УДК 519.85

Л.М. КОЛЄЧКІНА, О.А. ДВІРНА, С.В. ХОВБЕНЬ

ДВОЕТАПНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ПЕРЕСТАНОВОК

Анотація. Розглянуто клас задач векторної евклідової комбінаторної оптимізації як задач дискретної оптимізації на множині комбінаторних конфігурацій, відображеній в евклідів простір. Наведено властивості графів комбінаторних конфігурацій, які використовуються для викладу нового методу. Запропоновано двоетапний метод розв'язування задач векторної евклідової комбінаторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях перестановок. Представлено результати чисельного експерименту та їхній аналіз.

Ключові слова: векторна задача, багатокритерійна оптимізація, комбінаторна конфігурація, евклідові комбінаторні множини, векторний критерій, евклідові моделі.

ВСТУП

У реальних задачах вибору найкращого розв'язку, що постають на практиці, зазвичай є кілька критеріїв оптимальності. Можна навести багато прикладів тих випадків, коли потрібно знайти розв'язок, для якого б досягалися найкращі значення відразу за кількома критеріями. Задачу вибору деякого розв'язку з множини допустимих розв'язків з урахуванням кількох критеріїв оптимальності називають векторною задачею оптимізації або багатокритерійною оптимізаційною. Векторні задачі оптимізації дуже поширені в технічному проєктуванні. Це, наприклад, задача проєктування комп'ютера з максимальною швидкодією, максимальним об'ємом оперативної пам'яті та мінімальною вагою або задача проєктування електричного двигуна з максимальною потужністю, максимальним коефіцієнтом корисної дії, мінімальною вагою та мінімальними витратами електротехнічної сталі, а також низка інших практичних задач [1, 2]. На сьогодні особливо потужними стимулами до виконання досліджень в галузі багатокритерійної оптимізації є практичні потреби та розвиток комп'ютерних інформаційних технологій. Відповідні задачі розглянуто в роботах [2–10], де описано різні методи та підходи до їхнього розв'язання.

У тому разі, коли розв'язок задачі потрібно знайти на дискретній множині, вона ускладнюється. Такі задачі належать класу векторних дискретних задач. У роботах І.В. Сергієнка, В.О. Ємелічева, В.О. Перепелиці, Н.В. Семенової [7, 8, 11, 12] проведено систематичне та всебічне вивчення векторних дискретних задач, зокрема розглянуто проблеми знаходження множин оптимальних у певному розумінні розв'язків, одержано оцінки обчислювальної складності знаходження цих множин, досліджено розв'язуваність зазначеної проблеми у класі алгоритмів лінійної згортки часткових критеріїв, який є найпоширенішим методом пошуку елементів множини Парето для векторних задач, надано обґрунтування поліноміально розв'язуваних класів дискретних задач.

Задача векторної оптимізації набуває характеру математичної оптимізаційної задачі, коли визначається принцип оптимальності, який має концептуальний характер.

У багатоцільових задачах подібно до інших задачах прийняття рішень принципи оптимальності можна сформулювати у вигляді деяких упорядкувань на множині альтернатив, функцій корисності, або якихось функціоналів від цільових функцій, що підлягають максимізації. У цьому випадку всі три види принципів є еквівалентними і вибір одного з них пов'язаний з вибором математичної техніки для аналізу задач. Досить цікавим і перспективним напрямом задач векторної оптимізації є їхнє дослідження з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків [12, 13]. Це — задачі векторної оптимізації на комбінаторних множинах. У багатьох випадках їх можна розуміти як задачу векторної оптимізації на деякій комбінаторній структурі [14–18].

