УДК 550.831+550.8

Ю. І. Дубовенко

Редукція задачі Алексідзе до рівняння сили тяжіння

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

З метою аналітичного продовження в глобальних областях значень сили тяжіння, які є значеннями модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ), сформульована у вигляді інтегрального рівняння нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа. Для її розв'язання у вигляді потенціалу простого шару на поверхні Ляпунова слід визначити невідому густину простого шару. На підставі аналітичних властивостей функції МГПСТ задачу Алексідзе зведено до нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння.

Методи трансформації потенціальних полів дають змогу розв'язати з достатньою точністю будь-яку задачу за умови задання вхідної інформації в локальних областях певної малої міри. Наявні результати гравітаційних і магнітних спостережень як різниці приростів модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ) можна використовувати при розробці схем трансформацій потенціалу в глобальній області.

Для глобальних побудов густинних моделей земної кори, які виконують на підставі результатів регіональних спостережень, потрібно розв'язати задачу аналітичного продовження аномалій сили тяжіння [1]. В публікації [2] виокремлено два альтернативні напрями, що базуються на аналізі характеристичних властивостей МГПСТ. Один з них зводиться до розв'язання зовнішньої задачі Діріхле для лінійного диференціального рівняння типу Гельмгольца з невідомим змінним коефіцієнтом [3].

Перехід до задачі відновлення потенціалу усунув необхідність обчислення подальших наближень як коефіцієнтів рівняння сили тяжіння, так і самих значень сили тяжіння, оскільки останні можна знайти не лише з розв'язання задачі Діріхле для рівняння сили тяжіння, а й з безпосереднього диференціювання відновленого потенціалу. Через це задача відновлення потенціалу за даними МГПСТ, яка не належить до класичних задач гравіметрії, набуває особливого значення. Один з можливих способів її розв'язання розроблений у статті [4], а інший — гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа — викладений в роботах [5, 6].

Постановка задачі. Нехай y^- — обмежена область точок тривимірного евклідового простору, яка зайнята масами Землі; y^+ — необмежене доповнення до y^-, що вільне від тяжіючих об'єктів; ∂y — границя множин y^- й y^+, що ототожнена з фізичною поверхнею Землі. В прямокутній декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі Землі осі Ox_1, Ox_2 лежать в екваторіальній площині, а вісь Ox_3 збігається з віссю її обертання. Точки області y^- позначимо через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in y^-$, а доповнення y^+ — через $x = (x_1, x_2, x_3) \in \in y^+$. Маси $M(\xi)$, $\xi \in y^-$, густиною $dM(\xi) = \sigma(\xi)d\xi$ усередині Землі генерують у просторі y^+ поле сили тяжіння з потенціалом

$$W(x) = f \int\limits_{y^-} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|} d\xi + \begin{cases} \Omega(x), & x \in y^-, \\ 0, & x \in y^+, \end{cases}$$

де f — гравітаційна стала; $\Omega(x) = 0{,}5\omega^2(x_1 + x_2)$ — потенціал відцентрової сили; ω — модуль вектора кутової швидкості Землі. Напруженість магнітного поля (значення МГПСТ, згідно з публікацією [2]) дорівнює

$$g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\overline{g}(x), \overline{n}(x)), \tag{1}$$

де $\partial x_k(x)/\partial n = \cos(n, x_k)$, $k = 1, 2, 3,$ — напрямний косинус одиничного вектора $\overline{n}(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $dW(x)$: $W(y) = Cx$, яка проходить через точку x.

Для такої моделі середовища необхідно розв'язати нелінійну граничну задачу Алексідзе для рівняння Лапласа: знайти функцію $W(x)$, $x \in y^+$, яка задовольняє всередині необмеженої замкненої області $\overline{y}^+ = y^+ \bigcup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0$, $x \in y^+$, якщо в будь-якій точці ляпуновської межі ∂y області та в нескінченно віддаленій точці вона задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2 = g^2(x) \qquad \text{при} \qquad x \in \partial y, \\ &W(x) \to 0 \qquad \text{при} \qquad |x| \to \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

де $g(x)$ — задана неперервна функція вигляду (1).

