УДК 551.436.262

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА СЛОЕМ СКАЧКА С ФЛЮКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© О.С. Голод, А.И. Гончар, 2005

Государственный Северо-Западный технический университет, г. Санкт-Петербург

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины, г. Запорожье

Теоретично досліджено звукове поле та фазова структура розсіяного звукового сигналу в плавно-неоднорідному середовищі з флуктуючою швидкістю розповсюдження звуку та густиною. Показано, що середня фаза розсіяного сигналу залежить від величини випроміненого сигналу, розмірів області розсіяння, функції кореляції неоднорідностей середовища, а також від закону зміни швидкості з глибиною, обчислено функцію кореляції і дисперсії фази.

Теоретически исследовано звуковое поле и фазовая структура рассеянного звукового сигнала в плавно-неоднородной среде с флюктуирующей скоростью распространения звука и плотностью. Показано, что средняя фаза рассеянного сигнала, зависит от величины излученного сигнала, размеров области рассеяния, функции корреляции неоднородностей среды, а также от закона изменения скорости звука с глубиной, вычислена функция корреляции и дисперсия фазы.

The sound field and phase structure of scattered sound signals in smooth - non-uniform environment with fluctuating speed of propagation of sound and density is theoretically investigated. It is demonstrated that the average phase of scattered signal depends on value of the transmitted signal, dimensions of scattering area; correlation function of medium heterogeneities as well as the law of sound speed variation in depth, the function of correlation and phase dispersion is calculated.

При зондировании океанической среды гидролокатором бокового обзора (далее - ГБО) принимается обратный сигнал, который формируется в результате рассеяния звука на неоднородностях среды. Амплитудно-фазовая структура рассеянных звуковых волн в настоящее время изучена недостаточно.

Звуковое поле монохроматической акустической волны в неоднородной жидкой среде с флюктуирующими параметрами удовлетворяет уравнению

$$\Delta P + k_0^2(1+\varepsilon)P - \nabla \ell n(\rho_0 + \delta\rho)\nabla P = f\,, \qquad (1)$$

где $\kappa_0 = \omega / c_0$ - волновое число,

ω - круговая частота

$c_0 = c_0(z)$ - усредненный вертикальный профиль скорости звука,

$\varepsilon = \kappa^2/\kappa_0^2 - 1$ - флюктуация квадрата волнового числа,

ρ_0 - средняя плотность среды,

$\delta\rho$ - флюктуация плотности среды,

f - функция источников звука.

Представим звуковое поле в виде

$$P = P_0 + P_s,$$

где P_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta P_0 + k_0^2 P_0 - \nabla \ell n \rho_0 \nabla P_0 = f\,. \qquad (2)$$

Для рассеянного флюктуирующими параметрами звукового поля $\mathbf{P_s}$ из (1) и (2) следует уравнение

$$\Delta P_s + k_0^2 P_s - \nabla \ell n \rho_0 \nabla P_s = -k_0^2 \varepsilon_0 P_0 - k_0^2 \varepsilon P_s + \nabla \ell n\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla P_s, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon - k_0^{-2} \nabla \ell n\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\frac{\nabla P_0}{P_0}$.

Имеем рассеянное звуковое поле P_s в виде

$$P_s = ae^{\Psi}. \qquad (4)$$

Неизвестные функции **a** и ψ подлежат определению.

Из подстановки выражения (4) в уравнение (3) следует

$$\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\nabla a}{a}\nabla\Psi + \Delta\Psi + \left(\nabla\Psi^2\right) + k_0^2 - \nabla \ell n \rho_0 \frac{\nabla a}{a} -$$

$$- \nabla \ell n \rho_0 \nabla\Psi = \frac{-k_0^2 \varepsilon_0 P_0}{a}\left(1 - \Psi + \frac{\Psi^2}{2!} - \frac{\Psi^3}{3!} \pm \ldots\right) -$$

$$- k_0^2 \varepsilon + \nabla \ell n\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\frac{\nabla a}{a} + \nabla \ell n\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla\Psi.$$

Функцию **a** выберем так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\Delta a + k_0^2 a - \nabla \ell n \rho_0 \nabla a = -k_0^2 \varepsilon_0 P_{0.} \qquad (5)$$

Формальное решение этого уравнения имеет следующий вид

$$a = -\widehat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_0 P_0, \qquad (6)$$

где $\widehat{G}_0 = \int G_0\left(\frac{\vec{r}}{\vec{r}'}\right)dr'$ - интегральный оператор Грина,

G_0 – функция Грина уравнения (2).

