УДК 551.46

ОБРАБОТКА СЕЧЕНИЙ РЕЛЬЕФА ДНА В ГИДРОЛОКАТОРАХ БОКОВОГО ОБЗОРА

© О.С. Голод, А.И. Гончар, Ю.А. Гончар, Л.И. Шлычек, 2007

Государственный Северо-Западный технический университет, г. Санкт – Петербург

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины, г. Запорожье

Представлений алгоритм усереднення (вільний від недоліку в роботі [2]) результатів вимірювання для підвищення точності визначення перерізів рельєфу дна за допомогою фазових гідролокаторів бокового огляду.

Представлен алгоритм усреднения (свободный от недостатка в работе [2]) результатов измерения для повышения точности определения сечений рельефа дна с помощью фазовых гидролокаторов бокового обзора.

Equalization algorithm of results of the measurement for increasing of the accuracy of the section bottom relief determination with the help of phase side-scan sonar devices (free of the failing in the work [2]) is presented.

УСРЕДНЕНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, СЕЧЕНИЕ РЕЛЬЕФА ДНА, ТОЧНОСТЬ, ФУНКЦИЯ

Фазовые гидролокаторы бокового обзора используются для получения сечений рельефа дна плоскостью, перпендикулярной направлению движения судна [1, 2].

Сечения представляют собой нестационарные случайные функции времени, содержащие детерминированную составляющую, описывающую форму рельефа, и некоррелированную от посылки к посылке флюктуационную составляющую, обусловленную спецификой измерения. Для повышения точности измерений рельефа дна целесообразно уменьшать скорость судна с целью увеличения числа реализаций от участка дна и последующего усреднения результатов измерений.

Рассмотрим алгоритм усреднения. В работе [3] предложен алгоритм несмещенной оценки математического ожидания нестационарного случайного процесса. Его главным недостатком является то, что на конечном шаге можно получить несмещенную оценку только тогда, когда математическое ожидание $M_x(t)$ есть полином от t, а значит при больших t | $M_x(t)$ | неограниченно растет. Предлагается аналогичный алгоритм, свободный от такого недостатка. Предположим, что $M_x(t)$ есть периодическая функция, это на наш взгляд более соответствует задаче оценки рельефа дна.

Пусть система ортонормированных функций $\{u_n(t)\}$ n=0,1,2,... есть базис некоторого функционального пространства, и в этом пространстве задан линейный оператор E(T), зависящий от T как от параметра. Пусть оператор E(T) обладает следующими свойствами:

$$E(T)u_n = \lambda_n(T)u_n,$$

$$\lim_{T\to\infty}\lambda_n(T) = 0,\ \forall_n \neq 0; \qquad (1)$$

$$u_0(t) = const, \quad \lambda_0 = 1.$$

Тогда оператор E(T) называется оператором сглаживания.

Простейшим примером построенной конструкции является следующий:

$$u_n(t)=e^{in\frac{t}{T}}, \quad n=0,\pm 1,\pm 2...$$

$$E(T)\varphi=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad \lambda_n=\lambda_{-n}=\frac{\sin\left(\frac{nT}{2T_0}\right)}{\left(\frac{nT}{2T_0}\right)}. \tag{2}$$

Построим последовательность операторов {E_n} n=0,1,2… такую, что

$$E_0u_0=u_0;$$

$$E_1u_0=u_0,\; E_1u_1=u_1; \tag{3}$$

$$\{E_nu_k=u_k\},\; |k|\le n.$$

Эту задачу можно легко решить, представив E_n в виде полинома достаточно высокой степени от оператора E(T). Чтобы удовлетворить равенствам (3), надо иметь в операторе E_n (n + 1) варьируемый коэффициент, т.е. минимальной степенью оператора E_n как полинома от E(T) является n + 1. Но выбирать такое «минимальное» решение вовсе не обязательно.

Величину $E_n x(t)\equiv M_x^{(n)}$ назовем оценкой математического ожидания случайного процесса x (t).

Смещение оценки математического ожидания определяется по формуле:

$$\Delta\left[\mathrm{M}_n^{(n)}\right]=\mathrm{M}_x\left[\mathrm{M}_x^{(n)}-\mathrm{M}_x\right]=\mathrm{M}_x^{(n)}M_x-M_x=E_nM_x-M_x,$$

где $\mathrm{M}_x=\int\omega(x,t)\,x\,dx$ - математическое ожидание.

Итак, смещение оценки математического ожидания есть нуль, если $E_nM_x=M_x$, что справедливо, если $M_x=\sum_{k=0}^{n}m_ku_k$, m_k – некоторые коэффициенты. Для примера (2) последнее утверждение означает, что M_x есть T_0 – периодическая функция времени t.