Гармонічну в області y^+ функцію $W(x)$, $x \in y^+$, відшукуємо як потенціал простого шару

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x - \xi|} dS_\xi \qquad \text{при} \qquad x \in y^+ \tag{3}$$

з невідомою густиною $\sigma(x)$, $x \in \partial y$ (інтегровною, хоча загалом може бути більш гладкою функцією), поширеною на поверхні ∂y Ляпунова. Для виведення рівняння, з якого відновлюють невідому густину $\sigma(x)$ за заданими на поверхні ∂y значеннями $g(x)$ МГПСТ, та для обчислення значень $g(x)$ у точках області y^+ при знайденій густині визначимо, виходячи із зображення (3) потенціалу, квадрат модуля його градієнта:

$$g^2(x) = |\operatorname{grad} W(x)|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x - \xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x - \eta|^2} \sum_{k=1}^{3} \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|^2} \frac{x_k - \eta_k}{|x - \eta|^2} dS_\eta dS_\xi.$$

Цей вираз стане компактнішим, якщо ввести в обіг одиничні вектори p й q, які спрямовані з точки x у точки ξ й η відповідно, що проходять по поверхні ∂y. Їх складові матимуть вигляд

$$p_i = \cos(p, x_i) = \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|}, \qquad q_i = \cos(x_i, q) = \frac{x_i - \eta_i}{|x - \eta|},$$

а кут між самими векторами —

$$\cos(p, q) = \sum_{i=1}^{3} \cos(p, x_i) \cos(x_i, q) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|} \frac{x_i - \eta_i}{|x - \eta|}.$$

З урахуванням цих позначень вираз для $g^2(x)$ набуває вигляду

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi. \tag{4}$$

Проаналізуємо аналітичні особливості функції $g(x)$ модуля градієнта потенціалу простого шару (4). Першою з них є неперервність, що випливає з леми 1.

Лема 1. *Модуль градієнта потенціалу простого шару є неперервною функцією точки $x \in \partial y$, яка рухається по поверхні ∂y Ляпунова.*

Доведення. Слід переконатися в існуванні інтеграла (4), поширеного на частину $\partial y(x) = \partial y \bigcap S(x,\varepsilon)$ поверхні ∂y усередині кулі $S(x,\varepsilon)$ Ляпунова радіусом $\varepsilon > 0$ з центром у точці $x \in \partial y$, оскільки його існування в іншій частині $\partial y/\partial y(x)$ не підлягає сумніву. Доведення існування інтеграла за значенням $\partial y(x)$ полягає в знаходженні нерівностей, що випливають з локальних властивостей поверхонь Ляпунова, властивих і поверхні ∂y.

Лема 2. *Квадрат модуля градієнта потенціалу простого шару, поширеного на сфері радіусом ρ з одиничною поверхневою густиною $\sigma(x) = 1$, $x \in \partial y$, становить*

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2|x-\eta|^2} dS_\eta dS_\xi = \begin{cases} \dfrac{\rho^4}{|x|^4}, & |x| > \rho, \\ \dfrac{1}{4}, & |x| = \rho, \\ 0, & |x| < \rho. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли точка розташована поза сферою ∂y радіусом ρ. Покладемо в точці x початок допоміжної системи координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ з напрямом осі $O\xi_3$ через центр сфери, який матиме координати $(0,0,a)$, де $a = |x|$ — апліката центра сфери, а її рівняння — $\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 - a)^2 = \rho^2$. У полярних координатах рівняння набуває вигляду

