УДК 517.957

С. П. Дегтярев

О существовании гладкого решения задачи со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения с разрывными коэффициентами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

Розглянуто задачу з вільною межею, яка виникає при вивченні квазілінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами та правою частиною. При цьому розрив коефіцієнтів і правої частини відбувається за певного фіксованого значення невідомої функції. Таким чином, геометричний інтерфейс розриву є одним з головних невідомих задачі. Доведено гладкість цього інтерфейсу розриву та гладкість розв'язку в кожній із замкнених підобластей гладкості коефіцієнтів.

Пусть Ω — двусвязная область в $\mathbb{R}^N$, граница которой состоит из двух замкнутых связных непересекающихся поверхностей Γ^+ и Γ^-, $\partial\Omega = \Gamma^+ \bigcup \Gamma^-$, причем $\Gamma^\pm \in H^{4+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ — мы используем стандартное определение пространств Гельдера H^l, $H^{l,l/2}$ из [1] и поверхностей класса H^l, $H^{l,l/2}$ соответственно. В области $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $T > 0$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - (\nabla, A(x,t,u)\nabla)u = f(x,t,u,\nabla u), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(x,t) = g^\pm(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0,T], \tag{3}$$

где $u_0(x)$, $g^+(x,t)$ и $g^-(x,t)$ — заданные функции, $A(x,t,u) = \{a_{ij}(x,t,u)\}$ — матрица коэффициентов, $\nabla u = (\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2, \ldots, \partial u/\partial x_n)$.

Главной особенностью уравнения (1) в нашей постановке является то, что мы предполагаем функции $a_{ij}(u,x,t)$ и $f(u,\nabla u,x,t)$ имеющими разрыв при $u = 0$:

$$a_{ij}(x,t,u), \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^2} \in C^2(\overline{\Omega}_T \times [0,+\infty)) \bigcap C^2(\overline{\Omega}_T \times (-\infty,0]), \tag{4}$$

$$f(x,t,u,\xi) \in C^2(\overline{\Omega}_T \times (-\infty,0] \times \mathbb{R}^n) \bigcap C^2(\overline{\Omega}_T \times [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n). \tag{5}$$

Таким образом, при значении аргумента $u = 0$ функции $a_{ij}(u,x,t)$ и $f(u,\xi,x,t)$ могут иметь разрыв первого рода. Мы предполагаем также, что при всех значениях своих аргументов функции $a_{ij}(u,x,t)$ удовлетворяют условию эллиптичности, т. е.

$$\nu\xi^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}\xi^2. \tag{6}$$

Здесь и всюду ниже мы используем обозначения ν и C для всех абсолютных констант или констант, зависящих только от фиксированных исходных данных задачи (1)–(3).

Модельным случаем для уравнения (1) с указанными свойствами служит квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = H(u), \tag{7}$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = \operatorname{sign}(u), \tag{8}$$

где $H(u)$ — функция Хевисайда, $H(u) \equiv 1$, $u > 0$, $H(u) \equiv 0$, $u \leqslant 0$. Уравнение (7) возникает в теории горения (см. [2, 3]), а также в ряде других областей (см. [4, 5]). Отметим, что из теории локальной регулярности решений параболических уравнений следует, что решение уравнения (7) регулярно в каждой из областей $\{u > 0\}$ и $\{u < 0\}$ и имеет разрыв старших производных на границе множества $\{u > 0\}$. Следовательно, для уравнения типа (7) встает вопрос о нахождении областей $\{u > 0\}$ и $\{u < 0\}$, а также интерфейса $\{u = 0\}$. Таким образом, уравнения (1), (7), (8) порождают задачу со свободной границей, состоящую в нахождении неизвестного заранее интерфейса $\{u = 0\}$ и определении его свойств.

Уравнение (7) рассматривалось ранее в случае одной пространственной переменной в работах [6, 7], где получена регулярность кривой, разделяющей области знакопостоянства решения. В случае двух пространственных переменных, когда $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, уравнение (7) рассматривалось в работе [8], где при определенных ограничениях на данные задачи показано, что линия уровня $\{u = 0\}$ имеет вид $y = f(x,t)$, причем функция $f(x,t)$ обладает определенной регулярностью. В многомерном случае уравнение (7) исследовалось в работе [9], где локально по времени получено существование решения, свободная граница которого обладает определенной регулярностью. В этой же работе указаны условия, при которых решение уравнения (7) и свободная граница существуют глобально по времени. В работе [10] для уравнения вида (7) в многомерной постановке при наличии в уравнении конвективного слагаемого вида $a(\partial u/\partial x)$ изучалась устойчивость бегущих волн.

