

УДК [591.471.3:532.135](018)

## К МЕТОДИКЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГО-ВЯЗКИХ СВОЙСТВ КОСТНОЙ ТКАНИ

### I. Теоретические соображения

В. И. Клыков, С. Ф. Манзий

(Институт зоологии АН УССР)

Длинные кости конечностей четвероногих как система рычагов, обеспечивающих статику и локомоцию тела, постоянно подвержены воздействию различных по силе и характеру статических и динамических нагрузок. Реакция на эти нагрузки проявляется в перестройке архитектуры, изменений формы и размеров костей, а также в изменениях физико-механических их характеристик, прежде всего упругости, вязкости и пластичности. Такие изменения лежат в основе процессов онто- и филогенетического формирования конечностей четвероногих различных морфо-функциональных типов, и поэтому исследование их представляет большой интерес для понимания путей и закономерностей становления этих типов. В последние годы необходимость таких исследований увеличивается в связи с развитием бионики. Речь идет о физическом моделировании принципов строения и функционирования конечностей в целом и их отдельных механизмов. Несомненно, принцип «выращивания» деталей механизмов и машин, обладающих при минимальной массе оптимальной выносливостью к определенному комплексу нагрузок, будет позаимствован у живой природы и позволит значительно (в два-три раза) облегчать механизмы и машины без ущерба для их прочности. Но этому должен предшествовать не только качественный, а и количественный анализ структуры и физико-механических характеристик биологических прототипов.

В работах ряда исследователей (Гильзен, 1896; Smith, Walmsley, 1957, 1958; Sedlin, 1965 и др.) установлено, что на кости конечностей при движении животного действуют почти мгновенные силы и что вещество, из которого построены кости, под действием этих сил ведет себя как упруго-вязкий материал, т. е. сопротивление костного вещества действующим на него силам зависит от скорости деформирования. Реология (наука о деформировании и текучести материалов) доказывает, что нельзя получить достоверное представление о способности упруго-вязкого материала сопротивляться быстро меняющимся во времени нагрузкам, если не учитывать наряду с упругими, также их вязкие свойства (Рейнер, 1965). Поэтому при исследовании реакции кости на динамические нагрузки нужно глубоко изучать ее упруго-вязкие свойства. Однако таких исследований проведено еще мало. Одна из причин — слабая разработка их методики. Существующие же методики определения упруго-вязких свойств технических материалов по разным причинам не могут быть непосредственно использованы при биологических и бионических исследованиях.

В исследованиях лаборатории бионики отдела эволюционной морфологии Института зоологии АН УССР изучению упруго-вязких свойств костей отводится большое место, и поэтому мы задались целью разработать простую методику исследования данных свойств костной ткани

и показать пути анализа реакции костного вещества на воздействие сил, характер изменения которых во времени сложный, а сами эти силы в первом приближении могут быть сравнимы с силами, действующими при функционировании конечностей.

### Постановка задачи

Некоторые исследователи (Sedlin, 1965; Ascenzi and Bonucci, 1967, 1968) показали, что реакцию  $\varepsilon(t)$  костного вещества в пределах упругих деформаций на силы  $\sigma(t)$ , действующие на него, можно изучать с по-

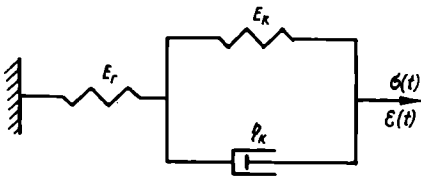


Рис. 1. Линейная упруго-вязкая модель костной ткани (объяснение в тексте).

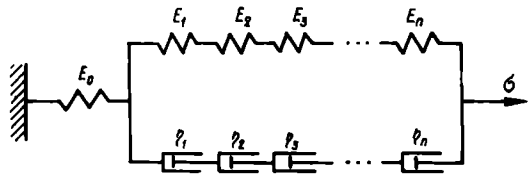


Рис. 2. Многоэлементная линейная упруго-вязкая модель:

$E_0, E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  — коэффициенты упругости;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  — коэффициенты вязкости;  $\sigma$  — действующая сила.

мощью линейной упруго-вязкой модели, состоящей из тела Кельвина с параметрами  $E_k$  и  $\eta_k$  и соединенного с ним последовательно элементом Гука с упругой константой  $E_r$  (рис. 1). Ставится задача: определить упругие и вязкие параметры этой модели и произвести анализ реакции ее на воздействие динамических сил.