Дослідження задач комбінаторної оптимізації охоплюють досить широкий спектр математичних моделей, пов'язаних з потребою в розв'язанні різних важливих практичних проблем оптимального планування, управління і проєктування [19–21]. Багато моделей прикладних задач є задачами комбінаторної оптимізації, властивості яких широко висвітлені в роботах як зарубіжних, так і вітчизняних авторів [22–26]. Під задачами комбінаторної оптимізації розуміють оптимізацію деякої заданої функції на комбінаторній множині. У випадку декількох цільових функцій маємо векторну задачу комбінаторної оптимізації. Різні класи цих задач досить детально досліджено в [14–26]. Прикладами комбінаторних множин є множини перестановок, розміщень, сполучень тощо.

Під час відображення в арифметичний евклідів простір комбінаторні множини набувають особливих властивостей [19, 20]. Евклідові комбінаторні множини є вершинно-розташованими множинами простору і в більшості випадків збігаються з вершинами своєї опуклої оболонки [20, 21]. Методи оптимізації лінійних, квадратичних і опуклих функцій для різних класів вершинно-розташованих множин розглянуто в роботах [19, 20, 27, 28], а у векторній постановці — у [29, 30]. Комбінаторні множини тісно пов'язані з поняттям комбінаторної конфігурації. Дослідження комбінаторних конфігурацій та їхніх властивостей описано в роботах [20, 27, 28, 30–34].

У цій статті сформульовано постановку задачі векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації перестановок і запропоновано двоетапний підхід до її розв'язання. Суть цього методу є такою: на першому етапі векторну (багатокритерійну) задачу зводять до однокритерійної за допомогою методів векторної оптимізації, на другому — безпосередньо розв'язують заміщену однокритерійну задачу комбінаторної оптимізації з використанням горизонтального методу. Слід зазначити, що горизонтальний метод та його застосування для розв'язання задач комбінаторної оптимізації з однією цільовою функцією описано в роботі [28], а основи цього методу закладено у [27].

Новий метод розв'язання задачі векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації перестановок надає змогу знайти оптимальний розв'язок розглядуваної задачі з урахуванням додаткових обмежень за скінченну кількість кроків. Із застосуванням цього методу виконано чисельні експерименти, що характеризують його скінченність і результативність, а також наведено аналіз їхніх результатів.

Стаття складається з вступу, чотирьох розділів та висновків. У розд. 1 і 2 сформульовано постановку задачі та описано властивості структурного графу задачі. Розд. 3 присвячено детальному опису запропонованого методу розв'язування задачі векторної оптимізації на конфігурації перестановок, а розд. 4 — опису числового експерименту та його аналізу.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай задано множини $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, де A, B — скінченні множини, а $\chi : B \to A$ відображення, що ставить у відповідність кожному елементу $b \in B$ єдиний елемент $a \in A$, тобто $a = \chi(b)$. Визначимо конфігурацію згідно з [20, 35] як відображення $\chi : B \to A$, що задовольняє деякий комплекс обмежень Λ. Для більшості випадків можна уніфікувати множину B, тобто елементи множини можна замінити їхніми порядковими номерами. Встановивши бієктивне відображення між B та J_m, $J_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, одержимо перетворення відображення $\chi : B \to A$ у

$$\phi : J_m \to A. \tag{1}$$

Комбінаторну конфігурацію можна подати кортежем [20, 35]

$$\langle \phi, A, \Lambda \rangle, \tag{2}$$

де ϕ — відображення вигляду (1), яке задовольняє комплекс обмежень Λ, A — результівна множина, елементи якої є строго впорядкованими.

Розглянемо як результівну множину під час формування конфігурації (2) множину [20]

$$A^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \tag{3}$$

що є сукупністю векторів однакової розмірності простору R^k, а як Λ розглянемо множину відповідних обмежень, що визначають необхідну конфігурацію.

