ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.96

В. В. Городецький, Д. І. Спіжавка

Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової задачі для еволюційного рівняння з псевдобесселевими операторами в класі крайових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів.

При математичному моделюванні реальних процесів (поширення електромагнітних хвиль, коливання різних систем, водоперенесення тощо) виникають багатоточкові крайові задачі для рівнянь з частинними похідними з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами. За останні 40 років нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчало багато науковців (О. О. Дезін, А. М. Нахушев, В. М. Борок, В. К. Романко, О. А. Самарський, О. Л. Скубачевський та ін.), виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач. Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі в усьому просторі та в циліндричній області досліджені в [1]. Коректність крайових задач з нелокальними періодичними умовами за виділеною змінною для широких класів лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку розглядалась в [2].

У роботі [3] вивчені властивості оператора $A = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F_{B_\nu}^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Бесселя, a — однорідний негладкий у точці 0 символ (оператор A в [3] називається псевдобесселевим оператором). Еволюційні рівняння з оператором A є природними узагальненнями сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, який вироджується за просторовою змінною, оскільки B_ν також можна подати у вигляді $B_\nu\varphi = -F_{B_\nu}[\sigma F_{B_\nu}[\varphi]]$, де φ — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. В [3] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $du/dt + Au = 0$, де A — псевдобесселевий оператор, у класі початкових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів.

У цьому повідомленні встановлюється коректна розв'язність багатоточкової задачі для еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором у класі крайових умов типу розподілів; досліджуються структура та властивості фундаментального розв'язку такої задачі.

Простори основних та узагальнених функцій. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1;+\infty)\setminus\{2,3,4,\ldots\}$, ν — фіксоване число з множини $\{3/2,5/2,7/2,\ldots\}$, $\widetilde{p_0}:=2\nu+1$, $\gamma_0:=1+[\gamma]+\widetilde{p_0}$, $M(x):=1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$,

$$\Phi=\{\varphi\in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R})\colon |D_x^k\varphi(x)|\leqslant c_k(1+|x|)^{-(\gamma_0+k)},\ k\in\mathbb{Z}_+\}.$$

Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}|D_x^k\varphi(x)|\right\},\qquad \varphi\in\Phi,\qquad p\in\mathbb{Z}_+;$$

при цьому Φ перетворюється в повний досконалий зліченно-нормований простір [3]. Збіжність в Φ можна охарактеризувати ще й так [3]: послідовність $\{\varphi_j, j\geqslant 1\}\subset\Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi\in\Phi$ тоді і лише тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall\, p\in\mathbb{Z}_+\ \ \exists\, c=c(p)>0\ \ \forall\, j\geqslant 1\colon\quad \|\varphi_j\|_p\leqslant c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме для довільного $k\in\mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_x^k(\varphi_j-\varphi)$, $j\geqslant 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a;b]\subset\mathbb{R}$.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи — основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена і неперервна операція узагальненого зсуву аргументу T_x^{ξ}:

$$T_x^{\xi}\varphi(x)=b_{\nu}\cdot\int_0^{\pi}\varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sin^{2\nu}\omega d\omega,\qquad \varphi\in\overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_{\nu}=\Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. За допомогою оператора T_x^{ξ} у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначається згортка двох функцій:

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_0^{\infty}T_x^{\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi,\qquad \{\varphi,\psi\}\subset\overset{\circ}{\Phi}.$$

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція перетворення Бесселя $F_{B_{\nu}}$:

$$F_{B_{\nu}}[\varphi](x):=\int_0^{\infty}\varphi(\sigma)j_{\nu}(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\qquad \varphi\in\overset{\circ}{\Phi},$$

де j_{ν} — нормована функція Бесселя. При цьому $F_{B_{\nu}}[\varphi]$ — парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функція, яка задовольняє умову

$$\forall\, s\in\mathbb{Z}_+\ \ \exists\, c_s>0\colon\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}|x^sD_x^sF_{B_{\nu}}[\varphi](x)|\leqslant c_s,$$

при цьому у функції $D_x^s F_{B_\nu}[\varphi](x)$, $x \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to\pm 0} D_x^s F_{B_\nu}[\varphi](x)$; функція $D_x^{2s} F_{B_\nu}[\varphi](x)$, $x \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, у точці $x = 0$ має усувний розрив [3]. У просторі $\overset{\circ}{\Psi} := F_{B_\nu}[\overset{\circ}{\Phi}]$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм [3]:

$$\|\psi\|_p := \sup_{x\in(0;\infty)} \left\{ \sum_{s=0}^{p} x^{2s} |D_x^{2s}\psi(x)| \right\}, \qquad \psi \in \overset{\circ}{\Psi}, \qquad s \in \mathbb{Z}_+.$$

Перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому $F_{B_\nu}^{-1}$ визначається формулою

$$F_{B_\nu}^{-1}[\psi](\sigma) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \qquad \psi \in \overset{\circ}{\Psi}, \qquad c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. Дія регулярної узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ на основну функцію $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ у цьому випадку визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle, \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де f_ξ позначає дію функціонала f за змінною ξ; при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f], \varphi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}^{-1}[\varphi] \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціонала f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціонала $F_{B_\nu}[f]$ над простором $\overset{\circ}{\Psi}$.

Узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$. Для перетворення Бесселя узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$ правильним є таке твердження [3]: якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ справджується формула $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$.

Основні результати. Нехай $a\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ (тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$), яка:

1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють умову

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \ \ \exists\, c_k > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon \quad |D_x^k a(x)| \leqslant c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) $\exists\, \widetilde{\delta} > 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $a(x) \geqslant \widetilde{\delta} |x|^\gamma$.

Зазначимо, що функція a є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

Розглянемо тепер рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \qquad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \tag{1}$$

де $A = F_{B_\nu}^{-1}[a F_{B_\nu}]$ — псевдобесселевий оператор, побудований за функцією a. Із властивостей перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що A — лінійний і неперервний оператор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію $u \in C^1((0, T], \overset{\circ}{\Phi})$, яка задовольняє рівняння (1). Для (1) задамо багатоточкову задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{2}$$

де $\varphi \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)' \subset (\overset{\circ}{\Phi})'$, $\mu > \mu_1 > \cdots > \mu_m > 0$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ — клас узагальнених функцій з $(\overset{\circ}{\Phi})'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову (2) в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, \cdot) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} u(t, \cdot) = \varphi$$

(границі розглядаються у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$).

При дослідженні задачі (1), (2) важливу роль відіграють функції

$$Q(t, \sigma) = \exp\{-t a(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right)^{-1}, \qquad t \in (0, T], \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\Gamma(t, t_1, \ldots, t_m, x) \equiv \Gamma(t, x) := F_{B_\nu}^{-1}[Q(t, \sigma)](x), \qquad t \in (0, T], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Правильним є таке твердження.

Лема 1. *При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t, \sigma)$ нескінченно диференційовна за $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leqslant \gamma_s \varphi_s(t) e^{-t a(\sigma)} |\sigma|^\omega, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \sigma \neq 0, \tag{3}$$

де $\gamma_s > 0$ — стала, не залежна від t, $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^s t^p$,

$$\omega = \begin{cases} s(\gamma - 1), & |\sigma| \geqslant 1, \\ \gamma - s, & |\sigma| \leqslant 1, \quad \sigma \neq 0. \end{cases}$$

Із оцінок (3) випливає, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t>0$ є елементом простору $\overset{\circ}{\Psi}$. Тоді функція $\Gamma(t,x)=F_{B_\nu}^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, як функція x, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}=F_{B_\nu}^{-1}[\overset{\circ}{\Psi}]$ (при кожному $t>0$).

Лема 2. *Для функції Γ та її похідних правильними є оцінки*

$$|D_x^m\Gamma(t;x)|\leqslant\alpha_m t^{-(\gamma_0+m-[\gamma]/\gamma)}(1+|x|)^{-(m+\gamma_0)},\qquad t\in(0;T],\qquad x\in\mathbb{R},\qquad m\in\mathbb{Z}_+,$$

стала $\alpha_m>0$ не залежить від t, $\gamma_0=\gamma+3/2+[\gamma]$.

$\Gamma(t,\cdot)$, як функція аргументу t, неперервно диференційовна на проміжку $(0,T]$. При значеннях t, близьких до нуля, $\Gamma(t,x)$, як функція x, має дельта-подібний вигляд. Ця властивість випливає з нижченаведеного твердження.

Теорема 1. *У просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджуються граничні співвідношення:*

1) $\lim\limits_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot)=\dfrac{\delta}{\mu-\mu_0}$, $\mu_0=\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$;

2) $\mu\lim\limits_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot)-\mu_1\lim\limits_{t\to t_1}\Gamma(t,\cdot)-\dots-\mu_m\lim\limits_{t\to t_m-0}\Gamma(t,\cdot)=\delta$ *(тут δ — дельта-функція Дірака).*

Наслідком з теореми 1 є таке твердження.

Лема 3. *Нехай $\omega(t,x)=(\varphi*\Gamma)(t;x)$, $\varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Тоді в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot)-\mu_1\lim_{t\to t_1}\omega(t,\cdot)-\dots-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}\omega(t,\cdot)=\varphi.$$

Теорема 2. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t\in(0;T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна за t, тобто граничне співвідношення*

$$\frac{1}{\Delta t}[\Gamma(t+\Delta t,x)-\Gamma(t,x)]\to\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t;x),\qquad \Delta t\to 0,$$

виконується в розумінні збіжності в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi*\Gamma)(t,\cdot)=\varphi*\frac{\partial\Gamma(t,\cdot)}{\partial t},\qquad \forall\,\varphi\in(\overset{\circ}{\Phi})',\qquad t\in(0,T].$$

Зазначимо також, що $\Gamma(t,x)$ задовольняє рівняння (1). Урахувавши властивості функції Γ, цю функцію називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі (1), (2). Основним результатом є таке твердження.

Теорема 3. *Задача* (1), (2) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x)=(\varphi*\Gamma)(t,x),\qquad \varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)',\qquad (t,x)\in\Omega_+,$$

де Γ — фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі (1), (2).

1. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
3. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11–15.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 02.04.2009

V. V. Gorodetsky, D. I. Spizhavka

The many-point problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators

The correct solvability of the non-local many-point problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators in the class of boundary conditions which are generalized functions of the distribution type is established.