### Решение

#### Комплексный модуль

Пусть к линейной модели, описывающей упруго-вязкое поведение материала (рис. 2), приложена синусоидально изменяющаяся сила  $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$  с угловой частотой  $\omega$ . По истечении времени, достаточного для того, чтобы можно было пренебречь начальными условиями, деформация, или реакция модели, будет меняться по тому же закону

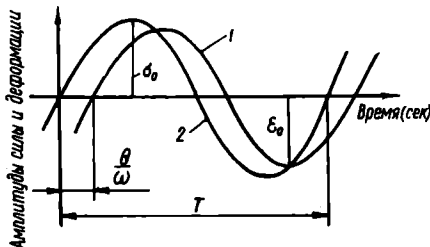


Рис. 3. Графическое изображение реакции линейной упруго-вязкой модели на действие периодической силы: 1 — реакция модели  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \theta)$ ; 2 — сила с периодом  $T$  и частотой  $\omega$ ;  $\theta$  — фазовый сдвиг между силой и реакцией модели на нее;  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$  — соответственно наибольшие амплитуды силы и реакции модели при  $\omega = \text{const}$ .

с угловой частотой  $\omega$  и запаздывать по фазе на угол  $\theta$  (рис. 3) (Карман и Био, 1948; Альфрей, 1952). В таком случае сила и деформация окажутся связанными общим комплексным числом, или т. н. комплексным модулем  $Y(i\omega)$  \* (Бленд, 1965). Для модели (рис. 2)

\* Символ  $(i\omega)$  указывает на то, что данная функция комплексная и зависит от параметра  $\omega$ .

это число запишется как

$$Y(i\omega) = \frac{\bar{\sigma}(i\omega)}{\bar{\varepsilon}(i\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k}}. \quad (1)$$

Абсолютная величина его выражается соотношением

$$|Y(i\omega)| = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad (2)$$

а фазовый сдвиг между силой и деформацией — углом

$$\Theta = \text{arctg} \frac{N}{M}, \quad (3)$$

где  $M$  — действительная и  $N$  — мнимая части комплексного модуля (1); они являются функциями упругих  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$  и вязких  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  параметров модели на рис. 2, а также частоты  $\omega$ .

Из уравнения (1) и рис. 2 видно, что элементы  $E_0$  и  $E_k$  комплексного модуля  $Y(i\omega)$  определяют упругость материала, в то время как элементы  $\eta_k$  определяют его вязкость. Следовательно, при  $\omega = \text{const}$ , более упругий материал имеет большие величины  $E_0$  и  $E_k$  и меньшие величины  $\eta_k$  и наоборот. Угол  $\Theta$ , определяемый формулой (3), отражает величину энергии рассеяния. В технике он называется механическим углом потерь, а само явление диссипативного рассеяния энергии материалом принято называть внутренним амортизатором (Писаренко, 1955; Тимошенко, 1967). Записав формулу (1) в виде

$$\bar{\varepsilon}(i\omega) = \frac{\bar{\sigma}(i\omega)}{Y(i\omega)}, \quad (4)$$

легко увидеть, что простое деление амплитуды заданной силы  $\bar{\sigma}(i\omega)$  на абсолютную величину модуля  $Y(i\omega)$  дает амплитуду реакции материала  $\bar{\varepsilon}(i\omega)$ .

Из изложенного выше вытекает важный факт: если для данной модели комплексный модуль  $Y(i\omega)$  известен, то реакция материала на синусоидальные напряжения данной частоты вполне определима. Ее амплитуда и фазовый угол вычисляются по формулам (3) и (4).

### Преобразование Фурье

Ниже будет показано, что для получения аналитического выражения комплексного модуля  $Y(i\omega)$  понадобится формула преобразования функции времени  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  в частотные функции  $\bar{\varepsilon}(i\omega)$  и  $\bar{\sigma}(i\omega)$ .

Известно, что любая функция времени  $f(t)$ , подчиняющаяся определенным условиям, может быть преобразована в функцию  $\varphi(i\omega)$  от некоторого параметра  $\omega$ , причем между обеими функциями существует следующая связь:

$$\varphi(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (5)$$

Частотная функция  $\varphi(i\omega)$  называется преобразованием Фурье функции времени  $f(t)$ . Так как в дальнейшем изложении мы будем оперировать функцией времени, не принимающей отрицательных значений, то нами

используется выражение (5) в виде

$$\varphi(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt. \quad (6)$$

Пользуясь соотношением (6), преобразуем производную функцию времени  $\varphi'(t)$  в частотную  $\varphi'(i\omega)$

$$\varphi'(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (7)$$

Интегрируя по частям выражение (7), имеем

$$\varphi'(i\omega) = [f(t) \cdot e^{-i\omega t}]_0^{\infty} + \frac{i\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (8)$$

Чтобы соотношение (8) имело смысл, необходимо соблюсти условие

$$[f(t) \cdot e^{-i\omega t}] \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Тогда, учитывая соотношение (6), получаем

$$\varphi(i\omega) = \frac{1}{i\omega} [\varphi'(i\omega) + f(0)], \quad (9)$$

где  $f(0)$  — значение функции  $f(t)$  при  $t=0$ .