Тогда для функции Ψ имеем

$$\Delta\Psi+\left(\nabla\Psi\right)^2-\nabla\ln\rho_0\nabla\Psi+2\frac{\nabla a}{a}\nabla\Psi=\frac{k_0^2\varepsilon_0 P_0}{a}\times$$
$$\times\left[\Psi-\frac{\Psi^2}{2!}+\frac{\Psi^3}{3!}\pm....\right]-k_0^2\varepsilon_a+\nabla\ell n\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla\Psi, \tag{7}$$

где $\varepsilon_a=\varepsilon-k_0^{-2}\nabla\ell n\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla a.$

Согласно рекомендациям работы [1] имеем решение в виде

$$\Psi=\frac{U}{a}\cdot \tag{8}$$

После подстановки (8) в (7) для неизвестной функции U получим с учётом (5) следующие нелинейные уравнения

$$\Delta U+k_0^2U-\nabla\ell n\rho_0\nabla U=-k_0^2\varepsilon_a a+\nabla\ell n\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\left(\nabla U+U\ell na\right)-$$
$$-a\left(a^{-1}\nabla U-a^{-2}\nabla aU\right)^2-k_0^2\varepsilon_0P_0\left[\frac{U^2}{2!a^2}-\frac{U^3}{3!a^3}+...\right]. \tag{9}$$

Перепишем уравнение (9) в виде интегрального

$$U=-\hat{G}_0k_0^2\varepsilon_0a+\hat{G}_0\nabla\ln\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla U-G_0k_0^2\left(\varepsilon-\varepsilon_a\right)U-$$
$$-\hat{G}_0a\left(a^{-1}\nabla U-a^{-2}\nabla aU\right)^2-G_0k_0^2\varepsilon_0P_0\left[\frac{U^2}{2!a^2}-\frac{U^3}{3!a^3}+...\right]. \tag{10}$$

Решая последнее уравнение методом последовательных приближений, и, подставляя соответствующее решение в формулу (8), находим следующие два первых последовательных приближенных решения

$$\Psi_1=-a^{-1}\hat{G}_0k_0^2\varepsilon_a a\ , \tag{11}$$

$$\Psi_2 = -a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_a a - a^{-1}\hat{G}_0 \nabla \ln\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\nabla \hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_a a +$$

$$+a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2\left(\varepsilon-\varepsilon_a\right)\hat{G}_0 k_0^2\varepsilon_a a - a^{-1}\hat{G}_0 a\left(a^{-2}\nabla a \hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_a a - a^{-1}\nabla\hat{G}_0 \times\right. \qquad (12)$$

$$\left.\times k_0^2\varepsilon_a a\right)^2 - a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_0 P_0\left[\exp\left(a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2\varepsilon_0 a\right) - a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon_0 a - 1\right].$$

В дальнейшем для простоты рассмотрим случай среды с одним флюктуирующим параметром, а именно, скоростью звука.

В этом случае

$$\rho_0=\text{const}; \quad \delta\rho=0; \quad \varepsilon_a=\varepsilon_0=\varepsilon,$$

и решения (11), (12) принимают вид

$$\Psi_1 = -a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon a\,, \qquad (13)$$

$$\Psi_2 = a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon a - a^{-1}\hat{G}_0 a\left(a^{-2}\nabla a\hat{G}_0 k_0^2\varepsilon a - a^{-1}\nabla\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon a\right)^2 -$$

$$-a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon P_0\left[\exp\left(a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 \varepsilon a\right) - a^{-1}\hat{G}_0 k_0^2 a - 1\right]. \qquad (14)$$

Заметим, что решение вида (13) получено в работе [1] для полного поля в рассеивающей среде.

