



УДК 539.3

© 2009

А. Я. Григоренко, А. Ю. Пархоменко

### Численное решение задачи о свободных колебаниях пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошунюм)

*Розглянуто власні коливання прямокутних в плані пологих оболонок змінної товщини в уточненій постановці на основі методу сплайн-апроксимації невідомих функцій. Розрахунки частот виконані для різноманітних типів граничних умов. Досліджено залежність власних частот коливань від кривизни середньої поверхні оболонки.*

Во многих областях современной техники широкое применение находят конструктивные элементы в виде пологих оболочек переменной толщины. Для обеспечения требуемой прочности и надежности такого рода конструкций важно иметь информацию об их динамических характеристиках, в частности, свободных колебаниях.

В данной работе рассматриваются свободные колебания прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при разных типах граничных условий. Предлагается подход для решения указанной задачи, который основывается на сведении исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных с помощью применения сплайн-аппроксимации по одной из координат к краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Полученная одномерная задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пологой оболочки переменной толщины в уточненной постановке на основе гипотезы прямолинейного элемента: изначально прямолинейный элемент нормали к координатной поверхности после деформации сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается перпендикулярным:  $e_{xz} = \gamma_x$ ,  $e_{yz} = \gamma_y$ , где  $e_{xz}$  и  $e_{yz}$  — деформации сдвига,  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  — углы поворота, вызванные поперечными сдвигами.

Учитывается также, что нормальные напряжения на площадках, параллельных координатной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с аналогичными напряжениями на площадках, перпендикулярных ей:  $\sigma_z \ll \min(\sigma_x, \sigma_y)$ .

Уравнения, описывающие свободные поперечные колебания пологой оболочки в теории типа Тимошенко–Миндлина имеют вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + \rho h \omega^2 w &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \psi_x &= 0; & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \psi_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  — нормальные и сдвигающие усилия;  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  — изгибающие и крутящие моменты;  $Q_x, Q_y$  — перерезывающие усилия;  $w$  — прогиб;  $\rho$  — плотность материала;  $\omega$  — круговая частота циклических колебаний;  $\psi_x$  и  $\psi_y$  — полные углы поворота прямолинейного элемента.

С учетом выражений для перемещений и деформаций по данной гипотезе, а также соотношений упругости из системы уравнений (1) можно получить пять эквивалентных дифференциальных уравнений относительно трех перемещений  $u, v$  и  $w$  точек срединной поверхности и двух полных углов поворота прямолинейного элемента  $\psi_x, \psi_y$ .

**Методика решения.** Решение данной системы уравнений будем искать методом сплайн-аппроксимации [3, 4]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1,i}(y); & v(x, y) &= \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2,i}(y); \\ w(x, y) &= \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{3,i}(y); \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{x_i}(x) \varphi_{4,i}(y); & \psi_y(x, y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{y_i}(x) \varphi_{5,i}(y), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_i(x), v_i(x), w_i(x), \psi_{x_i}(x), \psi_{y_i}(x)$  ( $i = 0, \dots, N$ ) — искомые функции;  $\varphi_{j,i}$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) — функции, построенные с помощью В-сплайнов третьей степени  $N \geq 4$ , удовлетворяющие граничным условиям на контурах  $y = 0$  и  $y = b$ .

Подставив (2) в исходную систему уравнений, будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [0, b]$ ,  $k = 0, \dots, N$ . При четном числе узлов сетки ( $N = 2n + 1, n \geq 3$ ) и условии, что  $\xi_{2i} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$ ,  $\xi_{2i+1} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$  ( $i = 0, \dots, n$ ), на отрезке  $[y_{2i}, y_{2i+1}]$  имеем два узла коллокации, на соседних отрезках  $[y_{2i+1}, y_{2i+2}]$  узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков  $[y_{2i}, y_{2i+1}]$  точки коллокации выбираются следующим образом:  $\xi_{2i} = y_{2i} + z_1 h$ ,  $\xi_{2i+1} = y_{2i} + z_2 h$  ( $i = 0, \dots, n$ ), где  $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$  и  $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$  — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке  $[0, 1]$ . Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации.

После преобразований [4], получаем систему  $N + 1$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}$ , которую можно свести к нормальному виду:

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega) \bar{Y} \quad (0 \leq x \leq a), \quad (3)$$

где  $\bar{Y} = [u_0, \dots, u_N, v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N, \psi_{x_0}, \dots, \psi_{x_N}, \psi_{y_0}, \dots, \psi_{y_N}]^T$  — вектор-столбец искомых функций и их производных размерностью  $10(N+1)$ ,  $A(x, \omega)$  — квадратная матрица порядка  $10(N+1) \times 10(N+1)$ .

