1^{(1)}=\tilde{A}_1^{(1)}+a_1^{(1)}\tilde{A}_0^{(0)},$$

где $\tilde{A}_1^{(1)}$ - частное решение уравнения (66), удовлетворяющее условиям (67), а функция $a_1^{(1)}$ определяется из условия разрешимости задачи для $A_2^{(1)}$ и т.д.

Зная Π_1, с помощью формулы

$$\vec{\xi}_1=-\frac{1}{\gamma}\int^{t^*}\nabla_*\Pi_1dt^*+\int_{\nabla_*}^{t^*}\vec{L}_0dt^*,$$

находим $\vec{\xi}_1$.

Следующие приближения по ε (m=2, 3…) рассматриваются аналогично. При этом разложение $\Pi_m = \dfrac{\pi_m}{\rho^*}$ в ряд по степеням i/q будем иметь вид:

$$\Pi_m = q^m e^{\frac{q}{i}Q\left(x^*,y^*,t^*\right)} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(m)}\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right)\left(\tfrac{i}{q}\right)^j;$$

$Q(x^*,\ y^*,\ t^*)$ – функция, входившая в формулу (39) и, значит, для π^* получается выражение:

$$\pi^* = \rho^* \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m \varepsilon^m = \rho^* e^{\frac{q}{i}Q(x^*,y^*,t^*)} \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon q)^m \sum_{m=0}^{\infty} A_j^m \left(\tfrac{i}{q}\right)^j. \tag{71}$$

Разложение (71) удобно тем, что его нулевое приближение по ε соответствует хорошо изученной задаче о распространении звука в неподвижной среде. С другой стороны, новый безразмерный параметр $\varepsilon q = \dfrac{\vartheta_0}{c_0} q \le 0,2$, поэтому при вычислении по приведенной схеме звуковых полей в океане надо удерживать довольно много членов полученных рядов.

Выясним, не будет ли для расчетов предпочтительнее второй возможный подход к решению рассматриваемой задачи, когда $\vec{\xi}^*, \pi^*, \delta^*, \sigma^*$ пишутся в виде:

$$\vec{\xi}^* = e^{\frac{q}{i}G} \sum_{m=0}^{\infty} \vec{B}_m \left(\tfrac{i}{q}\right)^m,\ \pi^* = e^{\frac{q}{i}G} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \left(\tfrac{i}{q}\right)^m,\ \sigma^* = e^{\frac{q}{i}G} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \left(\tfrac{i}{q}\right)^m, \tag{72}$$

$$\delta^* = \frac{\pi^*}{\left(c^*\right)^2}, \quad \vec{B}_m = \left(B_{m,x}, B_{m,y},\ B_{m,z}\right),$$

здесь $\vec{B}_m, D_m, E_m,\ m = 0,1...$ - функции от x^*, y^*, z^*, t^*, подлежащие определению, $G=G(x^*, y^*, t^*)$ также надо найти.

Последовательность рекурентных задач для определения коэффициентов рядов (72)

Подставим выражение (72) для $\vec{\xi}^*, \pi^*, \delta^*, \sigma^*$ в уравнение (11), (12), (15). При этом в уравнении (11):

$$\frac{\partial \vec{\xi}^*}{\partial t^*} = \frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial t} e^{\frac{q}{i}G} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left(\tfrac{i}{q}\right)^m + e^{\frac{q}{i}G} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t^*} \left(\tfrac{i}{q}\right)^m;$$

$$\left[rot_*\vec{\xi}^*,\vec{\vartheta}^*\right]=\left\{\vartheta_z^* e^{\frac{q}{i}G}\left[q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]-\vartheta_y^* e^{\frac{q}{i}G}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]\right\}x\vec{i}+\left\{\sqrt{x^*}\,e^{\frac{q}{i}G}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]-$$

$$\left.-\vartheta_z^* e^{\frac{q}{i}G}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]\right\}\vec{j}+$$

$$+\vartheta_y^* e^{\frac{q}{i}G}\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]-$$

$$\left.-\vartheta_x^* e^{\frac{q}{i}G}\left[q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]\right\}\vec{k};$$

$$\left[rot_*\vec{\vartheta}^*,\vec{\xi}\right]=e^{\frac{q}{i}G}\left\{\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\}\vec{i}+e^{\frac{q}{i}G}\left\{\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}-\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\right)\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\}\vec{j}+e^{\frac{q}{i}G}\left\{\left(\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}-q\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\right)\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m-\left(q\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}-\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\}\vec{k};$$