Кожній конфігурації $\pi = [\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_m}]$ поставимо у взаємно-однозначну відповідність вектор

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N, \; N = k \cdot m, \tag{4}$$

компоненти якого є впорядкованим набором елементів мультимножини

$$\widetilde{A}(x) = \{a_{1j_1}, a_{1j_2}, \ldots, a_{1j_m}, a_{2j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{2j_m}, a_{kj_1}, a_{kj_2}, \ldots, a_{kj_m}\}, \tag{5}$$

задавши таким чином бієктивне відображення ψ таке, що

$$x = \psi(\pi), \; \pi = \psi^{-1}(x). \tag{6}$$

Евклідовою комбінаторною конфігурацією (e-конфігурацією) називають відображення

$$\psi : (\phi, A^*, \Theta) \to R^N, \tag{7}$$

де $\phi : J_m \to A^*$, A^* — результівна множина вигляду (3), Θ — система обмежень на відображення ϕ, ψ [20, 21].

Означена евклідова комбінаторна конфігурація є образом комбінаторної конфігурації (2) в арифметичному евклідовому просторі R^N для заданих відображень ϕ, ψ та визначає вектор x вигляду (4). Множину $\widetilde{A}(x)$ називають індукувальною мультимножиною евклідової комбінаторної конфігурації. Нехай

$$E = \{x \in R^N : x \text{ — евклідова комбінаторна конфігурація вигляду (7)}\}. \tag{8}$$

Множину $E = E_{mk}$ назвемо множиною евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок, якщо індукувальні множини усіх його елементів збігаються, тобто $\forall x, y \in E \; \widetilde{A}(x) = \widetilde{A}(y)$.

Нехай $X = E_{mk} \subseteq R^m$, а $D \subseteq X$ — множина допустимих значень e-конфігурацій, яку виділяють із X за допомогою системи додаткових обмежень.

Нехай задано функції $f_i : X \to R^1$, $i \in J_n$, які є складовими критерію оптимальності $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Маємо задачу знаходження оптимального розв'язку:

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \to \text{extr}, \tag{9}$$

$$x \in D \subseteq X. \tag{10}$$

Задача (9), (10) є задачею векторної евклідової комбінаторної оптимізації.

Нехай усі складові векторного критерію є лінійними функціями, тобто

$$f_i(x) = \langle c_{ij} x_j \rangle, \; i \in J_n, \; j \in J_m, \tag{11}$$

а D виділяють з X за допомогою лінійних обмежень.

Тоді задача (9), (10) набуває такого вигляду: за умови (10) знайти множину X^* оптимальних значень функцій

$$\begin{gathered} f_i(x) = \langle c_{ij} x_j \rangle \to \text{extr}, \; i \in J_n, \; j \in J_m, \\ X^* \in E_{mk}(\widetilde{A}), \end{gathered} \tag{12}$$

де D формують за допомогою обмежень вигляду

$$\langle a_{ij} x_j \rangle \le b_i, \; i \in J_k, \; j \in J_m. \tag{13}$$

Задача (12), (13) буде векторною задачею лінійної евклідової комбінаторної оптимізації з додатковими лінійними обмеженнями [12, 16].

Слід зазначити, що проблема відшукання всіх ефективних розв'язків (оцінок) задачі (12), (13) становить не лише теоретичний, а й великий практичний інтерес. Це пояснюється тим, що побудова всієї множини ефективних розв'язків або деякої досить широкої її підмножини є одним із перших етапів цілої низки процедур оптимального вибору за наявності багатьох критеріїв [4, 12–14]. У випадку векторної комбінаторної задачі її розв'язання значно ускладнюється. Проте якщо розглянути задачу (12), (13) багатокритерійної евклідової комбінаторної оптимізації, ці складнощі можна подолати за рахунок використання специфіки задачі, зокрема, врахування властивостей конкретних евклідових комбінаторних конфігурацій та цільових функцій, що розглядаються на цих конфігураціях.

