УДК 517.96

© 2009

С. В. Грищук, С. А. Плакса

Моногенные функции в бигармонической плоскости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П. М. Тамразовым)

Одержано конструктивний опис моногенних функцій, що задані в бігармонічній площині та набувають значень у комутативній алгебрі другого рангу, яка асоційована з бігармонічним рівнянням. Встановлено основні аналітичні властивості моногенних функцій у бігармонічній площині, аналогічні до властивостей голоморфних функцій комплексної змінної: інтегральна теорема та інтегральна формула Коші, теорема Морера, теорема единості, тейлорівські та лоранівські розклади.

В работе [1] построена ассоциативная коммутативная алгебра второго ранга $\mathbb{B}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, таблица умножения базисных элементов e_1, e_2 которой имеет вид

$$e_1^2 = e_1, \qquad e_2 e_1 = e_2, \qquad e_2^2 = e_1 + 2ie_2, \tag{1}$$

где i — мнимая комплексная единица.

В работе [2] доказано, что все *бигармонические* базисы $\{e_1, e_2\}$, удовлетворяющие условиям

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{2}$$

содержатся в алгебре $\mathbb{B}$, которую также будем называть *бигармонической.*

Как и в работе [1], *бигармонической плоскостью* μ_{e_1,e_2} будем называть линейную оболочку $\mu_{e_1,e_2} := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \colon x, y \in \mathbb{R}\}$ базисных элементов e_1, e_2, удовлетворяющих равенствам (1), над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Области D декартовой плоскости xOy поставим в соответствие конгруэнтную ей область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \colon (x, y) \in D\}$ в плоскости μ_{e_1,e_2}.

Поскольку произвольный элемент бигармонической плоскости, кроме нулевого, обратим, то производная функции, заданной в области бигармонической плоскости, определяется так же, как и в комплексной плоскости. Так, функцию $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ будем называть *моногенной* в области D_ζ, если в каждой точке $\zeta \in D_\zeta$ существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0,\, h \in \mu_{e_1,e_2}} (\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta))\, h^{-1} = \Phi'(\zeta),$$

называемый *производной* функции Φ в точке ζ.

Если функция

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)e_1 + U_2(x, y)ie_1 + U_3(x, y)e_2 + U_4(x, y)ie_2, \qquad \zeta = xe_1 + ye_2, \tag{3}$$

где $U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно в области D_ζ, то в силу равенства

$$\Delta^2 \Phi := \frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial y^4} = \Phi^{(4)}(\zeta)(e_1^2 + e_2^2)^2 \tag{4}$$

и условия (2) каждая из ее компонент $U_k(x,y)$, $k=\overline{1,4}$, является *бигармонической функцией*, т. е. удовлетворяет в области D бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 U(x,y)=0. \tag{5}$$

В работе [1] построены в явном виде моногенные функции в форме главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в бигармоническую плоскость. В данной работе получено конструктивное описание всех моногенных функций в плоскости μ_{e_1,e_2} с помощью голоморфных функций комплексной переменной и установлены их аналогичные аналитические свойства: интегральная теорема и интегральная формула Коши, теорема Морера, теорема единственности, тейлоровские и лорановские разложения.

Конструктивное описание моногенных функций, заданных в бигармонической плоскости. В работе [1] рассмотрены моногенные функции, определенные в областях бигармонической плоскости, и установлены необходимые и достаточные условия их моногенности (условия Коши–Римана), которые запишем здесь в свернутом виде:

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y}e_1=\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}e_2 \qquad \forall\,\zeta=xe_1+ye_2\in D_\zeta. \tag{6}$$

Чтобы описать в явном виде все моногенные функции бигармонической переменной с помощью голоморфных функций комплексной переменной, установим некоторые алгебраико-аналитические свойства моногенных функций, заданных в областях бигармонической плоскости. С этой целью введем в рассмотрение элемент $\rho:=2e_1+2ie_2$, который в силу равенства $\rho^2=0$ является нильпотентным элементом и порождает единственный максимальный идеал $\mathcal{I}:=\{c\rho : c\in\mathbb{C}\}$ алгебры $\mathbb{B}$. Идеалу $\mathcal{I}$ соответствует линейный непрерывный функционал $f\colon\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{C}$, ядром которого является $\mathcal{I}$ и при этом $f(1)=1$.