В данной работе изучается существование гладкого интерфейса упомянутого типа локально по времени для общего квазилинейного уравнения вида (1), имеющего разрывы не только в правой части, но и в коэффициентах. Кроме того, во всех указанных выше случаях предполагалось условие определенного знакопостоянства правой части вида

$$f(u, \xi, x, t) \operatorname{sign}(u) \geqslant 0 \ (\leqslant 0).$$

Мы покажем, что в локальной по времени постановке данное условие является несущественным.

Сформулируем теперь задачу со свободной границей, порождаемую задачей (1)–(3). Имея в виду рассмотреть случай наличия у задачи (1)–(3) гладкого интерфейса $\{u = 0\}$, мы начнем с его параметризации с помощью некоторой неизвестной функции. Пусть начальная функция $u_0(x)$ в (3) такова, что множество $\{u_0(x) = 0\}$ представляет собой гладкую замкнутую поверхность класса $H^{4+\alpha}$, лежащую между Γ^+ и Γ^- и разбивающую область Ω на две подобласти Ω^+ и Ω^- так, что $\partial\Omega^\pm = \Gamma \bigcup \Gamma^\pm$. Пусть $\gamma_0 > 0$ достаточно мало. Введем в достаточно малой окрестности $\mathcal{N} = \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leqslant \gamma_0\}$ поверхности Γ координаты (ω, λ), где ω — некоторые гладкие координаты на поверхности Γ, $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leqslant \gamma_0$, таким образом, что если $x \in \mathcal{N}$, то единственным образом

$$x = x(\omega) + \lambda \vec{n}(\omega) = x(\omega, \lambda), \tag{9}$$

где $x(\omega) \in \Gamma$ — точка поверхности Γ с координатами ω, λ — отклонение точки x от $x(\omega)$ по нормали $\vec{n} = \vec{n}(\omega)$ к поверхности Γ в точке $x(\omega)$, направленной внутрь Ω^+. Пусть гладкая функция $\rho(\omega, t)$ определена на $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, причем $\rho(\omega, 0) \equiv 0$ на Γ. Тогда уравнение

$$x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t), \qquad t \in [0, T],$$

задает некоторую поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ в Ω_T, которая при $|\rho(\omega, t)| \leqslant \gamma_0$ лежит в окрестности $\mathcal{N}_T = \mathcal{N} \times [0, T]$ поверхности Γ_T, причем $\Gamma_{\rho,T} \bigcap \{t = 0\} = \Gamma$, так как $\rho(\omega, 0) = 0$. Обозначим через $\Omega^{\pm}_{\rho,T}$ те области, на которые $\Gamma_{\rho,T}$ разбивает область Ω_T.

Рассмотрим задачу нахождения неизвестной функции $\rho(\omega, \tau)$, определенной на Γ_T, и неизвестных функций $u^+(y, \tau) > 0$ и $u^-(y, \tau) < 0$, определенных соответственно в областях $\Omega^+_{\rho,T}$ и $\Omega^-_{\rho,T}$, по соотношениям (мы изменили обозначение независимых переменных (x, t) на (y, τ) ввиду последующей замены переменных)

$$L_0^{\pm}(u^{\pm})u^{\pm} \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}^{\pm}(y, \tau, u^{\pm})\frac{\partial u^{\pm}}{\partial y_j}\right) = f^{\pm}(y, \tau, u^{\pm}, \nabla u^{\pm}), \quad (y, \tau) \in \Omega^{\pm}_{\rho,T}, \quad (10)$$

$$u^{\pm}(y, 0) = u_0^{\pm}(y), \qquad y \in \overline{\Omega}^{\pm}; \qquad \rho(\omega, 0) = 0, \qquad \omega \in \Gamma, \quad (11)$$

$$u^{\pm}(y, \tau) = g^{\pm}(y, \tau), \qquad (y, \tau) \in \Gamma^{\pm}_T, \quad (12)$$

$$u^+(y, \tau) = u^-(y, \tau) = 0, \qquad (y, \tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \quad (13)$$

$$(\nu, A^+\nabla u^+) = (\nu, A^-\nabla u^-), \qquad (y, \tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \quad (14)$$

$$\pm u^{\pm}(y, \tau) > 0, \qquad (y, \tau) \in \Omega^{\pm}_{\rho,T}, \quad (15)$$