Переважна більшість методів побудови множини ефективних розв'язків векторних задач ґрунтується на тих чи інших умовах оптимальності. Найчастіше використовують такі необхідні умови: якщо точка є ефективною, то вона є розв'язком задачі максимізації або мінімізації (можливо, за деяких додаткових обмежень) числової функції спеціального вигляду для належним чином призначених величин параметрів, що входять у цю функцію, та (або) обмеження. Отже, задача знаходження всіх ефективних розв'язків зводиться до відповідної скалярної параметричної задачі оптимізації. Таку заміну задачі з векторним критерієм параметричною сім'єю звичайних екстремальних задач часто називають скаляризацією початкової задачі. Якщо використовувані умови оптимальності є достатніми, то множина розв'язків параметричної задачі є шуканою множиною ефективних розв'язків вихідної задачі. В іншому випадку побудована шляхом скаляризації множина може містити зайві точки, які слід виявити та вилучити.

Здебільшого суть методів векторної оптимізації полягає у зведенні поставленої задачі до однокритерійної шляхом застосування різних прийомів. Одним із поширених методів розв'язання задач векторної оптимізації є метод зведення багатокритерійної задачі до однокритерійної за допомогою згортання векторного критерію в суперкритерій [10, 12]. При цьому кожний критерій множать на відповідний йому ваговий коефіцієнт, а потім результати додають.

Загалом будь-які методи багатокритерійної оптимізації є чисельною реалізацією певного правила вибору ефективної (Парето-оптимальної), слабо ефективної (оптимальної за Слейтером), строго ефективної (оптимальної за Смейлом) альтернатив. Зазвичай під час розв'язання задачі намагаються знайти розв'язки, оптимальні за Парето. Оптимальність за Парето означає, що значення будь-якого із часткових критеріїв можна збільшити лише за рахунок зменшення значення хоча б одного з інших часткових критеріїв. Для слабо ефективної оцінки (розв'язку) не знайдеться така оцінка (розв'язок), яка була б більшою одночасно за всіма частковими критеріями.

Відшукання всіх ефективних розв'язків становить великий практичний інтерес. Концепція теорії прийняття рішення в задачах багатокритерійної оптимізації як первинного елементу розглядає розв'язок, як вибір однієї з низки альтернатив.

Відповідно до відомого принципу Еджворта–Парето, будь-який обраний варіант альтернативи має бути Парето-оптимальним [5, 12]. На жаль, у переважній кількості багатокритерійних задач множина Парето виявляється досить широкою і конкретний вибір в її межах не є очевидним. Через це виникає проблема звуження множини Парето, пов'язана з вибором того чи іншого конкретного Парето-оптимального варіанта як «найкращого». Позитивне розв'язання цієї проблеми становить великий інтерес на практиці, оскільки в конкретних прикладних задачах зазвичай потрібно обмежитись одним обраним варіантом або порівняно малою їхньою кількістю.

Під час розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях важливо враховувати специфіку комбінаторної множини. Це надає змогу звузити область пошуку ефективних розв'язків. Перспективним є використання зв'язку комбінаторних конфігурацій з теорією графів. У роботах [27, 28, 31, 35] досліджено графи комбінаторних багатогранників, у [28] описано подання комбінаторних множин у вигляді грід-графів та структурних графів. Для подальшого викладу матеріалу розглянемо властивості структурного графу задачі.

2. ВЛАСТИВОСТІ СТРУКТУРНОГО ГРАФУ ЗАДАЧІ

Як було зазначено, сформульовану вище задачу (12), (13) далі розглядають на комбінаторних конфігураціях перестановок. Дослідимо представлення множини евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок у вигляді структурного графу. Розглянемо підмножини X' множини комбінаторних конфігурацій X, елементи якої мають вигляд $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Підмножину X' формують за певною ознакою, наприклад, за h закріпленими координатами. Нехай задано лінійну функцію, коефіцієнти якої впорядковані за зростанням, тобто

$$f(x) = \langle c_i x_i \rangle,\ i \in J_m,\ c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_m. \tag{14}$$