Введем в рассмотрение линейный оператор $\mathcal{A}$, который каждой функции $\Phi\colon D_\zeta\longrightarrow\mathbb{B}$ ставит в соответствие функцию $F_\Phi\colon D_z\longrightarrow\mathbb{C}$, определенную в области $D_z:=\{z=f(\zeta)\colon \zeta= =xe_1+ye_2\in D_\zeta\}$ комплексной плоскости равенством $F_\Phi(z):=f(\Phi(\zeta))$, где $\zeta=xe_1+ye_2$ и $z=x+iy$. При этом очевидно, что функция $F_\Phi=\mathcal{A}\Phi$ голоморфна в области D_z, если функция Φ моногенна в области D_ζ.

Аналогично теореме 2.4 из [3] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi\colon D_\zeta\longrightarrow\mathbb{B}$ представима в виде*

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (t-\zeta)^{-1}(\mathcal{A}\Phi)(t)\,dt+\Phi_0(\zeta) \qquad \forall\,\zeta\in D_\zeta, \tag{7}$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в области D_z, охватывающая точку $f(\zeta)$, а $\Phi_0\colon D_\zeta\longrightarrow\mathcal{I}$ — моногенная в области D_ζ функция, принимающая значения в идеале $\mathcal{I}$.

Заметим, что комплексное число $z=f(\zeta)$ является спектром элемента ζ алгебры $\mathbb{B}$ и интеграл в равенстве (7) является главным продолжением голоморфной функции $F=\mathcal{A}\Phi$ в область D_ζ.

Из теоремы 1 следует, что алгебра моногенных в области D_ζ функций разлагается в прямую сумму алгебры главных продолжений в D_ζ голоморфных функций комплексной переменной и алгебры моногенных в D_ζ функций, принимающих значения в идеале $\mathcal{I}$.

В работе [1] главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной в бигармоническую плоскость построены в явном виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)(t-\zeta)^{-1}dt = F(z)e_1 - \frac{iy}{2}F'(z)\rho \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta, \tag{8}$$

где $z = x + iy \in D_z$.

В следующей теореме при помощи голоморфных функций комплексной переменной описаны все моногенные функции со значениями в идеале $\mathcal{I}$, определенные в области D_ζ бигармонической плоскости.

Теорема 2. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi_0\colon D_\zeta \longrightarrow \mathcal{I}$, принимающая значения в идеале $\mathcal{I}$, представима в виде*

$$\Phi_0(\zeta) = F_0(z)\rho \qquad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{9}$$

где $F_0\colon D_z \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция комплексной переменной $z = f(\zeta)$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что условия моногенности (6) при подстановке в них функции $\Phi = \Phi_0$ вида (9) с учетом равенства $e_2\rho = i\rho$ превращаются в условия Коши–Римана для функции $F_0(z)$ комплексной переменной z.

Таким образом, в силу равенств (7)–(9) все моногенные функции $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ могут быть построены с помощью двух произвольных голоморфных функций F, F_0 в виде

$$\Phi(\zeta) = F(z)e_1 - \left(\frac{iy}{2}F'(z) - F_0(z)\right)\rho \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta, \tag{10}$$

где $z = x + iy \in D_z$.

Заметим, что в работе [4] равенство (10) записано в несколько ином виде и получено для моногенных функций Φ при дополнительных предположениях о геометрии области D_ζ.

Используя представление моногенной функции Φ в виде (10), заключаем, что она является бесконечно дифференцируемой по переменным x, y функцией в области D. Поэтому производная Φ' удовлетворяет в D_ζ условиям вида (6), т. е. является моногенной функцией. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ имеет в D_ζ производные всех порядков.*

Из теоремы 3, равенства (4) и условия (2) следует, что компоненты $U_k(x,y)$, $k = \overline{1,4}$, каждой функции (3), моногенной в области D_ζ, удовлетворяют бигармоническому уравнению (5) в области D.

Основные аналитические свойства моногенных функций бигармонической переменной. В работе [5] для функций, дифференцируемых по Лорху в выпуклой области произвольной ассоциативной коммутативной банаховой алгебры, установлен ряд свойств, аналогичных свойствам голоморфных функций комплексной переменной (в частности, интегральная теорема и интегральная формула Коши, разложимость в степенной ряд, теорема Морера). В работе [6] в указанных результатах из [5] снято условие выпуклости области определения заданных функций.

Мы установим аналогичные результаты для моногенных функций $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, заданных лишь в области D_ζ бигармонической плоскости. При этом заметим, что для таких функций, в частности, не имеют места интегральные формулы Коши, установленные в работах [5, 6], поскольку в этих формулах интегрирование ведется по кривым, на которых функция Φ, вообще говоря, не определена.