$$r(\varphi,\lambda) - 2ar(\varphi,\lambda)\cos\varphi + a^2 - \rho^2 = 0,$$

оскільки $\xi_1 = r(\varphi,\lambda)\sin\varphi\cos\lambda$, $\xi_2 = r(\varphi,\lambda)\sin\varphi\sin\lambda$, $\xi_3 = r(\varphi,\lambda)\cos\varphi$. Звідси випливає, що $r(\varphi,\lambda) = r(\varphi)$, причому $r(\varphi) = a\cos\varphi \pm \sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ (де $\varphi_0 = \arcsin \rho/a$). Тому рівняння сфери можна однозначно поділити відносно напряму осі $O\xi_3$ на дві частини — "верхню" та "нижню", що задаються відповідно рівняннями:

$$r_{\text{в}}(\varphi) = a\cos\varphi + \sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi} \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,$$

$$r_{\text{н}}(\varphi) = a\cos\varphi - \sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi} \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0.$$

Знайдемо найменший елемент dS сфери ∂y, параметризованої полярними координатами, для чого складемо матрицю

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial\lambda} \end{vmatrix}$$

за її елементами та обчислимо коефіцієнти Гауса сфери ∂y, отримавши при цьому

$$dS = r(\varphi,\lambda)\sqrt{r^2(\varphi) + \left[\frac{\partial r(\varphi)}{\partial\varphi}\right]^2}\sin\varphi\, d\varphi d\lambda.$$

З урахуванням зображень наведених частин сфери отримуємо значення елементів поверхні "верхньої" та "нижньої" частин сфери відповідно у вигляді

$$dS_{\text{в}} = \frac{r_{\text{в}}^2(\varphi)\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin\varphi}}d\varphi d\lambda$$

та

$$dS_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}^2(\varphi)\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin\varphi}}d\varphi d\lambda.$$

Враховуючи, що $|\xi| = r(\varphi)$, та виразивши напрямні косинуси одиничних векторів p й q через φ й λ, отримаємо

$$g^2(x) = \left(\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{\rho\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi}}d\varphi\right)^2 = \frac{\rho^4}{|x|^4}.$$

Нехай точка x лежить на сфері ∂y. Покладемо в ній початок допоміжної сферичної системи координат та отримаємо рівняння сфери $r(\varphi) = 2\rho\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, і, відповідно, елемент поверхні $dS = \sqrt{EG - F^2}d\varphi d\lambda = 4\rho^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\lambda$, де $E = E(\varphi,\lambda)$, $G = G(\varphi,\lambda)$, $F = F(\varphi,\lambda)$ — коефіцієнти Гауса поверхні ∂y. Підставивши останній вираз у $g^2(x)$, отримаємо

$$g^2(x) = \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi/2} \frac{4\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(\varphi)}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

що доводить лему для $x \in \partial y$.

Якщо точка x розташована всередині сфери ∂y, покладемо початок сферичної системи координат у точку x з полярною віссю, яка проходить через центр сфери, та отримаємо рівняння сфери для точок її "верхньої" та "нижньої" частин:

$$r_{\text{в}}(\varphi) = a\cos\varphi + \sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi} \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

та

$$r_{\text{н}}(\varphi) = a\cos\varphi - \sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\varphi} \qquad \text{при} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0,$$

де $a = |x|$ — апліката центра сфери. Звідси з нескладних перетворень цих виразів можна записати $g^2(x) = 0$ при $|x| < \rho$.

Функція $g^2(x)$ (4) є розривною і має розрив неперервності при перетині точкою x поверхні ∂y. Щоб знайти величину розриву, через $g_0^2(x)$ введемо пряме значення квадрата МГПСТ, якщо точка x лежить на поверхні ∂y, а через $g_e^2(x)$ і $g_i^2(x)$ — граничні значення

$g^2(x)$, якщо точка x прямує до поверхні ∂y поза та всередині області y^- по нормалі до поверхні ∂y. Величину розриву розкриває теорема.