Опишемо поняття структурного графу. Нехай $G^{X'}(\widetilde{V}, \widetilde{U})$ — граф підмножини X' комбінаторних конфігурацій X, причому множину X' структуровано у такий спосіб, що $X' = X'_1 \cup X'_2 \cup \ldots \cup X'_\lambda$. При цьому кожна підмножина X'_i, $i \in J_\lambda$, відповідає вершинам із h закріпленими координатами та представлена двома вершинами x_i^0 та x_i^{st} такими, що для функції $f(x)$ вигляду (14) справджуються умови:

$$\begin{aligned} f(x_i^0) &= \max_{x \in X'_i} f(x), \\ f(x_i^{st}) &= \min_{x \in X'_i} f(x), \end{aligned} \tag{15}$$

а ребрами графу $G^{X'}(\widetilde{V}, \widetilde{U})$ є такі, що з'єднують відповідні вершини x_i^0, x_i^{st} та вершини, утворені послідовними транспозиціями закріплених координат. Тоді такий граф називатимемо структурним графом множини евклідових комбінаторних конфігурацій і позначатимемо $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, h)$.

Визначальними для побудови структурного графу є його вершини, властивості яких описують умовою (15). Ці вершини $x_i^0, x_i^{st} \in X'_i$, $i \in J_\lambda$, структурного графу $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, h)$, для яких виконуються умови (15), називають відповідно вершинами витоку та стоку $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, h)$, а величина λ є рівнем структурного графу.

Твердження 1. Кількість рівнів структурного графу $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 1)$ дорівнює кількості різних елементів твірної множини A для комбінаторних конфігурацій, тобто потужності її основи $S(A)$.

Для перестановок без повторень ця величина дорівнює потужності A. За наявності повторень вона буде дорівнювати кількості різних елементів. Ця величина є важливою під час оцінювання ефективності горизонтального методу, який буде застосовано надалі як додатковий. В основу цього методу покладено використання структурного графу множини e-конфігурацій перестановок та його властивостей. Розглянемо приклади побудови таких графів.

Приклад 1. Нехай маємо X — множину евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок із множини $A = \{1, 2, 2, 3, 4\}$. Покладемо $h = 1$, тобто закріпимо лише одну координату. Оскільки множина A має чотири різні елементи, одержимо чотири підмножини таких, що $x_4^1 = 4$, $x_4^2 = 3$, $x_4^3 = 2$, $x_4^4 = 1$. Маємо відповідно чотири пари вершин x_i^0 та x_i^{st}: $x_1^0 = (3, 2, 2, 1, 4)$, $x_1^{st} = (1, 2, 2, 3, 4)$, $x_2^0 = (4, 2, 2, 1, 3)$, $x_2^{st} = (1, 2, 2, 4, 3)$, $x_3^0 = (4, 3, 2, 1, 2)$, $x_3^{st} = (1, 2, 3, 4, 2)$, $x_4^0 = (4, 3, 2, 2, 1)$, $x_4^{st} = (2, 2, 3, 4, 1)$. Позначимо вершини на графі $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 1)$, поданому на рис. 1.

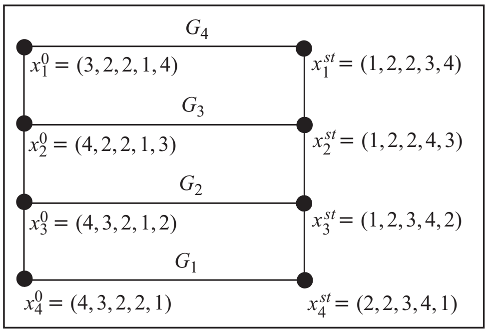

Рис. 1. Структурний граф $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 1)$

На рис. 1 позначено рівні структурного графу G_4, G_3, G_2, G_1, номери яких відповідають закріпленим координатам.

Приклад 2. Нехай маємо X — множину евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок з повтореннями із множини $A = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6\}$. Покладемо $h = 2$, тобто закріпимо дві останні координати. Враховуючи унікальні елементи множини A, одержимо таку множину пар координат:

$$\{(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 6), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 6), (4, 5),$$
$$(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 2), (3, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 1),$$
$$(1, 6), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2)\}.$$

Отже, маємо тридцять рівнів структурного графу та відповідну кількість пар вершин x_i^0 та x_i^{st}. Позначимо їх вибірково на рис. 2.