Уравнения (6) и (9) являются теми искомыми, которые необходимы для отыскания функций  $\bar{\sigma}(i\omega)$  и  $\bar{\varepsilon}(i\omega)$ . В несколько измененном виде они известны в литературе (Альфрей, 1952).

#### Определение комплексного модуля, упругих и вязких параметров механической модели

Поскольку комплексный модуль позволяет определять реакцию упруго-вязкого материала на переменные силы, а также анализировать упругие и вязкие характеристики материала, необходимо уметь его вычислять.

Существует два основных метода получения комплексного модуля материала для данного типа нагрузки: один основан на серии динамических тестов, а другой — на использовании простых статических опытов (Simha, 1943; Альфрей, 1952). С помощью динамических тестов изучают реакцию материала на ряд простых синусоидальных напряжений при варьировании частоты  $\omega$  от очень низких до очень высоких величин и комплексный модуль получают как дискретную пару величин числа и фазы. Этот метод позволяет графически изобразить два компонента комплексного модуля, но не дает аналитического выражения его. Пользуясь вторым методом, заранее известное  $\sigma(t)$  (его преобразование  $\bar{\sigma}(i\omega)$  по формуле (6) имеется) прикладывается к испытываемому материалу и регистрируется его реакция  $\varepsilon(t)$ . Если есть возможность преобразовать  $\varepsilon(i\omega)$  полученного ответа  $\varepsilon(t)$ , тогда отношение  $\frac{\bar{\sigma}(i\omega)}{\varepsilon(i\omega)}$  прямо дает комплексный модуль в аналитической форме в функции частоты  $\omega$ . Таким образом, очень простой опыт может дать полную информацию о комплексном модуле. Единственная проблема, возникающая при вычислении комплексного модуля таким путем, заключается в получении пре-

образования Фурье по формуле (6) зарегистрированного ответа  $\epsilon(t)$ . Она может быть решена с помощью вычислительных машин. Если же по каким-либо причинам невозможно пользоваться вычислительной машиной, то используют известные графо-аналитические методы аппроксимации кривых (Анго, 1967). Большинство из них основывается на аппроксимации ответа  $\epsilon(t)$  с помощью ряда простых функций, преобра-

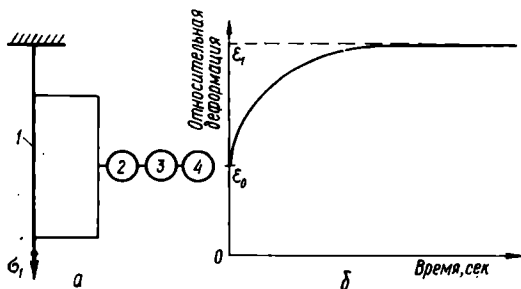


Рис. 4. Статическое испытание костной ткани на растяжение:

*a* — схема опыта; *b* — графическое изображение результата; 1 — испытываемый образец; 2 — микроэксстензометр; 3 — усилитель сигнала; 4 — регистрирующее устройство;  $\sigma_1$  — растягивающая сила;  $\epsilon_0$  — мгновенная реакция костной ткани на силу  $\sigma_1$ ;  $\epsilon_1$  — полная реакция (деформация) костной ткани.

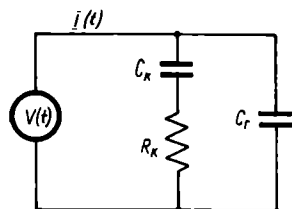


Рис. 5. Электрический аналог механической модели, изображенной на рис. 1 (объяснение в тексте).

зования  $\bar{\epsilon}(i \omega)$  которых существуют, по формуле (6). В таком случае общее преобразование отыскивается как сумма преобразований от простых функций.