$$\nabla_*\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\xi}^*\right)=e^{\frac{q}{i}G}\left\{\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_x^*\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\right.$$

$$+\vartheta_x^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_y^*\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+$$

$$+\vartheta_y^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_z^*\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+$$

$$+\vartheta_z^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\Bigg\}\vec{i}+e^{\frac{q}{i}G}\Bigg\{\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_x^*\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_x^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_y^*\frac{q}{i}\times$$

$$\times\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_y^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+$$

$$+\vartheta_z^*\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\Bigg\}\vec{j}+qe^{\frac{q}{i}G}\Bigg\{\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_x^*\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_y^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\vartheta_z^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\Bigg\}\vec{k};$$

$$-\frac{1}{\rho^*\gamma}\nabla_*\pi^*=-\frac{1}{\rho^*\gamma}e^{\frac{q}{i}G}\Bigg\{\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial D_m}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]\vec{i}+$$

$$+\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]\vec{j}+q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial D_m}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\vec{k}\Bigg\};$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\delta^*}{\rho^{*2}}\nabla_*\rho^*=\frac{1}{\gamma}\frac{\nabla_*\rho^*}{\rho^{*2}}-\pi^*=\frac{1}{\gamma\rho^{*2}}e^{\frac{q}{i}G}\left[\frac{\partial\rho^*}{\partial x^*}\vec{i}+\frac{\partial\rho^*}{\partial y^*}\vec{j}+q\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}\vec{k}\right]\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m,$$

а в уравнениях (12), (15):

$$\frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial\pi^*}{\partial t^*}=\frac{1}{c^{*2}}e^{\frac{q}{i}G}\left\{\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial t^*}\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\frac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial D_m}{\partial t^*}\left(\frac{i}{q}\right)^m\right\};$$

$$\left(\vec{\xi}^*,\nabla_*\rho^*\right)=e^{\frac{q}{i}G}\left\{\frac{\partial\rho^*}{\partial x^*}\sum_{m=o}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\frac{\partial\rho^m}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+q\frac{\partial\rho^m}{\partial z^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,z}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\};$$

$$\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_*\frac{\pi^*}{c^{*2}}\right)=\left(\vec{\vartheta}^*,\frac{1}{c^*}\nabla_*\pi^*\right)+\left(\vec{\vartheta}\ ,\pi^*\nabla_*\frac{1}{c^{*2}}\right)=\frac{1}{c^{*2}}e^{\frac{q}{i}G}\left\{\vartheta_x^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\frac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial D_m}{\partial x^*}\left(\frac{i}{q}\right)^m\right]+e^{\frac{q}{i}G}\left[\vartheta_x^*\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{1}{c^{*2}}\right)+\vartheta_y^*\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{1}{c^{*2}}\right)+\right.$$

$$\left.+q\vartheta_z^*\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{1}{c^{*2}}\right)\right]\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\frac{i}{q}\right)^m;$$

$$\rho^*div_*\vec{\xi}^*=\rho^*e^{\frac{q}{i}G}\left\{\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,x}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,x}}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\right.$$

$$\left.+\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,y}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,y}}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial B_{m,z}}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\};$$

$$\frac{\pi^*}{c^{*2}}div_*\vec{\vartheta}^*=\frac{1}{c^{*2}}\left[\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial y^*}+\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}\right]e^{\frac{q}{i}G}\sum_{m=0}^{\infty}D_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m;$$

$$\partial\sigma^*=e^{\frac{q}{i}G}\left\{\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial t^*}\sum_{m=0}^{\infty}E_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial E_m}{\partial t^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\};$$

$$\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_*\sigma^*\right)=e^{\frac{q}{i}G}\left\{\vartheta_x^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}\sum_{m=0}^{\infty}E_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial E_m}{\partial x^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]+\right.$$

$$\left.+\vartheta_y^*\left[\frac{q}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}\sum_{m=0}^{\infty}E_m\left(\tfrac{i}{q}\right)^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial E_m}{\partial y^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right]+q\vartheta_z^*\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial E_m}{\partial z^*}\left(\tfrac{i}{q}\right)^m\right\}.$$