Властивості лінійної функції на структурному графі описують таким твердженням.

Твердження 2. Нехай задано функцію $f(x)$ вигляду (6) на структурному графі множини e-конфігурацій $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, h)$ і задано значення B. Тоді виконується одна з таких умов:

а) якщо $f(x_i^0) \leq$, то $\forall x \in X_i' : f(x) \leq B$;

б) якщо $f(x_i^{st}) \geq B$, то $\forall x \in X_i' : f(x) \geq B$;

в) якщо $f(x_i^0) \geq B \geq f(x_i^{st})$, то $\exists X'_{i, \geq B} \subset X'$, $X'_{i, \geq B} = \{x \in X_i' : f(x) \geq B\}$, $\exists X'_{\leq B} \subset X'$, $X'_{i, \leq B} = \{x \in X_i' : f(x) \leq B\}$.

Із твердження 2 випливає, що за допомогою оцінювання рівнів структурного графу множини евклідових комбінаторних конфігурацій можна визначити подальший напрямок руху графом вглиб. Отже, далі визначимо структурний орієнтований граф $\vec{G}_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, h)$ (рис. 3).

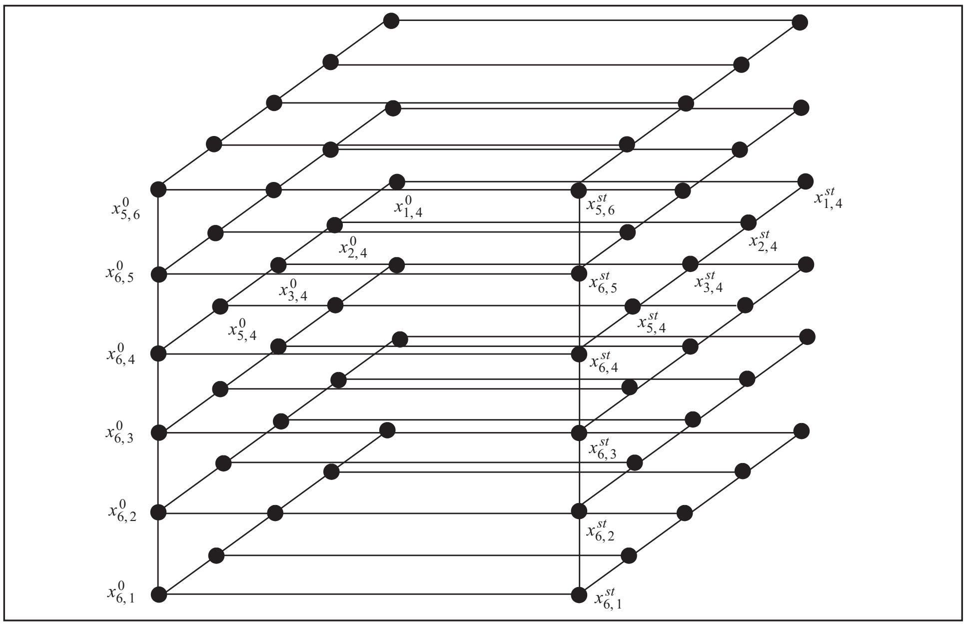

Рис. 2. Структурний граф $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 2)$

Інакше кажучи, для оцінювання значення лінійної функції спочатку слід розглядати структурний граф $\vec{G}_S^X(\widetilde{V},\widetilde{U},1)$, визначаючи значення функції у його вершинах. Послідовний розгляд структурних графів множин евклідових комбінаторних конфігурацій $\vec{G}_S^X(\widetilde{V},\widetilde{U},1)$, $\vec{G}_S^X(\widetilde{V},\widetilde{U},2)$, $\vec{G}_S^X(\widetilde{V},\widetilde{U},3),\ldots$ називають зануренням у структурний граф G_S^X.