Главным критерием при выборе последовательности операторов {E_n} является минимизация дисперсии

$$\sigma^2\left\{\mathrm{M}_x^{(n)}\right\}=\mathrm{M}_x\left\{\mathrm{M}_x^{(n)}-M\left[\mathrm{M}_x^{(n)}\right]\right\}^2=M\{E_n(x-M_x)\}^2\quad. \tag{4}$$

Если ввести ядра операторов E_n:

$$E_n\varphi(t)=\int\varepsilon_n(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\,, \tag{5}$$

то (4) приобретет вид:

$$\sigma^2\left\{\mathrm{M}_x^{(n)}\right\}=\int\int\varepsilon_n(t,t_1)\varepsilon_n(t,t_2)R_x(t_1,t_2)dt_1dt_2\quad, \tag{6}$$

где $R_x(t_1, t_2)$ – автокорреляционная функция процесса x (t).

Можно представить $R_x(t_1, t_2)$ в виде:

$$R_x(t_1,t_2)=\sum_{k_1,k_2}R_{k_1,k_2}u_{k_1}(t_1)u_{k_2}(t_2)\,, \tag{7}$$

а операторы E_n пусть имеют вид:

$$E_n=f_n\left(E(T)\right),$$

где $f_n(x)$ – некоторая функция своего аргумента x.

Ввиду (1), (3):

$$E_nu_k=f_n(\lambda_k)u_k\,,\qquad f_n(\lambda_k)=1,\ |k|\le n. \tag{8}$$

Из формулы (5) следует:

$$E_n\varphi(t)=E_n\sum_m\varphi_mu_m(t)=\sum_m\varphi_mf_n(\lambda_m)u_m(t)=$$

$$=\int\varepsilon_n(t,\tau)\sum_m\varphi_mu_m(\tau)\,d\tau=\sum_m\varphi_m\int\varepsilon_n(t,\tau)u_m(\tau)\,d\tau,$$

$$\int\varepsilon_n(t,\tau)u_m(\tau)d\tau=f_n(\lambda_m)u_m(t). \tag{9}$$

Подставляя (7) в (6) и пользуясь (9), получим:

$$\sigma^2\left\{M_x^{(n)}\right\}=\sum_{k_1,k_2}R_{k_1,k_2}u_{k_1}(t)u_{k_2}(t)\,f_n(\lambda_{k_1})\,f_n(\lambda_{k_2})\,. \tag{10}$$

Как указывалось выше, σ^2 должно быть в каком-то смысле минимально. Поставим задачу о минимуме функционала:

$$\int dt\,\sigma^2\left\{M_x^{(n)}\right\}(t)=\int\sum_{k_1,k_2}R_{k_1,k_2}u_{k_1}(t)u_{k_2}(t)f_n(\lambda_{k_1})f_n(\lambda_{k_2})dt=\sum_k R_{kk}f_n^2(\lambda_k)$$

(здесь использована ортогональность функций $u_n(t)$).

Вариационная задача должна ставиться при дополнительных условиях:

$$f_n(\lambda_k)=1,\qquad \text{при}\ |k|\le n\,, \tag{11}$$

поэтому надо искать нуль вариационной производной функционала:

$$\sum_k R_{kk}f_n^2(\lambda_k)+2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}f_n(\lambda_k),$$

где $\alpha_k^{(n)}$ - множители Лагранжа.

Варьирование дает:

$$\begin{cases}R_{kk}f_n(\lambda_k)+\alpha_k^{(n)}=0, & k=0,1...,n\\ R_{kk}f_n(\lambda_k)=0, & k>n.\end{cases} \tag{12}$$

Из (11), (12) получаем для $R_{kk}\neq 0$ при $k > n$:

$$\begin{cases}\alpha_k^{(n)}=-R_{kk}\,, & k=0,1...,n\\ f_n(\lambda_k)=0 & k>n.\end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, оптимальный оператор E_n имеет вид:

$$E_n=f_n(E(T)), \tag{14}$$

где

$$f_n(\lambda_k)=\begin{cases}1, & k=0,1,....,n\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

а минимальное значение функционала $\int dt\sigma^2(t)$ при условиях (11), есть $\sum_{k=0}^{n}R_{kk}$, что при $n\to\infty$ стремится к

$$\sum_{k=0}^{\infty}R_{kk}=\int R_x(t,t)dt\,.$$

Определение (14) может быть некорректным. Действительно, если существуют x, q такие, что $0 \le k \le n,\ q > n,\ \lambda_q = \lambda_k$, то мы получим противоречие, которого не будет лишь в том случае, если спектр оператора E(T) не вырожден, то есть каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция u.

Приведем еще одну оценку σ^2, которая дает представление о характере зависимости σ^2 от параметра T.