Приравнивая коэффициенты при q^1 в левой и правой частях уравнений (11), (12), (15) и сокращая на экспоненту, получаем:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial t^*}\vec{B}_0+\varepsilon\left\{\left[\vartheta_z^*\left(\frac{\partial B_{0,x}}{\partial z^*}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,z}\right)-\vartheta_y^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,y}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,x}\right)\right]\vec{i}+\right.$$

$$\left[\vartheta_x^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,y}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,x}\right)-\vartheta_z^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,z}-\frac{\partial B_{0,y}}{\partial z^*}\right)\right]\vec{j}+$$

$$\left.+\left[\vartheta_y^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,z}-\frac{\partial B_{0,y}}{\partial z^*}\right)-\vartheta_x^*\left(\frac{\partial B_{0,x}}{\partial z^*}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,z}\right)\right]\vec{k}\right\}+ \tag{73}$$

$$+\varepsilon\left\{\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}B_{0,z}\vec{i}+\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}B_{0,z}\vec{j}-\left(\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}B_{0,y}+\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}B_{0,x}\right)\vec{k}\right\}+$$

$$+\varepsilon\left\{\frac{1}{i}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{B}_0\right)\nabla_\perp G+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{B}_0\right)\vec{k}\right\}=\frac{1}{\rho^*\gamma}D_0\nabla_\perp G-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{D_0}{\rho^*}\right)\vec{k},$$

$$\frac{1}{ic^{*2}}\frac{\partial G}{\partial t^*}D_0+\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}B_{0,z}+\rho^*\left\{\frac{1}{i}\left(\vec{B}_0,\nabla_\perp G\right)+\frac{\partial B_{0,z}}{\partial z^*}\right\}+\varepsilon\frac{1}{ic^{*2}}\times$$

$$\times D_0\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_\perp G\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\vartheta_z^*}{c^{*2}}D_0\right)=0, \tag{74}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial t^*}E_0+\varepsilon\left\{\frac{1}{i}E_0\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_\perp G\right)+\vartheta_z^*\frac{\partial E_0}{\partial z^*}\right\}=0, \tag{75}$$

где $\left(\vec{B}_0,\nabla_\perp G\right)=B_{0,x}\dfrac{\partial G}{\partial x^*}+B_{0,y}\dfrac{\partial G}{\partial y^*}$

Будем $\vec{B}_0, D_0$ и E_0, в свою очередь, искать в форме рядов по степеням малого параметра:

$$\vec{B}_0=\sum_{j=0}^{\infty}B_0^j\varepsilon^j;\ D_0=\sum_{j=0}^{\infty}D_0^j\varepsilon^j;\ E_0=\sum_{j=0}^{\infty}E_0^j\varepsilon^j. \tag{76}$$

Тогда в нулевом приближении по ε

$$\frac{\partial G}{\partial t^*}B_{0,x}^{(0)}=-\frac{1}{\rho^*\gamma}\frac{\partial G}{\partial x^*}D_0^{(0)}, \tag{77}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t^*} B_{0,y}^{(0)} = -\frac{1}{\rho^* \gamma} \frac{\partial G}{\partial y^*} D_0^{(0)}, \tag{78}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t^*} B_{0,z}^{(0)} = -\frac{i}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{D_0^{(0)}}{\rho^*} \right), \tag{79}$$

$$\frac{1}{ic^{*2}} \frac{\partial G}{\partial t^*} D_0^{(0)} + \frac{\partial \rho^*}{\partial z^*} B_{0,z}^{(0)} + \rho^* \left\{ \frac{1}{i} \left(\vec{B}_0^{(0)}, \nabla_\perp G \right) + \frac{\partial B_{0,z}^{(0)}}{\partial z^*} \right\} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial G}{\partial t^*} E_0^{(0)} = 0. \tag{81}$$

Из равенства (81) сразу же следует, что $E_0^{(0)}=0$. Если же подставить выражение для $B_{0,x}^{(0)}$, $B_{0,y}^{(0)}$, $B_{0,z}^{(0)}$ из (77) – (79) в (80), то для $\widehat{D}_0^{(0)} \equiv D_0^{(0)} \left(\rho^* \right)^{-1}$ мы получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[\rho^* \frac{\partial \widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*} \right] + \frac{\gamma \rho^*}{c^{*2}} \widehat{D}_0^{(0)} - \rho^* \left| \vec{i} \right|^2 \widehat{D}_0^{(0)} = 0, \tag{82}$$