где

$$(\nu, A^{\pm}\nabla u^{\pm}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\pm}(y, \tau, 0)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial y_j}\nu_i(\tau).$$

Здесь $a_{ij}^{\pm}(u, y, \tau)$ и $f^{\pm}(u, \nabla u, y, \tau)$ есть сужения функций a_{ij} и f из (1) на области $\{u \geqslant 0\}$ и $\{u \leqslant 0\}$ соответственно; $u_0^{\pm}(y)$, $g^{\pm}(y, \tau)$ — заданные функции; $\nu_i(\tau)$ — координаты вектора единичной нормали к поверхности $\Gamma_{\rho,T} \bigcap \{\tau = \mathrm{const}\}$, направленного внутрь $\Omega^+_{\rho,T}$. Условия (13), (14) представляют собой три условия на неизвестной границе $\Gamma_{\rho,T}$, причем условия (13) вместе с (15) означают, что $\Gamma_{\rho,T}$ является интерфейсом $\{u = 0\}$, а условие (14) означает непрерывность потока, так как уравнение (1) должно выполняться в обычном смысле. Таким образом, ввиду условий (13), (14), а также условия (15), задача (10)–(15) эквивалентна задаче (1)–(3). Отметим, что с целью удовлетворить условие (15) мы накладываем на данные задачи (10)–(15) следующее требование:

$$\pm g^{\pm}(y, \tau) \geqslant \nu > 0, \qquad (y, \tau) \in \Gamma^{\pm}_T; \qquad \pm u_0^{\pm}(y) > 0, \qquad y \in \Omega^{\pm}. \quad (16)$$

Сформулируем теперь основное утверждение данной работы.

Теорема 1. *Пусть кроме условий* (4)–(6), (16) *для задачи* (10)–(15) *выполнены условия согласования до первого порядка включительно при* $y \in \Gamma^{\pm}$, $\tau = 0$, *а также выполнено условие*

$$|\nabla u_0^{\pm}(y)| = \left|\frac{\partial u_0(y)}{\partial \vec{n}}\right| \geqslant \nu > 0, \qquad y \in \Gamma, \quad (17)$$

и пусть

$$\Gamma, \Gamma^{\pm} \in H^{4+\alpha}, \qquad u_0^{\pm} \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm}), \qquad g^{\pm}(y,\tau) \in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\Gamma_T^{\pm}). \tag{18}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия согласования при $y \in \Gamma$, $\tau = 0$*:*

$$(\nabla, A^{+}\nabla u_0^{+}) = (\nabla, A^{-}\nabla u_0^{-}), \tag{19}$$

$$\frac{(\nabla, A^{+}\nabla u_0^{+}) + f^{+}(y,0,0,\nabla u_0^{+})}{\dfrac{\partial u_0^{+}}{\partial \vec{n}}} = \frac{(\nabla, A^{-}\nabla u_0^{-}) + f^{-}(y,0,0,\nabla u_0^{-})}{\dfrac{\partial u_0^{-}}{\partial \vec{n}}}. \tag{20}$$

(Условие (19) *вытекает из* (14)*, а условие* (20) *является необходимым для наличия гладкого интерфейса, как будет показано ниже.) Тогда на некотором интервале времени* $[0,T]$ *задача* (10)–(15) *(а тем самым и задача* (1)–(3)*) имеет единственное гладкое решение, причем*

$$|\rho|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_T)} + |u^{\pm}|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_{\rho,T})} \leqslant C(T, u_0^{\pm}, g^{\pm}). \tag{21}$$