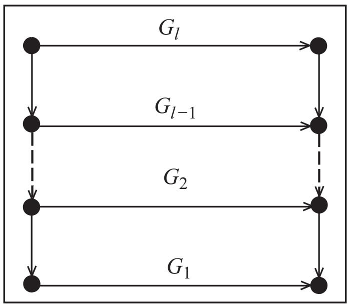

Рис. 3. Структурний орієнтований граф $\vec{G}_S^X(\widetilde{V},\widetilde{U},h)$

Наведені твердження та властивості структурних графів множин евклідових комбінаторних конфігурацій використовують для опису двоетапного методу розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

3. ДВОЕТАПНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ПЕРЕСТАНОВОК

Оскільки задача є векторною або багатокритерійною, потрібно скористатися методами векторної оптимізації.

У випадку багатокритерійної оптимізації виникають три проблеми. Перша проблема пов'язана з вибором принципу оптимальності. У математичному аспекті вона є еквівалентною задачі впорядкування векторних множин, а вибір принципу оптимальності — вибору відношень порядку. Друга проблема пов'язана з нормалізацією векторного критерію $F(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))\to \text{extr}$. Ця проблема постає тоді, коли частинні критерії мають різні одиниці виміру, тому їх слід привести до єдиного масштабу виміру, тобто нормалізувати. Третя проблема пов'язана з урахуванням пріоритету (ступеня важливості) частинних критеріїв. Часто для врахування пріоритету вводять вектор розподілу важливості або значимості критеріїв $f_i(x)=\langle c_{ij}x_j\rangle$, $i\in J_n$, $j\in J_m$. Усі методи розв'язання задач векторної оптимізації об'єднує загальний прийом пошуку найкращого розв'язку, в якому векторний критерій у той чи інший спосіб перетворюють на скалярну цільову функцію, а потім розв'язують задачу оптимізації. Також очевидно, що у випадку скалярної функції $F(x)$ розв'язання задачі (12), (13) не буде надто складним.

На першому етапі застосовують відомий метод послідовних поступок у деякій модифікації до задач комбінаторної оптимізації з багатьма критеріями.

Метод послідовних поступок розв'язання багатокритерійних задач застосовують тоді, коли частинні критерії можна впорядкувати в порядку спадання важливості [1, 12]. Припустимо, що всі критерії максимізуються і пронумеровані в порядку спадання їхньої важливості. Спочатку визначають мінімальне (або максимальне) значення першого за важливістю критерію в області допустимих рішень і розв'язують однокритерійну задачу. Потім призначають, виходячи з практичних міркувань і прийнятої точності, величину допустимого відхилення (економічно виправданої поступки) критерію і відшукують мінімальне (максимальне) значення другого критерію за умови, що значення першого повинно відхилятися від максимального не більше ніж на величину допустимої поступки, тобто розв'язують наступну однокритерійну задачу.

Розглянемо метод послідовних поступок згідно з [12] для задачі (12), (13). Для спрощення опису методу покладемо $f_i\to\min$, $i\in J_m$. Спершу здійснюють упорядкування критеріїв оптимізації за спаданням їхньої важливості $f_1\succ f_2\succ\ldots\succ f_m$. Ранжування критеріїв призводить до лексикографічного розв'язку задачі. Вектор $\vec{x}\in X$ є лексикографічним розв'язком, якщо для всіх $\vec{x}\,'\in X$ виконується умова $\vec{f}(\vec{x})<_{lex}\vec{f}(\vec{x}\,')$.

Далі знаходять оптимальне значення для першого критерію: $f_1^*=\min f_1(x)$, $x\in D$. Визначають величину допустимої поступки $(f_1^*+\Delta f_1)$, до системи обмежень додають нерівність $f_1(x) \le f_1^* + \Delta f_1$ і знаходять оптимальне значення другого за пріоритетністю критерію. Коли процедура виконана для кожного з m критеріїв і задані поступки не перебільшені, то розв'язок вважається оптимальним.