Теорема 1. *Нехай простий шар поширений на поверхні ∂y Ляпунова, що охоплює область y^-. Якщо густина $\sigma(x)$, $x \in \partial y$ потенціалу простого шару незмінна, то квадрат МГПСТ значення $g^2(x_0)$ при наближенні точки x_0 у напрямі нормалі $n(x)$ до точки x на поверхні ∂y поза та всередині області y^- має різні границі:*

$$\lim_{\substack{x_0 \to x \in \partial y \\ x_0 \in n \cap y^+}} g^2(x_0) = g_e^2(x) = \frac{1}{4}\sigma^2(x) + \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + g_0^2(x),$$

$$\lim_{\substack{x_0 \to x \in \partial y \\ x_0 \in n \cap y^-}} g^2(x_0) = g_i^2(x) = \frac{1}{4}\sigma^2(x) - \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + g_0^2(x).$$

Доведення. Для доведення теореми застосуємо означення МГПСТ та твердження з публікації [3]: якщо густина потенціалу простого шару (3) є диференційовною, граничні значення частинних похідних потенціалу 1-го й 2-го порядку визначаються величинами:

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^3} \sigma(\xi)\, dS_\xi + \frac{1}{2}\sigma(x)\cos(x_i, n), \qquad i = j, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{3(x_i - \xi_i)^2 - |x-\xi|^3}{|x-\xi|^5} (\sigma(\xi) - \sigma(x))\, dS_\xi + \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_i, n),$$

$$\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{3}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{(x_- - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x-\xi|^5} (\sigma(\xi) - \sigma(x))\, dS_\xi + \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_j, n),$$

які можна отримати з подання потенціалу $W(x)$ у вигляді

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma(\xi) - \sigma(x))\, dS_\xi + \frac{1}{4\pi}\sigma(x) \int\limits_{\partial y} \frac{dS_\xi}{|x-\xi|},$$

за умов заміни безпосереднього диференціювання за x_i диференціюванням по внутрішній нормалі n до поверхні ∂y у точці x та врахування тотожності

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} dS_\xi = \begin{cases} 1, & x \in y^+, \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \partial y, \\ 0, & x \in y^-, \end{cases}$$

що випливає з тотожності Гріна при $V(x) \equiv 1$.

Дійсно, при $x \in n \bigcap y^+$ отримаємо

$$\lim_{x_0 \to x \in \partial y} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x_0)}{\partial x_k} \right)^2 = g_e^2(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{2}\sigma(x)\cos(n, x_k) + \frac{\cos(n, x_k)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sigma^2(x) + \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + g_0^2(x)$$

і аналогічно при $x \in n \bigcap y^-$ —

$$\lim_{x_0 \to x \in \partial y} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x_0)}{\partial x_k} \right)^2 = g_i^2(x) = \frac{1}{4}\sigma^2(x) - \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + g_0^2(x),$$

де

$$g_0^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi, \qquad x \in \partial y.$$

Звідси при $\sigma(x) \equiv 1$, $x \in \partial y$ та з умови для сфери

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} dS_\xi = \frac{1}{2}$$

маємо $g_e^2(x) - g_0^2(x) = 3/4$, $x \in \partial y$, що узгоджується з лемою 2.

Оскільки функція $g^2(x)$ при наближенні точки x до поверхні ∂y має розрив (доведений теоремою 1), а при русі тієї самої точки по поверхні ∂y вона неперервна (як стверджує лема 1), то для виконання граничних умов (2) задачі Алексідзе необхідно, щоб виконувалась рівність $g_e^2(x) = g^2(x)$, $x \in \partial y$, тобто задані на межі ∂y значення сили тяжіння дорівнюють значенням у зовнішньому просторі.

Характеризуючи зображення для значення $g_e^2(x)$ у теоремі 1, отримуємо (щодо невідомої густини потенціалу простого шару (3)) нелінійне інтегральне рівняння сили тяжіння:

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x) + \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi =$$
$$= g^2(x), \qquad x \in \partial y. \tag{5}$$

Розв'язок $\sigma(x)$, $x \in \partial y$ рівняння (5) еквівалентний розв'язку задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні ∂y Ляпунова, оскільки при будь-якому виборі значення густини потенціал (3) простого шару задовольняє в області y^+ рівнянню Лапласа, а знайдене з (5) значення густини забезпечує виконання граничної умови (2). Питання розв'язності задачі Алексідзе редукується до з'ясування умов існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння (5).