где введены обозначения

$$x = -\frac{\partial G}{\partial t^*}, \quad \vec{i} = \frac{\partial G}{\partial x^*} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y^*} \vec{j}.$$

Будем по-прежнему предполагать, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью $z^*=0$, а снизу – твердым дном $z^*=-H^*$. Тогда граничные условия запишутся в виде (см. (72)):

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m \left(x^*, y^*, 0, t^* \right) \left(\tfrac{i}{q} \right)^m = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,z} \left(x^*, y^*, 0, t^* \right) \left(\tfrac{i}{q} \right)^m = 0,$$

$$\sum_{m=o}^{\infty} B_{m,z} \left(\tfrac{i}{q} \right)^m + \frac{1}{q} \left[\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial x^*} \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,x} \left(\tfrac{i}{q} \right)^m + \frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial y^*} \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,y} \left(\tfrac{i}{q} \right)^m \right] \Bigg|_{z^*=-H^*} = 0. \tag{83}$$

Приравнивая нулю коэффициент при q^0 в равенстве (83), получаем, что

$$D_0 \big|_{z^*=0} = 0; \quad B_{0,z} \big|_{z^*=0} = 0; \quad B_{0,z} \big|_{z^*=-H^*} = 0, \tag{84}$$

и значит (см. (76), (79))

$$\widehat{D}_0^{(0)}\Big|_{z^*=0}=0;\quad \frac{\partial \widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\Bigg|_{z^*=-H^*}=0. \tag{85}$$

Таким образом, (82), (85) – задача на нахождение собственных значений и собственных функций, совпадающая с уже рассмотренной задачей (43), (44).

Перейдем к нахождению амплитуды $d_0^{(0)}(x^*,y^*,t^*)$ нулевого приближения:

$$\widehat{D}_0^{(0)}\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right)=d_0^{(0)}\left(x^*,y^*,t^*\right)\tilde{D}_0^{(0)}\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right);$$

$\tilde{D}_0^{(0)}$ – решение уравнения (82), удовлетворяющее граничным условиям (85) и зафиксированное, например, соотношением:

$$\int_{-H^*}^{0}\frac{\rho^*}{c^{*2}}\left[\tilde{D}_0^{(0)}\right]^2 dz^*=1.$$

Для этого рассмотрим задачу для первого приближения по ε. Так как $E_0^{(0)}=0$, то уравнение (75) сразу же дает, что и $E_0^{(1)}=0$. Из уравнений (73), (74), в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial t^*}\vec{B}_0^{(1)}-\frac{i}{\rho^*\gamma}D_0^{(1)}\nabla_\perp G+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{D_0^{(1)}}{\rho^*}\right)\vec{k}=\\
&=-\left[\vartheta_z^*\left(\frac{\partial B_{0,x}^{(0)}}{\partial z^*}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,z}^{(0)}\right)-\vartheta_y^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,x}^{(0)}\right)\right]\vec{i}-\\
&-\left[\vartheta_x^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,y}^{(0)}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,x}^{(0)}\right)-\vartheta_z^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,z}^{(0)}-\frac{\partial B_{0,y}^{(0)}}{\partial z^*}\right)\right]\vec{j}-\\
&-\left[\vartheta_y^*\left(\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial y^*}B_{0,z}^{(0)}-\frac{\partial B_{0,y}^{(0)}}{\partial z^*}\right)-\vartheta_x^*\left(\frac{\partial B_{0,x}^{(0)}}{\partial z^*}-\frac{1}{i}\frac{\partial G}{\partial x^*}B_{0,z}^{(0)}\right)\right]\vec{k}-\\
&-\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*}B_{0,z}^{(0)}\vec{i}-\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*}B_{0,z}^{(0)}\vec{j}+\left(\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial z^*}B_{0,y}^{(0)}+\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial z^*}B_{0,x}^{(0)}\right)\vec{k}-\\
&-\frac{1}{i}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{B}_0^{(0)}\right)\nabla_\perp G-\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{B}_0^{(0)}\right)\vec{k};
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\frac{1}{ic^{*2}}\frac{\partial G}{\partial t^*}D_0^{(1)}+\frac{\partial\rho^*}{\partial z^*}B_{0,z}^{(1)}+\rho^*\left\{\frac{1}{i}\left(\vec{B}_0^{(1)},\nabla G\right)+\frac{\partial B_{0,z}^{(1)}}{\partial z^*}\right\}=$$
$$=-\frac{1}{ic^{*2}}D_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\nabla_\perp G\right)-\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\vartheta_z^*}{c^{*2}}D_0^{(0)}\right). \tag{87}$$