Предположим, испытание материала проведено согласно схеме (рис. 4 *a*) и получена реакция его на напряжение  $\sigma_1$  в виде графика (рис. 4 *b*). После графического дифференцирования функции  $\epsilon(t)$  аппроксимируем кривую  $\epsilon'(t)$  рядом экспоненциальных кривых. Операция аппроксимирования выполняется таким образом: 1) вычерчиваем кривую скорости деформации в полулогарифмической системе координат  $t - \ln \epsilon'$  (скорость деформации откладываем на вертикальной логарифмической шкале) и нижний участок кривой аппроксимируем прямой линией; 2) разность в ординатах между кривой и прямой линиями подсчитываем как функцию времени и результат вычерчиваем в упомянутой выше системе координат; 3) нижний участок вновь полученной кривой скорости деформации аппроксимируем прямой линией и вторично подсчитываем разность в ординатах между кривой и прямой линиями как функцию времени и результат вычерчиваем в виде графика (см. п. 1); 4) переходы операции аппроксимирования повторяем до тех пор, пока остаток разности между кривой и прямой линиями можно полностью представить прямой линией; 5) каждую из прямых линий (экспонент) определяем формулой типа  $A_i e^{-k_i t}$ . Сложив уравнения всех прямых, получаем аналитическое выражение для скорости деформации в форме

$$\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-k_i t}. \quad (10)$$

Значения  $A_i$  находим по пересечению прямых с осью ординат, а величины  $k_i$  — по наклонам прямых.

Для получения преобразования Фурье функции  $\epsilon'(t)$  используем формулу (6)

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}'(i\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (A_1 e^{-k_1 t} + A_2 e^{-k_2 t} + \dots + A_n e^{-k_n t}) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_1 e^{-(k_1+i\omega)t} + A_2 e^{-(k_2+i\omega)t} + \dots + A_n e^{-(k_n+i\omega)t}] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{A_1}{k_1+i\omega} + \frac{A_2}{k_2+i\omega} + \dots + \frac{A_n}{k_n+i\omega} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

а по формуле (9) получаем преобразование  $\bar{\sigma}(i\omega)$  деформации  $\varepsilon(t)$ .

$$\bar{\varepsilon}(i\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{A_1}{k_1+i\omega} + \frac{A_2}{k_2+i\omega} + \dots + \frac{A_n}{k_n+i\omega} \right) + \varepsilon_0 \right]. \quad (12)$$

Если  $\sigma(t) = \sigma_1$  для  $t \geq 0$  и

$$\sigma(t) = 0 \text{ для } t < 0, \text{ тогда } \bar{\sigma}(i\omega) = \frac{\sigma_1}{i\omega}. \quad (13)$$

Используя основное уравнение (1), получаем

$$Y(i\omega) = \frac{\sigma_1}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{A_1}{k_1+i\omega} + \frac{A_2}{k_2+i\omega} + \dots + \frac{A_n}{k_n+i\omega} \right) + \varepsilon_0}. \quad (14)$$

Определение упруго-вязких констант материала легко выполнить, если уравнение (14) записать в виде

$$Y(i\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{2\pi k_1 \sigma_1}{A_1} + i\omega \frac{2\pi \sigma_1}{A_1}} + \frac{1}{\frac{2\pi k_2 \sigma_1}{A_2} + i\omega \frac{2\pi \sigma_1}{A_2}} + \dots + \frac{1}{\frac{2\pi k_n \sigma_1}{A_n} + i\omega \frac{2\pi \sigma_1}{A_n}} + \frac{1}{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}}}, \quad (15)$$

а уравнение для комплексного модуля модели на рис. 2 — в форме

$$Y(i\omega) = \frac{1}{\frac{1}{E_1 + i\omega \eta_1} + \frac{1}{E_2 + i\omega \eta_2} + \dots + \frac{1}{E_n + i\omega \eta_n} + \frac{1}{E_0}} \quad (16)$$

и сравнить их. Нетрудно видеть, что соответствующие действительные и мнимые части равны. Так,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2\pi k_1 \sigma_1}{A_1} & E_2 &= \frac{2\pi k_2 \sigma_1}{A_2} & \dots & E_n &= \frac{2\pi k_n \sigma_1}{A_n}, & E_0 &= \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \\ \eta_1 &= \frac{2\pi \sigma_1}{A_1} & \eta_2 &= \frac{2\pi \sigma_1}{A_2} & \dots & \eta_n &= \frac{2\pi \sigma_1}{A_n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, с помощью методов математики и простых опытов, сущность которых изложена выше, можно вычислить комплексный модуль (1), а также вязкие и упругие параметры модели, описывающей упруго-вязкие свойства материала (17).