Це рівняння можна спростити, виходячи з того, що внутрішня точка не тяжіє до однорідного сферичного шару. Отже, можна припустити, що існують не тільки для сферичних, а й для інших шарів такі розподіли густини, які не притягують внутрішніх точок. У справедливості припущення переконаємось, якщо проаналізуємо взаємодію внутрішніх точок області з простим шаром у точках межі ∂y області, що є поверхнею Ляпунова, з густиною, яка задовольняє інтегральному рівнянню

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x) - \frac{\sigma(x)}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma(\xi)\,dS_\xi + g_0^2(x) = 0, \qquad x \in \partial y. \tag{6}$$

Якщо густина $\sigma(x)$ простого шару є розв'язком рівняння (6), шар створює потенціал $W(x)$, значення якого не змінюються всередині області y^-. Дійсно, умова (6) відповідає граничній рівності $g_i^2(x) = 0$, $x \in \partial y$, яка, в свою чергу, еквівалентна співвідношенню $|\operatorname{grad} W(x)|^2 = 0$, $x \in \partial y$. Звідси випливає, що гармонічна функція $W(x)$, $x \in y^-$ у кожній точці межі ∂y Ляпунова задовольняє умову $\partial W(x)/\partial x_k = 0$, $k = 1,2,3$, тобто потенціал $W(x) = \mathrm{const}$ сталий в усій області $x \in y^-$. Через це внутрішні точки області y^- не тяжіють до простого шару з густиною, яка задовольняє рівнянню (6).

Додамо вирази (5) і (6), в результаті чого отримаємо нове інтегральне рівняння

$$\sigma^2(x) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi = 2g^2(x), \qquad x \in \partial y, \tag{7}$$

розв'язок якого зумовлює розподіл сили тяжіння $g(x)$ у необмеженій області y^+, що відповідає постійному значенню потенціалу $W(x)$ усередині області y^-. Розв'язки рівнянь (5) і (7) допомагають визначати не тільки потенціал $W(x)$, $x \in y^+$, а й значення модуля його градієнта в будь-якій точці необмеженої області y^+, їх можна обчислити як з (4), так і за зручнішою формулою

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{3}\left(\int\limits_{\partial y}\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|^3}\sigma(\xi)\,dS_\xi\right)^2.$$

Зведення задачі Алексідзе з граничними умовами (2) на поверхні ∂y Ляпунова до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння (5) дозволяє вивчити питання розв'язності й єдиності її розв'язків та ефективно знаходити числові наближені обчислення для областей складної форми.

1. *Алексидзе М. А.* Редукция силы тяжести. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 256 с.
2. *Черный А. В.* Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / НАН Украины. Ин-т геофизики им. С. И. Субботина. – Киев, 1991. – 429 с.
3. *Якимчик А. І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22 / НАН України. Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна. – Київ, 2001. – 16 с.
4. *Черный А. В.* Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1982. – № 4. – С. 18–21.
5. *Чорний А. В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72–80.
6. *Дубовенко Ю. І.* Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матеріали наук. конф. "Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6–10 жовт. 2008 р. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – С. 156–158.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 01.04.2009

Yu. I. Dubovenko

Reduction of the Alexidze problem to the gravity equation

For purposes of an analytic continuation of gravity values as a module of gravity potential gradients (MGPG) in global areas, a nonlinear boundary-value Alexidze problem for the Laplace's equation is formulated. To solve it as a simple layer potential on the Lyapunov's surface, it is necessary to define the unknown simple layer density. On the basis of analytical features of the MGPG function, the Alexidze problem is reduced to the solution of a nonlinear integral gravity equation.