Воспользовавшись равенствами (74) – (79):

$$B_{0,x}^{(0)}=\frac{1}{x\gamma}\frac{\partial G}{\partial x^*}\widehat{D}_0^{(0)},\quad B_{0,y}^{(0)}=\frac{1}{x\gamma}\frac{\partial G}{\partial y^*}D_0^{(0)};\quad B_{0,z}^{(0)}=\frac{i}{x\gamma}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*},$$

векторное уравнение (86) можно записать в виде трех скалярных:

$$B_{0,x}^{(1)}=-\frac{i}{x}\left[\frac{i}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial x^*}\widehat{D}_0^{(1)}+R_{0,x}^{(0)}\right],\quad \widehat{D}_0^{(1)}=\frac{D_0^{(1)}}{\rho^*}, \tag{88}$$

$$B_{0,y}^{(1)}=-\frac{i}{x}\left[\frac{i}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial y^*}\widehat{D}_0^{(1)}+R_{0,y}^{(0)}\right], \tag{89}$$

$$B_{0,z}^{(1)}=-\frac{i}{x}\left[-\frac{i}{\gamma}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(1)}}{\partial z^*}+R_{0,z}^{(0)}\right], \tag{90}$$

где введены обозначения:

$$R_{0,x}^{(0)}=-\frac{1}{\gamma x}\left\{i\frac{\partial\vartheta_x^*}{\partial z^*}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}-i\frac{\partial G}{\partial x^*}\widehat{D}_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+\vartheta_z^*\frac{\partial G}{\partial x^*}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right\},$$

$$R_{0,y}^{(0)}=-\frac{1}{\gamma x}\left\{i\frac{\partial\vartheta_y^*}{\partial z^*}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}-i\frac{\partial G}{\partial y^*}\widehat{D}_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+\vartheta_z^*\frac{\partial G}{\partial y^*}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right\},$$

$$R_{0,z}^{(0)}=-\frac{1}{\gamma x}\left\{i\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial x^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+i\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vartheta_z^*\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)\right\}.$$

Представим теперь выражения (88) – (90) для $B_{0,x}^{(1)}, B_{0,y}^{(1)}, B_{0,z}^{(1)}$ в (87). Тогда уравнение для $\widehat{D}_0^{(1)}$ примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial\widehat{D}_0^{(1)}}{\partial z^*}\right]+\frac{\gamma\rho^*}{c^{*2}}x^2\widehat{D}_0^{(1)}-\rho^*\left|\vec{\tau}\right|^2\widehat{D}_0^{(1)}=R_0^{(1)}\left[\widehat{D}_0^{(0)}\right], \qquad (91)$$

$$R_0^{(1)}\left[\widehat{D}_0^{(0)}\right]=\frac{\gamma x\rho^*}{c^{*2}}\widehat{D}_0^{(0)}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+ijx\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\vartheta_z^*\rho^*}{c^{*2}}\widehat{D}_0^{(0)}\right)-$$

$$-\frac{1}{x}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\rho^*\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)-\frac{i}{x}\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\rho^*\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\vartheta_z^*\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\right)\right]-$$

$$-\frac{2\rho^*}{x}\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\left(\frac{\partial\vec{\vartheta}^*}{\partial z^*},\vec{\tau}\right)+\widehat{D}_0^{(0)}\frac{\rho^*}{x}\left|\vec{\tau}\right|^2\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+\frac{i\rho^*}{x}\vartheta_z^*\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\left|\vec{\tau}\right|^2,$$

причем (см. (84))

$$\left.\widehat{D}_0^{(1)}\right|_{z^*=0}=0,\quad \left.B_{0,z}^{(1)}\right|_{z^*=-H^*}=0, \qquad (92)$$