#### Пути анализа реакции материала на динамические силы

Анализ реакции модели, описывающей упруго-вязкие свойства данного материала, на динамические силы можно выполнить, воспользовавшись аналитическим выражением (4). Но такой путь применим, когда

элементов, из которых состоит модель, мало (три и меньше). Анализ реакции многоэлементных моделей удобнее выполнить на электронной аналоговой машине или, если по каким-либо причинам такой машиной воспользоваться нельзя, на электронном приборе, построенном специально для этих целей. Располагая данными о структуре, упругих и вязких параметрах механической модели, такой прибор нетрудно построить,

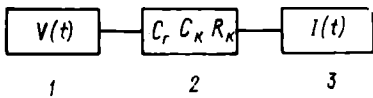


Рис. 6. Блок-схема прибора для исследования костной ткани в пределах упругих деформаций на динамические силы:

1 — входная функция; 2 — оператор; 3 — выходная функция.

если уметь составлять схему электрического аналога механической модели. Основные принципы составления таких схем изложены ниже.

Известно, что каждому простому типу механической деформации соответствует простая электрическая цепь, обладающая теми же свойствами (Карман и Био, 1948).

#### Электрические аналоги

Механическая система		Электрическая система	
Напряжение	$\sigma(t)$	Напряжение	$V(t)$
Деформация	$\epsilon(t)$	Заряд	$q(t)$
Скорость деформации	$\epsilon'(t)$	Сила тока	$I(t)$
Податливость	$l = \frac{1}{E}$	Емкость	$C$
Вязкость	$\eta$	Сопротивление	$R$
Напряжения складываются при параллельном соединении		Напряжения складываются при последовательном соединении	
Скорости деформации складываются при последовательном соединении		Токи складываются при параллельном соединении	

Используя эти соответствия, механическую модель, описывающую упруго-вязкие свойства костной ткани (рис. 1), можно представить в виде электрического аналога (рис. 5). Такая модель может быть реализована в приборе, блок-схема которого представлена на рис. 6. Прибор позволит произвести исследование реакции костной ткани на динамические силы в условиях, которые в лаборатории создать трудно или почти невозможно.

#### Заключение

Описанный нами метод исследования упруго-вязких свойств трубчатых костей прост, доступен, не требует дорогостоящих приборов и дает достоверные результаты. Кроме того, он универсален: при определенных условиях позволяет исследовать не только костную ткань, но и хрящи, связки и другие биологические ткани.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Альфрей Т. 1952. Механические свойства высокополимеров. М.  
 Анго Д. 1967. Математика для электро- и радиоинженеров. М.  
 Бленд Д. 1965. Теория линейной вязко-упругости. М.

- Гильзен К. К. 1896. Удельный вес, упругость и крепость костной ткани. Изв. СПб. биол. лабор., т. 1, в. 2. СПб.
- Карман Т. и Био М. 1948. Математические методы в инженерном деле. М.
- Писаренко Г. С. 1955. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. К.
- Рейнер М. 1965. Реология. М.
- Тимошенко С. П. 1967. Колебания в инженерном деле. М.
- Ascensi A. and Bonucci E. 1967. The tensile properties of single osteons. Anat. Rec., v. 158, № 4.
- Их же. 1968. The compressive properties of single osteons. Там же, v. 161, № 3.
- Sedlin E. D. 1965. A rheologic model for cortical bone. Acta Orth. Scand. Supplementum 83.
- Simha R. 1943. Anomalies of elasticity and flow and their interpretation. J. Phys. chem., v. 47, № 2.
- Smith J. W., Walmsley R. 1957. Elastic after-effect, plasticity and fatigue in bone. J. Anat. (L.), v. 91, № 2.
- Их же. 1959. Factors effecting the elasticity of bone. Там же, v. 93, № 4.

Поступила 7.VI 1971 г.

## ON METHODS FOR STUDYING ELASTIC-VISCOUS PROPERTIES OF BONY TISSUE

### I. Theoretical Considerations

V. I. Klykov, S. F. Manzy

(Institute of Zoology, Academy of Sciences, Ukrainian SSR)

#### Summary

Elastic and viscous properties of bony tissue are theoretically investigated and some ways are outlined for analysis of its response to dynamic forces within the limits of elastic deformation. A rheological model was used suggested by Sedlin (1965). In particular it is shown that by methods of the linear theory of visco-elasticity as well as by semigraphical methods of applied mathematics it is not difficult to determine elastic and viscous parameters of bony tissue and to analyse its responses to dynamic forces within the limits of elastic deformations.