На контурах оболочки  $x = 0$ ,  $a$  и  $y = 0$ ,  $b$  задаются граничные условия, которые определяются через перемещения и углы поворота. При  $x = \text{const}$  задаются такие граничные условия:

- 1) жестко закрепленный контур  $u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$ ;
- 2) шарнирно закрепленный контур  $\partial u / \partial x = v = w = \partial \psi_x / \partial x = \psi_y = 0$ .

Аналогичные условия можно получить на контуре  $y = \text{const}$ , произведя замены:  $x \rightarrow y$ ,  $u \rightarrow v$ ,  $\psi_x \rightarrow \psi_y$ .

Граничные условия для системы (3) можно также записать в виде:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{0}. \quad (4)$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (4) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

**Решение задачи и анализ результатов.** Исследовались изотропные пологие цилиндрические оболочки переменной толщины со следующими упругими характеристиками:  $E = 1$  Па,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>.

Результаты расчетов, проведенных по методу сплайн-коллокации при разном количестве точек коллокации ( $N = 10; 12; 14; 16$ ), практически совпадают. При расчетах было принято  $N = 14$ .

Для проверки достоверности полученных результатов проводилось сравнение безразмерных частот  $\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$ , вычисленных с помощью изложенной методики при шарнирном опирании всех сторон оболочки с частотами, рассчитанными путем разложения функций в ряды Фурье.

В табл. 1 приведены значения первых пяти частот колебаний двух квадратных в плане пологих оболочек с геометрическими параметрами  $a = 0,1$  м,  $b = 0,1$  м и постоянной толщиной  $h = 0,01$  м. Радиусы кривизны приняты равными, соответственно,  $r_x = 0,908$  и  $r_x = 12,500$ , где  $r_x = R_x/a$  — безразмерный радиус кривизны. Здесь А — частоты, рассчитанные на основании аналитического подхода; В — соответствующие частоты, полученные с помощью описанной методики при  $N = 14$ ; П — разница в процентах.

Максимальное расхождение между аналитическими и вычисленными частотами менее 0,7%, что свидетельствует о высокой надежности применяемого метода сплайн-коллокации.

Таблица 1. Сравнение аналитических (А) и рассчитанных по предложенной методике (В) частот свободных колебаний шарнирно опертых по контуру цилиндрических пологих оболочек

$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$						
$i$	$r_x = 0,9$			$r_x = 12,5$		
	А	В	П, %	А	В	П, %
1	0,736	0,737	0,136	0,551	0,552	0,181
2	1,297	1,297	0,000	1,313	1,313	0,000
3	1,537	1,545	0,520	1,314	1,323	0,685
4	2,053	2,058	0,243	2,015	2,020	0,248
5	2,427	2,427	0,000	2,455	2,455	0,000

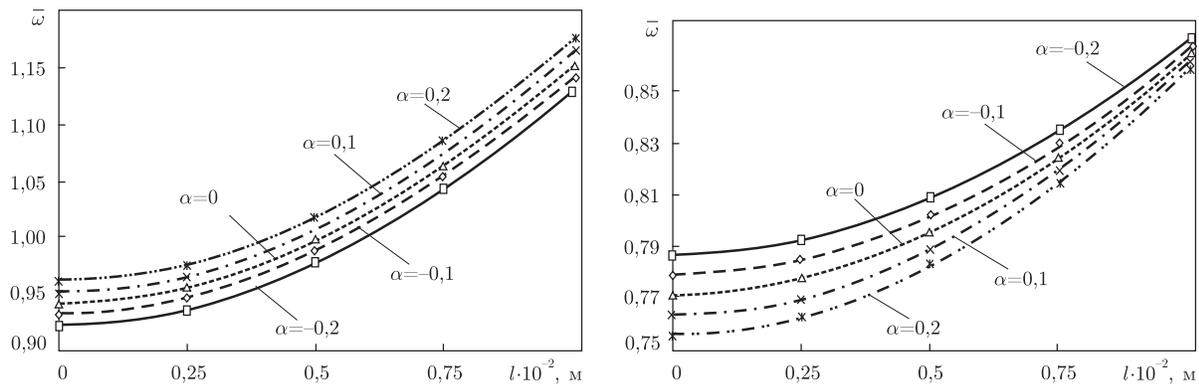


Рис. 1. Зависимость значений первой частоты свободных колебаний оболочки от стрелы подъема  $l$  при граничных условиях ТГ1 (а) и ТГ2 (б) для различных значений параметра  $\alpha$