Для евклидовой нормы алгебры $\mathbb{B}$

$$\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \qquad \text{где} \qquad a = z_1e_1 + z_2e_2 \qquad \text{и} \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

выполняется неравенство

$$\|ab\| \leqslant \sqrt{10}\|a\|\|b\| \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{B}. \tag{11}$$

В бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2} так же, как и в комплексной плоскости определяется спрямляемая кривая и интеграл вдоль спрямляемой кривой. Поэтому с использованием неравенства (11) по классической схеме (см., напр., [7]) доказывается интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши для моногенных функций бигармонической переменной $\zeta \in \mu_{e_1,e_2}$, при этом для доказательства интегральной формулы Коши используется следующая лемма.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta^{-1} d\zeta = 2\pi i e_1,$$

где $\Gamma := \{\zeta \in \mu_{e_1,e_2} \colon \|\zeta\| = r\}$ *и* r *— произвольное положительное число.*

Доказательство. Обозначим через γ окружность в $\mathbb{C}$ радиуса r с центром в точке 0. Теперь, представляя моногенную функцию $\Phi(\zeta) = \zeta^{-1}$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2$ в виде (10), где $F(z) = z^{-1}$, $F_0(z) \equiv 0$ и $z = x + iy$, а также учитывая равенство $\zeta = z - i\rho y/2$, получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = e_1 \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} - \frac{i\rho}{2}\left(\int\limits_{\gamma} \frac{dy}{z} - \int\limits_{\gamma} \frac{y\,dz}{z^2}\right) =: e_1 i_1 - \frac{i\rho}{2}(i_2 - i_3).$$

Здесь $i_1 = 2\pi i$, а при вычислении выражения $i_2 - i_3$, выполнив замену переменных $z = r\exp(i\varphi)$, получим

$$i_2 - i_3 = \int\limits_0^{2\pi} \exp(-2i\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть граница* ∂D_ζ *области* D_ζ *является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, а функция* $\Phi\colon \overline{D_\zeta} \longrightarrow \mathbb{B}$ *непрерывна в замыкании* $\overline{D_\zeta}$ *области* D_ζ *и моногенна в* D_ζ*. Тогда справедливы равенства*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} \Phi(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (\textit{теорема Коши}), \tag{12}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\zeta} \Phi(\tau)(\tau - \zeta)^{-1} d\tau \qquad \forall\, \zeta \in D_\zeta \qquad (\textit{формула Коши}). \tag{13}$$

С учетом теоремы 3 и использованием неравенства (11) по стандартной схеме (см., напр., [7]) доказывается следующая терема Морера для функций бигармонической переменной.

Теорема 5. *Если функция* $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ *непрерывна в области* D_ζ *и интеграл от нее по границе произвольного треугольника, замыкание которого содержится в* D_ζ, *равен нулю, то функция* Φ *моногенна в области* D_ζ.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении функции, моногенной в области D_ζ бигармонической плоскости, в степенной ряд (ряд Тейлора). Непосредственное применение способа разложения голоморфных функций, основанного на разложении в ряд ядра Коши (см., напр., [7, с. 107]), к моногенной в области D_ζ функции (13) позволяет получить ее разложение в степенной ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\zeta - \zeta_0)^n \tag{14}$$

в круге с центром в фиксированной точке $\zeta_0 \in D_\zeta$ меньшего радиуса, чем расстояние от точки ζ_0 до границы области D_ζ; здесь

$$b_n = \frac{\Phi^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \Phi(\tau)((\tau - \zeta_0)^{-1})^{n+1}\, d\tau, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

и Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в области D_ζ, охватывающая точку ζ_0. Это связано с тем, что в оценке (11) константа $\sqrt{10}$ не может быть заменена единицей.

Тем не менее, используя представление (10) моногенной функции $\Phi(\zeta)$, установим сходимость ряда (14) в круге $K_R(\zeta_0) := \{\zeta \in \mu_{e_1,e_2}\colon \|\zeta - \zeta_0\| < R\}$ радиуса $R := \min\limits_{\tau \in \partial D_\zeta} \|\tau - \zeta_0\|$.