Пусть

$$\sigma^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 u_k(t). \tag{15}$$

Если величина (σ^2(t), E(T) σ^2(t)) (скобки означают скалярное произведение) положительна, то ее можно рассматривать, как оценку $(\sigma^2(t))^2$. Используя (15), получим:

$$\begin{gathered}\left(\sigma^2, E\sigma^2\right) = \int \sigma^2(t_1)\left(E\sigma^2(t_1)\right)(t_2)\,dt_1 = \int\int \sigma^2(t_1)\,\varepsilon(t_1 t_2)\,\sigma^2(t_2)\,dt_1 dt_2 = \\ = \int\int \sum_{k_1 k_2} \sigma_{k_1}^2 \sigma_{k_2}^2 u_{k_1}(t_1) u_{k_2}(t_2)\,\varepsilon(t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sigma_k^2\right)^2 \lambda_k = \left(\sigma_0^2\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_k^2\right)^2 \lambda_k.\end{gathered} \tag{16}$$

Так как по предположению (15) ряд $\sum (\sigma_k^2)^2$ сходится, а $\lambda_\kappa \to 0$ при $T \to \infty$, $\kappa \ne 0$, то при достаточно больших T из (16) следует:

1) $\left(\sigma^2, E\,\sigma^2\right) > 0$, так как $\left(\sigma_0^2\right)^2 > 0$,

2) $\bar{\sigma}^2 \equiv \left(\sigma^2, E\sigma^2\right)^{1/2} \cong \sigma_0^2 + \dfrac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_k^2\right)^2 \lambda_k$.

То есть, зависимость $\bar{\sigma}^2$ от T определяется зависимостью от T собственных значений λ_k. Если $\lambda_k = \lambda_{0k}/T$, то

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_0^2 + \frac{1}{2\sigma_0^2 T} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_k^2\right)^2 \lambda_{0k} .$$

Оценка справедлива, конечно, только при больших T.

При построении адаптивной системы обработки целесообразно усложнить задачу и рассмотреть вместо $\int \sigma^2(t)\,dt$, где все моменты времени вносят равновесный вклад, функционал вида:

$$\int \rho(t)\,\sigma^2(t)\,dt = \sum_{k_1 k_2} R_{k_1 k_2} \rho_{k_1 k_2} f_n\left(\lambda_{k_1}\right) f_n\left(\lambda_{k_2}\right), \tag{17}$$

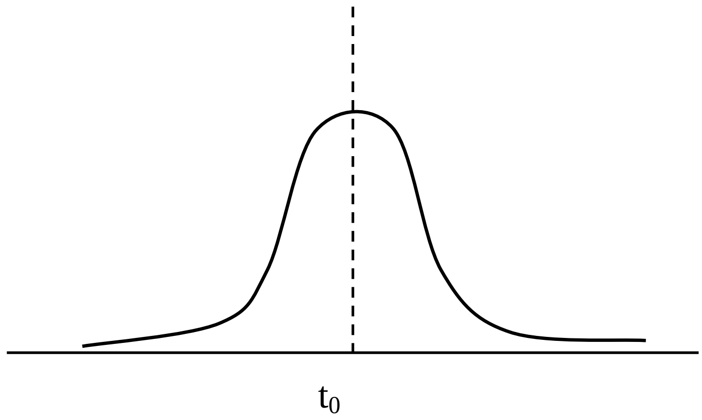
где

$$\rho_{k_1 k_2} = \int \rho(t) u_{k_1}(t) u_{k_2}(t)\, dt\ ,\quad \rho(t) \geq 0\,.$$

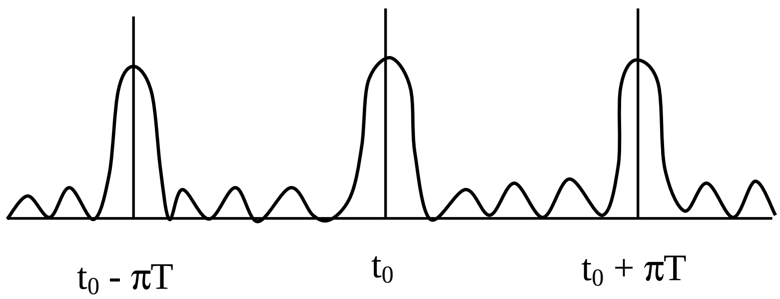
В этом функционале весовая функция ρ(t) выделяет вклад некоторых промежутков времени.

Например:

$$\rho(t) = const\ e^{-\frac{(t-t_0)^2}{(\Delta T)^2}}$$



$$\rho(t) = const \frac{\sin^2\left(Nn\frac{(t-t_0)}{T}\right)}{\sin^2\left(n\frac{(t-t_0)}{T}\right)}$$



Оптимальный оператор E_n не может быть представлен в виде полинома конечной степени от оператора E, но полиномиальное приближение может быть не плохим, если существует M >0 такое, что для всех k $|\lambda_k(T) \leq M|$ (то есть λ_k(T) ограничены).