и значит (см. (85), (90)),

$$\left.\frac{\partial\widehat{D}_0^{(1)}}{\partial z^*}\right|_{z^*=-H^*}=\left.\gamma R_{0,z}^{(0)}\right|_{z^*=-H^*}=-\frac{1}{x}\left\{\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}\left(\vec{\vartheta}^*,\vec{\tau}\right)+i\frac{\partial\vartheta_z^*}{\partial z^*}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^*}+i\vartheta_z^*\frac{\partial^2\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right\}\right|_{z^*=-H^*}=-\frac{i}{x}\vartheta_z^*\left.\frac{\partial^2\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right|_{z^*-H^*}. \qquad (93)$$

Задача (91) – (93) – неоднородная задача Штурма-Лиувилля на собственном числе. Для того, чтобы найти условие ее разрешимости, умножим обе части уравнения (91) на $\widehat{D}_0^{(0)}$, проинтегрируем полученное равенство по z^* от $-H^*$ до нуля и воспользуемся соотношениями (82), (85):

$$\int\limits_{-H^*}^{0}\widehat{D}_0^{(0)}R_0^{(1)}\left[\widehat{D}_0^{(0)}\right]dz^*=\frac{i}{\gamma}\rho^*\vartheta_z^*\widehat{D}_0^{(0)}\left.\frac{\partial^2\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right|_{z^*=-H^*},$$

или

$$\left[d_0^{(0)}\right]^2\left\{\int\limits_{-H^*}^{0}\widehat{D}_0^{(0)}R_0^{(1)}\left[\widehat{D}_0^{(0)}\right]dz^*-\frac{i}{\gamma}\rho^*\vartheta_z^*\widehat{D}_0^{(0)}\left.\frac{\partial^2\widehat{D}_0^{(0)}}{\partial z^{*2}}\right|_{z^*=-H^*}\right\}=0.$$

Так как выражение, стоящее в фигурных скобках последнего равенства, вообще говоря, в нуль не обращается, то задача (91) – (93) разрешена только в том случае, если амплитуда $d_0^{(0)}(x^*, y^*, t^*) \equiv 0$, то есть $D_0^{(0)}(x^*, y^*, z^*, t^*)\equiv 0$. Аналогично, $D_0^{(j)}(x^*, y^*, z^*, t^*)\equiv 0$ при j=1,2,… Значит, при построении нулевого приближения по q функций $\vec{\xi}^*, \pi^*, \sigma^*$ это нулевое приближение нельзя представлять в виде рядов по степеням малого параметра ε.

Моделирование на ПЭВМ показывает, что, при наличии течений, подводный волновод может образоваться в тех условиях, где стандартные методы (без учета течений) его не обнаруживают.

Литература

1. Sanford T.B. Observations of strong current shears in the deep ocean and some implications on sound rays. – J. Acoust. Soc. America, 1974, u.56, № 4, P.1118-1121.

2. Stallworth L.A., Jacobson M.J. Acoustic propagation in an isospeed channel with uniform tidal current and depth change. – J.Acoust. Soc. America,1970, v.48, № 1, P.382-391.

3. Stallworth L.A., Jacobson M.J. Sound transmission in an isospeed ocean channel with depth-dependent current. J.Acoust. Soc. America, 1972, v.51, № 5, P.1738-1750.

4. Stallworth L.A., Jacobson M.J. Acoustic propagation in an uniformy moving ocean channel with depth-dependent sound speed. – J.Acoust. Soc. America, 1972, v.52, № 1, P.344-355.

5. Franchi E.R., Jacobson M.J. Ray propagation in a channel with depth-variable sound-speed and carrent. – J.Acoust. Soc.America, 1972, v.52, № 1, P.316-331.

6. Голод О.С., Григорьева Н.С. Оценка влияния течения на поле давления монохроматического точечного источника в однородном океане. Акустический журнал, т. 28, вып. 6, 1982.

7. Барридж Р., Вейнберг Г. Горизонтальные лучи и вертикальные моды. – В кн.: Распространение волн и подводная акустика, М., Мир, 1980, С.76-125.

8. Бабич В.М., Булдырев В.С. Молотков И.А. Метод возмущений в теории распространения волн (пространственно-временной метод, линейные и нелинейные уравнения). – В кн.: Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. М., 1979, С.28-143.

9. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М., Наука, изд. 2-е, 1981, 206 с.

10. Вадов Р.А. Дальнее распространение звука в районе субарктического фронта//Акустический журнал, 2008, том 54, №2, С.251-261