Теорема 6. *Если функция* $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ *моногенна в области* D_ζ *и* $\zeta_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2$ — *произвольная точка области* D_ζ, *то в круге* $K_R(\zeta_0)$ *она представима в виде суммы сходящегося степенного ряда* (14), *при этом*

$$b_n = \left(c_n + \left(c_n^{(0)} - (n+1)\frac{iy_0}{2} c_{n+1}\right)\rho\right), \tag{15}$$

а c_n *и* $c_n^{(0)}$ — *коэффициенты рядов Тейлора входящих в равенство* (10) *функций* F *и* F_0:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} (z - z_0)^n, \tag{16}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

Доказательство. Поскольку входящие в равенство (10) функции F и F_0 голоморфны в области D_z, то ряды (16) абсолютно сходятся в круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$. Тогда перепишем равенство (10) в виде

$$\Phi(\zeta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left((z - z_0)^n - \frac{i(y - y_0)}{2} n (z - z_0)^{n-1}\rho\right) -$$
$$- \frac{iy_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z - z_0)^n \rho + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} (z - z_0)^n \rho.$$

Отсюда, учитывая соотношения

$$(\zeta-\zeta_0)^n=(z-z_0)^n-n\frac{i\rho}{2}(z-z_0)^{n-1}, \qquad (\zeta-\zeta_0)^n\rho=(z-z_0)^n\rho \tag{17}$$

при всех $\zeta\in\mu_{e_1,e_2}$ и $n=0,1,\ldots$, приходим к разложению (14), коэффициенты которого определяются равенством (15), при этом ряд (14) абсолютно сходится в круге $K_R(\zeta_0)$. Теорема доказана.

Теперь так же, как и для голоморфных функций комплексной переменной (см., напр., [7, с. 118]), устанавливается следующая теорема единственности для моногенных функций бигармонической переменной.

Теорема 7. *Если две моногенные в области D_ζ функции совпадают на некотором множестве, которое имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую D_ζ, то они тождественно равны во всей области D_ζ.*

Итогом предыдущего изложения свойств моногенных функций бигармонической переменной является следующая теорема, содержащая критерии моногенности.

Теорема 8. *Функция $\Phi\colon D_\zeta\longrightarrow\mathbb{B}$ является моногенной в области D_ζ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(I) компоненты U_k, $k=\overline{1,4}$, разложения (3) *функции Φ дифференцируемы в области D и выполняется равенство* (6) *в каждой точке области D_ζ;*

(II) существует единственная пара функций F и F_0, голоморфных в области D_z, такая, что функция Φ представима в виде (10)*;*

(III) функция Φ непрерывна в D_ζ и интеграл от нее по границе произвольного треугольника, замыкание которого содержится в D_ζ, равен нулю;

(IV) для каждой точки ζ_0 области D_ζ найдется окрестность, в которой функция Φ разлагается в степенной ряд (14).

Доказательство. Эквивалентность условия I и моногенности функции Φ доказана в работе [1]. Для доказательства эквивалентности условия II и моногенности функции Φ достаточно заметить, что для функции (10) выполняются необходимые и достаточные условия моногенности (6), а единственность пары голоморфных функций F и F_0, связанных с моногенной функцией Φ соотношением (10), следует из однозначности разложения элементов алгебры $\mathbb{B}$ по базису $\{e_1,\rho\}$. Эквивалентность условия III и моногенности функции Φ следует из теорем 4, 5. Наконец, эквивалентность условия IV и моногенности функции Φ является следствием теоремы 6 и свойства сходящегося ряда (14) определять функцию, моногенную в круге сходимости. Теорема доказана.

Ряды Лорана и классификация изолированных особых точек моногенных функций бигармонической переменной. Рассмотрим ряды Лорана в бигармонической плоскости.

Теорема 9. *Каждая моногенная в кольце $\mathcal{K}:=\{\zeta\in\mu_{e_1,e_2}\colon 0\leqslant r<\|\zeta-\zeta_0\|<R\leqslant\leqslant\infty\}$ с центром в фиксированной точке $\zeta_0=x_0e_1+y_0e_2\in\mu_{e_1,e_2}$ функция $\Phi\colon\mathcal{K}\longrightarrow\mathbb{B}$ представима в нем в виде суммы сходящегося ряда*

$$\Phi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(\zeta-\zeta_0)^n, \tag{18}$$

где $(\zeta-\zeta_0)^n:=((\zeta-\zeta_0)^{-1})^{-n}$ при $n=-1,\,-2,\ldots$, и коэффициенты b_n определяются по *формулам*

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \Phi(\tau)(\tau-\zeta_0)^{-n-1}d\tau, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{19}$$

где Γ — *произвольная замкнутая жорданова кривая в области* $\mathcal{K}$, *охватывающая точку* ζ_0.