Доказательство этой теоремы базируется на методе, изложенном, например, в [11]. Общая схема этого метода такова. С помощью описанной ниже замены координат, зависящей от неизвестной функции $\rho(\omega,t)$ (см. [12]), задача (10)–(15) сводится к задаче в известных областях $\Omega_T^{\pm} = \Omega^{\pm} \times [0,T]$ для тройки неизвестных функций $\psi = (u^{+}, u^{-}, \rho)$ и может быть представлена в виде уравнения в некоторых банаховых пространствах

$$A(\psi) = F \tag{22}$$

с некоторым гладким по ψ нелинейным оператором A (точное определение банаховых пространств и оператора A будут даны ниже). Далее, путем продолжения начальных данных (обладающих повышенной гладкостью) в область $t > 0$ строится элемент ψ_0 таким образом, что величина $F - A(\psi_0)$ является малой для достаточно малого интервала $[0,T]$, $\|F - A(\psi_0)\| \leqslant CT^{\delta}$. После введения нового неизвестного $\varphi = \psi - \psi_0$ уравнение (22) представляется в виде

$$A'(\psi_0)\varphi = [F - A(\psi_0)] - [A(\psi_0 + \varphi) - A'(\psi_0)\varphi - A(\psi_0)] \equiv F_0 - R(\varphi), \tag{23}$$

где $A'(\psi_0)$ — линейный оператор, представляющий собой производную Фреше оператора $A(\psi)$ в точке ψ_0, а оператор $R(\psi)$, в силу гладкости оператора $A(\psi)$ по ψ, содержит только "квадратичные" по ψ слагаемые. Как мы покажем ниже, оператор $A'(\psi_0)$ имеет ограниченный обратный оператор, поэтому уравнение (23) может быть записано в виде

$$\varphi = [A'(\psi_0)]^{-1}F_0 - [A'(\psi_0)]^{-1}R(\varphi) \equiv K(\varphi).$$

При этом нелинейный оператор $K(\varphi)$ обладает свойствами

$$\|K(0)\| \leqslant CT^{\delta}, \qquad \|K(\varphi)\| C(T^{\delta} + \|\varphi\|^2),$$

$$\|K(\varphi_2) - K(\varphi_1)\| \leqslant C(T^{\delta} + \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\|\varphi_2 - \varphi_1\|.$$

В силу этих свойств при достаточно малом $T > 0$ оператор $K(\varphi)$ переводит шар $\{\varphi\colon \|\varphi\| \leqslant r\}$ достаточно малого радиуса r в себя и является в нем сжимающим. Единственная неподвижная точка φ_0 оператора $K(\varphi)$ и дает решение исходной задачи в виде $\psi_0 + \varphi_0$.

Отметим, что линейная задача, соответствующая упомянутому в (23) оператору $A'(\psi_0)$, т. е. операторное уравнение в соответствующем банаховом пространстве $A'(\psi_0)\varphi = f$, представляет собой линейную задачу для неизвестной тройки (v^+, v^-, δ) вида

$$\frac{\partial v^\pm}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}^\pm(x,t)\frac{\partial v^\pm}{\partial x_j}\right) = f_1^\pm, \qquad (x,t) \in \Omega_T^\pm, \tag{24}$$

$$v^\pm(x,0) = 0, \qquad \delta(\omega,0) = 0, \tag{25}$$

$$v^\pm(x,t) = f_2^\pm(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T^\pm, \tag{26}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^+(x,t)\frac{\partial u^+}{\partial x_j}n_i - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^-(x,t)\frac{\partial u^-}{\partial x_j}n_i = f_3, \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{27}$$

$$v^\pm(x,t) + b^\pm(x,t)\delta = f_4^\pm(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{28}$$

где $b_{ij}^\pm(x,t) = a_{ij}^\pm(x,t,w_\sigma^\pm(x,t)) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $b^\pm(x,t) = \partial w^\pm/\partial n \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_T)$, $b^\pm(x,t) \geqslant \nu > 0$.