В табл. 2 приведены результаты расчета первых пяти безразмерных частот колебаний пологих оболочек переменной толщины при жестком закреплении всех сторон. Геометрические параметры оболочек:  $a = 0,1$  м,  $b = 0,1$  м,  $r_x = 6,260$  (обозначим такую оболочку КП1) и  $a = 0,12$  м,  $b = 0,1$  м,  $r_x = 5,217$  (обозначим КП2). Толщина изменялась по закону:

$$h(x) = \left[ \alpha \left( 6 \frac{x^2}{a^2} - 6 \frac{x}{a} + 1 \right) + 1 \right] h_0, \quad (5)$$

где  $0 \leq x/a \leq 1$ ,  $|\alpha| < 0,2$ ,  $h_0$  — толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы (при расчетах принято  $h_0 = 0,01$  м).

На основании данных табл. 2 можно проследить динамику изменения значений частот колебаний оболочек при изменении толщины. Для оболочки КП2 значения соответствующих частот меньше, чем для оболочки КП1. Также для оболочки КП2 заметна более значительная разница между второй и третьей частотами, которые соответствуют одной полуволне в одном из координатных направлений и двум полуволнам в другом направлении. Все частоты имеют нелинейную зависимость от параметра  $\alpha$ .

На рис. 1, а построен график зависимости безразмерных значений первой частоты колебаний квадратной в плане полой оболочки переменной толщины от стрелы подъема для

Таблица 2. Сравнение частот колебаний оболочек с разной геометрией и одинаковой кривизной для разных значений параметра  $\alpha$  при жестком закреплении контуров

Тип оболочки	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$					
	$i$	$\alpha$				
		-0,2	-0,1	0	0,1	0,2
КП1	1	0,930	0,940	0,949	0,960	0,969
	2	1,734	1,765	1,791	1,792	1,772
	3	1,842	1,827	1,811	1,814	1,835
	4	2,495	2,509	2,520	2,527	2,530
	5	2,912	2,944	2,968	2,974	2,938
КП2	1	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990
	2	1,644	1,667	1,690	1,704	1,718
	3	2,120	2,095	2,067	2,036	2,003
	4	2,634	2,641	2,644	2,642	2,637
	5	2,679	2,708	2,731	2,748	2,761

различных значений параметра  $\alpha$  при жестком закреплении всех сторон (тип граничных условий ТГ1). На рис. 1, б представлены аналогичные данные для случая шарнирного опирания двух сторон ( $x = 0, x = a$ ) и жесткого закрепления двух других сторон ( $y = 0, y = b$ ) оболочки (тип граничных условий ТГ2). Расчеты проводились при таких геометрических параметрах оболочки:  $a = 0,1$  м,  $b = 0,1$  м,  $h_0 = 0,01$  м.

Анализируя графики, можно сделать вывод, что характер зависимости первой частоты колебаний оболочки от параметра  $\alpha$  при разных значениях стрелы подъема существенно отличается при различных граничных условиях на контурах оболочки. При типе граничных условий ТГ1 с увеличением параметра  $\alpha$  значения частот увеличиваются, а при типе граничных условий ТГ2 — уменьшаются. При этом наблюдается почти линейная зависимость частоты колебаний от толщины оболочки.

По результатам расчетов можно сделать вывод, что за счет незначительных изменений в геометрии поверхности оболочек или при вариации граничных условий можно добиваться увеличения или уменьшения значений частот свободных колебаний.

1. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — Киев: Наук. думка, 1986. — 171 с.
2. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев: Наук. думка, 1973. — 246 с.
3. Будах В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикл. механика. — 2007. — **43**, № 4. — С. 89–98.
4. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Там же. — 2005. — **41**, № 10. — С. 80–91.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 25.02.2009*

**A. Ya. Grigorenko, A. Yu. Parhomenko**

### **A numerical solution of the problem on free vibrations of shallow shells with variable thickness in refined statement**

*Natural vibrations of shallow shells with rectangular plan and variable thickness in refined statement are considered. The approach is based on the method of spline-approximation of unknown functions. Calculations of frequencies are carried out for different types of boundary conditions. The dependence of the eigenfrequencies of vibrations on the mid-surface curvature is investigated.*