Доказательство. Поскольку входящие в равенство (10) функции F и F_0 голоморфны в кольце $\{z \in \mathbb{C}\colon r < |z-z_0| < R\}$ с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в этом кольце каждая из них допускает разложение в абсолютно сходящийся ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad F_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(0)}(z-z_0)^n.$$

Поэтому, переписывая равенство (10) в виде

$$\Phi(\zeta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\biggl((z-z_0)^n - \frac{i(y-y_0)}{2} n(z-z_0)^{n-1}\rho\biggr) -$$
$$- \frac{iy_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n\rho + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)}(z-z_0)^n\rho + c_{-1}\biggl(\frac{1}{z-z_0} + \frac{i(y-y_0)}{2(z-z_0)^2}\rho\biggr) +$$
$$+ \frac{c_{-1}^{(0)}}{z-z_0}\rho + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n\biggl((z-z_0)^n - \frac{i(y-y_0)}{2} n(z-z_0)^{n-1}\rho\biggr) -$$
$$- \frac{iy_0}{2}\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n\rho + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n^{(0)}(z-z_0)^n\rho$$

и учитывая соотношения (17) при всех $\zeta \in \mathcal{K}$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, приходим к разложению функции Φ в ряд (18), коэффициенты которого определяются равенствами (15), при этом ряд (18) абсолютно сходится в кольце $\mathcal{K}$. Умножая теперь обе части равенства (18) на $(\zeta-\zeta_0)^{-n-1}$ и интегрируя затем по кривой Γ, получаем формулы (19) для коэффициентов ряда (18). Теорема доказана.

Очевидно, что каждый сходящийся в кольце $\mathcal{K}$ ряд вида (18) с коэффициентами из алгебры $\mathbb{B}$ является в этом кольце рядом Лорана своей суммы. Совокупность членов ряда (18) с неотрицательными степенями называют его *правильной частью*, а совокупность членов этого ряда с отрицательными степенями — *главной частью*.

Компактифицируем алгебру $\mathbb{B}$, добавляя к ней бесконечно удаленную точку, к которой сходится каждая последовательность $w_n := z_{1,n}e_1 + z_{2,n}e_2$, где $z_{1,n}, z_{2,n} \in \mathbb{C}$, в случае, когда хотя бы одна из последовательностей $z_{1,n}$, $z_{2,n}$ сходится к бесконечно удаленной точке расширенной комплексной плоскости.

Теперь понятия устранимой особой точки, полюса или существенно особой точки для функции $\Phi(\zeta)$, моногенной в проколотой окрестности $\{\zeta \in \mu_{e_1,e_2}\colon 0 < \|\zeta-\zeta_0\| < r\}$ точки ζ_0, вводятся так же, как и соответствующие понятия для голоморфных функций в комплексной плоскости (см., напр., [7]), и изолированные особые точки моногенных функций бигармонической переменной аналогично классифицируются в зависимости от вида их лорановских разложений.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *Изолированная особая точка ζ_0 функции $\Phi(\zeta)$ является:*

а) устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (18) *в окрестности точки ζ_0 тождественно равна нулю;*

б) полюсом тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (18) *в окрестности точки ζ_0 содержит лишь конечное число отличных от нуля членов;*

в) существенно особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (18) *в окрестности ζ_0 содержит бесконечное число отличных от нуля членов.*

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 25.1/084) и Государственной программы Украины, № 0107U002027.

1. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25–27.
2. *Мельниченко И. П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 2. – С. 252–254.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
4. *Ковалев В. Ф.* Бигармоническая задача Шварца. – Киев, 1986. – 19 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 86.16).
5. *Lorch E. R.* The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **54**, No 3. – P. 414–425.
6. *Blum E. K.* A theory of analytic functions in Banach algebras // Ibid. – 1955. – **78**, No 2. – P. 343–370.
7. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2 ч. – Москва: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 07.04.2009

S. V. Gryshchyk, S. A. Plaksa

Monogenic functions in a biharmonic plane

We have obtained a constructive description of monogenic functions which are given in a biharmonic plane and take values in a commutative second-rank algebra associated with the biharmonic equation. For monogenic functions given in the biharmonic plane, we have established basic properties analogous to properties of holomorphic functions of complex variable: the Cauchy integral theorem and integral formula, the Morera theorem, the unicity theorem, and the Taylor and Laurent expansions.