Легко видеть, что неизвестная функция δ входит только в соотношения (28). Поэтому эту неизвестную функцию можно исключить путем умножения соотношения (28) для знака "+" на b^-, а для знака "−" на b^+ и вычитания одного из другого. В результате вместо (28) получим

$$b^- v^+(x,t) - b^+ v^-(x,t) = f_4 \equiv b^- f_4^+ - b^+ f_4^-, \qquad (x,t) \in \Gamma_T. \tag{29}$$

Задача (24)–(27), (29) представляет собой известную задачу дифракции, или задачу сопряжения. При этом из результатов работ [13–15] следует, что при соответствующей гладкости правых частей (см. (30) ниже) задача (24)–(27), (29) однозначно разрешима в $\overline{\Omega}_T$, причем для ее решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} |v^+|_{\Omega_T^+}^{(2+\alpha)} + |v^-|_{\Omega_T^-}^{(2+\alpha)} \leqslant C\big(|f_1^+|_{\Omega_T^+}^{(\alpha)} + |f_1^-|_{\Omega_T^-}^{(\alpha)} + |f_2^+|_{\Gamma_T^+}^{(2+\alpha)} + |f_2^-|_{\Gamma_T^-}^{(2+\alpha)} + |f_3|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + \\ + |f_4^+|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |f_4^-|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}\big) \equiv CM(T). \end{aligned} \tag{30}$$

Теперь, когда функции $v^\pm$ найдены, функция δ легко определяется из соотношения (28), причем

$$|\delta|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant CM(T). \tag{31}$$

Таким образом, для любых функций $f_1^\pm \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $f_2^\pm \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_T^\pm)$, $f_3 \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Gamma_T)$, $f_4^\pm \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_T)$ задача (24)–(28) имеет единственное решение, причем

$$|v^+|_{\Omega_T^+}^{(2+\alpha)} + |v^-|_{\Omega_T^-}^{(2+\alpha)} + |\delta|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant CM(T). \tag{32}$$

С учетом описанных свойств линейной задачи, доказательство теоремы 1 получается по описанной выше схеме.

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Norburu J., Stuart A. M.* A model for porous medium combustion // Quart. J. Appl. Math. – 1989. – **42**. – P. 159–178.
3. *Norburu J., Stuart A. M.* Parabolic free boundary problems arising in porous medium combustion // IMA J. Appl. Math. – 1987. – **39**. – P. 241–257.
4. *Lacey A. A.* The spatial dependence of supercritical reacting systems // Ibid. – 1981. – **27**. – P. 71–84.
5. *Friedman A., Tzavaras A. E.* Combustion in a porous medium // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – **19**, No 3. – P. 509–519.
6. *Gianni R., Hulshof J.* The semilinear heat equation with a Heaviside source term // Eur. J. Appl. Math. – 1992. – **3**, No 4. – P. 367–379.
7. *Gianni R., Manucci P.* Existence theorems for a free boundary problem in combustion theory // Quart. Appl. Math. – 1993. – **51**, No 1. – P. 43–53.
8. *Gianni R., Manucci P.* Some existence theorems for n-dimensional parabolic equation with a discontinuous source term // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – **24**, No 3. – P. 618–633.
9. *Gianni R.* Existence of the free boundary in a multi-dimensional combustion problem // Proc. Roy. Soc. Edinburg. A. – 1995. – **125**, No 3. – P. 525–544.
10. *Brauner C.-M., Roquejoffre J.-M., Shmidt-Laine C.* Stability of travelling waves in a parabolic equation with discontinuous source term // Comm. Appl. Nonl. Anal. – 1996. – **2(4)**. – P. 83–100.
11. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. – 1987. – **132(174)**, № 1. – С. 3–19.
12. *Hanzawa E.-I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J. – 1981. – No 33. – P. 297–335.
13. *Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н.* О классической разрешимости задачи дифракции // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. – 1966. – **92**. – С. 116–146.
14. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Там же. – 1965. – **83**. – 163 с.
15. *Цаповска Ж. Я.* Решение параболической задачи сопряжения в нецилиндрической области методом потенциала // Мат. методы физ.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 39–46.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.04.2009

S. P. Degtyarev

On the existence of a smooth solution to a free boundary problem for the quasilinear parabolic equation with discontinuous coefficients

We study a free boundary problem which arises in studying the quasilinear parabolic equation of the second order with discontinuous coefficients and the right-hand side which are discontinuous at some fixed value of the unknown function. Thus, the geometric interface of the discontinuity is one of the principal unknowns of the problem. We prove that the interface itself is smooth, and the solution is smooth in each closed subregion, where the coefficients are smooth down to the interface.