Для фазы рассеянного поля имеем следующее выражение

$$\varphi = \frac{\Psi-\Psi^*}{2i} + \frac{1}{2i}\ln\frac{a}{a^*}.$$

Для среднего значения фазы в первом приближении имеем

$$<\varphi_1> = \frac{<\Psi_1> - <\Psi_1^*>}{2i} + \frac{1}{2i}<\ell n\frac{a}{a^*}>.$$

Вычислим среднее значение фазы по различным реализациям флюктуирующего параметра. При вычислении среднего будем полагать, что $\varepsilon(\vec{r})$ является случайным Гауссовым полем со средним значением, равным нулю. Воспользуемся формулой

$$<\frac{F\left[\varepsilon(\vec r)\right]}{\left(\int \vartheta(\vec r)\varepsilon(\vec r)\,dr\right)^n}>=i^{-n}\int_0^\infty d\lambda_1....d\lambda_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\times\right.$$

$$\left.\times\int\int d\vec r_1 d\vec r_2 B(\vec r_1,\vec r_2)\,\vartheta(\vec r_1)\,\vartheta(\vec r_2)-\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\sum_{k=j-1}^{n}\lambda_k\int d\vec r' B(\vec r,\vec r')\,\vartheta(\vec r')\right\}\times$$

$$\times<F\left[\varepsilon(\vec r)\right]+i\sum\lambda_j\int d\vec r' B\left(\vec r,\vec r'\vartheta(\vec r')\right)>,$$

где $B(\vec r,\vec r')=<\varepsilon(r)\varepsilon(\vec r)>$ - функция корреляции случайных неоднородностей.

Последнее выражение не трудно получить, если последовательно воспользоваться представлением Фейнмана

$$a^{-1}=\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{i\lambda a}d\lambda\,,$$

и хорошо известным соотношением [2] для Гауссова поля

$$<\exp i\int d\vec r\,\varepsilon(\vec r)\,\vartheta(\vec r)\,R\left[\varepsilon(\vec r)\right]>=<\exp i\int d\vec r\,\varepsilon(\vec r)\,\vartheta(\vec r)>\times$$

$$\times<R\left[\varepsilon(\vec r)+i\int d\vec r_1\,B(\vec r,\vec r_1)\,\vartheta(\vec r_1)\right]>.$$

Найдем

$$<\Psi_1>=i\sqrt{\pi}\left[\frac{U(\vec r)}{\sqrt{2Q(\vec r)}}-\frac{W(\vec r)}{2Q(\vec r)}\right]. \qquad (15)$$

Здесь

$$U(\vec r)=\int\int d\vec r_1\,d\vec r_2\,B(\vec r_1,\vec r_2)\,f\left(\frac{\vec r}{\vec r_1}\right)\vartheta\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_2}\right), \qquad (16)$$

$$W(\vec r)=\int\int\int\int d\vec r_1\,d\vec r_2\,d\vec r_3\,d\vec r_4\,f\left(\frac{\vec r}{\vec r_1}\right)\vartheta\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_2}\right)\vartheta\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_3}\right)\vartheta\left(\frac{\vec r_2}{\vec r_4}\right)B\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_3}\right)B\left(\frac{\vec r_2}{\vec r_4}\right), \qquad (17)$$

$$Q(\vec r)=\int\int d\vec r_1\,d\vec r_2\,B(\vec r_1,\vec r_2)\,\vartheta\left(\frac{\vec r}{\vec r_1}\right)\vartheta\left(\frac{\vec r}{\vec r_2}\right), \qquad (18)$$

$$f\left(\frac{\vec r}{\vec r_1}\right)=G_0\left(\frac{\vec r}{\vec r_1}\right)M(\vec r_1)k_0^2(\vec r_1), \tag{19}$$

$$\vartheta\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_2}\right)=G_0\left(\frac{\vec r_1}{\vec r_2}\right)M(\vec r_2)k_0^2(\vec r_2)P_0(\vec r_2), \tag{20}$$

а $M(\vec r)$ - обрезающая функция, равная единице, если точка принадлежит рассеивающему объёму, и равная нулю, если она находится вне этого объёма.