Например, рассмотрим оператор, определенный следующим образом:

$$E\varphi(t)=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Найдем собственные значения и собственные функции этого оператора. Для этого продифференцируем по t уравнение:

$$\mathrm{E}\varphi=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\varphi(\tau)\,d\tau=\lambda\varphi(t). \tag{19}$$

Получим:

$$\frac{1}{T}\varphi(t)-\frac{1}{T^2}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\varphi(\tau)\,d\tau=\lambda\varphi'(t)$$

или

$$E\varphi=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\varphi(\tau)\,d\tau=\left(1-T\lambda\frac{d}{dt}\right)\varphi'(t). \tag{20}$$

Приравнивая правые части (19) и (20), получаем уравнение на собственные значения оператора дифференцирования:

$$\varphi'=\frac{d}{dt}\varphi=\frac{1-\lambda}{T\lambda}\varphi.$$

Так как любое комплексное число является собственным значением оператора дифференцирования, то $\frac{(1-\lambda)}{T\lambda}=\beta$ - произвольное комплексное число. Значит λ_β - собственная функция, соответствующая собственному значению λ_β есть:

$$\varphi_\beta=e^{\beta t},$$

$$\lambda_\beta=\frac{1}{1+\beta T}. \tag{21}$$

Рассмотрим оператор E на пространстве T_0 периодических функций (L_2). В этом пространстве можно выбрать следующий ортогональный базис:

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \varphi_{i\omega_0 n}(t) = \frac{e^{in\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}},$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

По определению:

$$Eu_n = \lambda_{i\omega_0 n} u_n = \frac{1}{1 + i\omega_0 nT} u_n.$$

Мы видим, что при T $\to \infty$, $\lambda_n \to 0$, $n \neq 0$; $\lambda_0 = 1$; u_0 = const. По определению (1) E(T) есть оператор сглаживания. Не трудно убедиться и в том, что спектр оператора E(T) не выпрожден и ограничен.

Чтобы найти операторы E_n, надо найти функции $f_n(\lambda)$, удовлетворяющие условиям (14). Как уже отмечалось, такая функция не является полиномом, но в данном случае ввиду ограниченности спектра и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{i\omega_0 n} = 0$ можно построить неплохое полиномиальное приближение.

Пусть

$$f_n(\lambda) = |\lambda|^\alpha \varphi_n(\lambda),\ \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k} \lambda^k,\ \alpha > 0 \qquad (22)$$

и на коэффициенты $\varphi_{n,k}$ наложены условия:

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k} \lambda_q^k = \frac{1}{|\lambda_q|^\alpha} \right\} \quad q = 0, 1, 2, .., n. \qquad (23)$$

Будем считать функции $\varphi_n(\lambda)$ вещественными, тогда $\varphi_{n,k} = \overline{\varphi}_{n,k}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Так как $\lambda_{-n} = \overline{\lambda}_n$, то условие (23) достаточно для выполнения условий $f_n(\lambda_q) = 1$, q = -n,…-1,0,1,…n, а множитель $|\lambda|^\alpha$ обеспечивает достаточно быстрое убывание $f_n(\lambda_q)$ при $|q| \to \infty$.

Система (23) всегда имеет решение, подробнее она может быть записана так:

$$\begin{cases} \varphi_{n0} + \varphi_{n1} + \ldots. + \varphi_{nn} = 1, \\ \varphi_{n0} + \varphi_{n1} + \ldots. + \varphi_{nn}\lambda_1^n = \dfrac{1}{|\lambda_1|^\alpha}, \\ \varphi_{n0} + \varphi_{n1} + \ldots. + \varphi_{nn}\lambda_2^n = \dfrac{1}{|\lambda_2|^\alpha}, \\ - - - - - - - - - - - - - \\ \varphi_{n0} + \varphi_{n1} + \ldots. + \varphi_{nn}\lambda_n^n = \dfrac{1}{|\lambda_n|^\alpha}. \end{cases}$$

Действительно, ее определитель есть определитель Вандермонда, который отличен от нуля, если среди $\{\lambda\}$ нет одинаковых.

Литература

1. Зарубежные гидролокаторы и их использование в морской геологии и геофизике. Газовая промышленность. Вып. 5. –М., 1985.

2. Теоретические основы создания панорамных гидроакустических систем / А.И. Гончар, О.С. Голод, Ю.А. Клочан, Л.И. Шлычек / Под ред.. А.И. Гончара. – Запорожье: , 1999. -290 с. - ISBN-966-02-0675-5.

3. Радиотехника и электроника т.19, № 11, 1974.

4. К. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. – 832 с.