Более трудоемким является вычисление <ℓn a>.

Пусть ω=ℓn a, тогда $\Delta\omega=\frac{\Delta a}{a}-\left(\frac{\nabla a}{a}\right)^2$ и из уравнения $\Delta a+k_0^2a=-k_0^2\varepsilon P_0$ получим

$$\Delta\omega=-k_0^2-\frac{k_0^2\varepsilon P_0}{a}-\left(\frac{\nabla a}{a}\right)^2. \tag{21}$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение Пуассона и его решение имеет вид

$$\omega=\int d\vec r_1\frac{k_0^2(\vec r_1)}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}+\int d\vec r_1\frac{k_0^2(\vec r_1)\varepsilon(\vec r_1)P_0(\vec r_1)}{4\pi|\vec r-\vec r_1|a(\vec r_1)}+\int dr_1\frac{[\nabla a(\vec r_1)]^2}{4\pi|\vec r-\vec r_1|a^2(\vec r_1)}.$$

Проводя усреднение изложенным выше методом и вычисляя двукратные интегралы по λ, переходим к полярным координатам и находим

$$\begin{aligned}<\omega>=&\int\frac{k_0^2(\vec r_1)}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}d\vec r_1-\int d\vec r_1\frac{k_0^2(\vec r_1)P_0(\vec r_1)}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}\frac{\beta(\vec r_1)}{Q(\vec r_1)}+\int\int\int\frac{d\vec r_1d\vec r_2d\vec r_3}{2\pi|\vec r-\vec r_1|}\times\\ &\times\frac{N(\vec r_1|\vec r_2,\vec r_3)\beta(\vec r_2)\beta(\vec r_3)}{[Q(\vec r_1)+\beta(\vec r_1)]Q(\vec r_1)}+\int\int\int\frac{d\vec r_1d\vec r_2d\vec r_3}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}\frac{N(\vec r_1|\vec r_2,\vec r_3)}{\sqrt{\beta_0^2(\vec r_1)-Q^2(\vec r_1)}}\times\\ &\times\left[\frac{1}{2}B(\vec r_2,\vec r_3)-\frac{\beta(\vec r_2)\beta(\vec r_3)}{Q(\vec r_1)+\beta(\vec r_1)}\right]\ln\frac{\beta(\vec r_1)-\sqrt{\beta^2(\vec r_1)-Q^2(\vec r_1)}}{\beta(\vec r_1)+\sqrt{\beta^2(\vec r_1)-Q^2(\vec r_1)}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\beta(\vec r)=\int B(r,\vec r_1)\vartheta(\vec r\,|\,r_1)dr, \tag{23}$$

$$N(\vec{r}_1 \mid \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \nabla G_0(r_1 \mid r_2) M(\vec{r}_2) P_0(\vec{r}_2) \nabla_1 G_0(\vec{r}_1 \mid \vec{r}_3) M(\vec{r}_3) k_0^2(\vec{r}_3) P_0(\vec{r}_3). \qquad (24)$$

Средняя фаза рассеянного поля в рассматриваемом приближении равна

$$\varphi_1 = I_m\left(< \ell n\, a > + < \Psi_1 >\right),$$

и согласно выражениям (13) – (18), (20) – (22) зависит от вертикального профиля скорости звука через функции G_0, k_0^2, от характера его изменения через функцию ∇G_0, от падающего поля P_0, сформированного антенной с определенной диаграммой направленности, от статистических свойств неоднородностей через корреляционную функцию **B** и величины рассеивающего объёма.

Литература

1. Зернов Н.Н. Рассеяния волн КВ диапазона при наклонном распространении в ионосфере // Радиофизика. – 1980. - № 2. – С. 151-158

2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980. – 336 с.