Описано перший етап запропонованого методу розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях, але далі слід врахувати специфіку задачі комбінаторної оптимізації. Інакше кажучи, на другому етапі розв'язування запропонованої задачі потрібно застосувати комбінаторний метод, враховуючи властивості комбінаторних конфігурацій. Відомо, що досить ефективним є горизонтальний метод розв'язування задач комбінаторної оптимізації, який використовує властивості орієнтованого графу.

Розглянемо допоміжну процедуру обходу у структурному орієнтованому графі множини евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок. Ця процедура є основою горизонтального методу і складається з таких кроків.

Крок 0. Уведемо коефіцієнти лінійного обмеження задачі $g(x) \ge b$, упорядкувавши коефіцієнти заданої лінійної функції-обмеження за зростанням $g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$, тоді функція набуває вигляду

$$Rg(x) = \tilde{c}_1 x_1 + \ldots + \tilde{c}_n x_n, \; \tilde{c}_1 \le \tilde{c}_2 \le \ldots \le \tilde{c}_m .$$

Крок 1. Будуємо структурний граф множини X евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$, $\tilde{h} = 1$, тобто з однією закріпленою координатою.

Крок 2. Кількість вершин графу $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$ визначаємо за формулою $|\tilde{V}| = \dfrac{2 \cdot m'!}{(m' - \tilde{h})!}$, де m' — кількість різних елементів основи множини X.

Крок 3. Обчислюємо значення $g(x)$ у вершинах графу $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$, які згідно з означенням структурного графу будуть дорівнювати мінімуму та максимуму на кожному рівні графу $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, 1)$.

Крок 4. Визначаємо рівні графу, що містять шукані вершини, які задовольняють умову $g(x) \ge b$, використовуючи твердження 2. Збільшуємо кількість зафіксованих координат, тобто $\tilde{h} = \tilde{h} + 1$. Якщо $\tilde{h} \le m$, формуємо набір структурних графів, які є підграфами загального графу, $\vec{G}_S^{X_1}(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$, $\vec{G}_S^{X_2}(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h}), \ldots$ $\ldots, \vec{G}_S^{X_l}(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$ (виконуємо занурення в граф $\vec{G}_S^X$), переходимо на крок 3 і повторюємо дослідження для кожного із l графів, де l — кількість рівнів, для яких потрібно виконати подальші дослідження.

Крок 5. Використовуючи властивості структурного графу, формуємо множину D таких евклідових комбінаторних конфігурацій, для яких виконується умова $g(x) \ge b$.

Отже, в результаті об'єднання горизонтального методу з методом послідовних поступок одержимо двоетапний метод, що враховує властивості комбінаторної конфігурацій, специфіку комбінаторних задач і особливості багатокритерійної оптимізації. Опишемо його такою послідовністю кроків.

1. Уведемо дані задачі: елементи твірної множини A евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок, критерії оптимальності $f_i(x) \to \min$, $i \in J_m$, лінійні обмеження задачі $g_i(x) \ge b_i$, $i \in J_k$.

2. Для кожного k з обмежень побудуємо структурний орієнтований граф та виконаємо його дослідження відповідно до процедури горизонтального методу, описаного вище, одержавши множини D_i, $i \in J_k$.

3. Знайдемо множину $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_k$.

4. Упорядкуємо критерії за пріоритетністю $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_m$.

5. Покладемо $i=1$, $D_1^* = D^*$.

6. Знайдемо $f_i^* = \min f_1(x)$, $x \in D_i^*$. Визначимо величину допустимої поступки для поточного критерію $(f_i^* + \Delta f_i)$.

7. Для нерівності $f_i(x) \le f_i^* + \Delta f_i$ застосуємо процедуру горизонтального методу, одержавши множину D_i'.

8. Покладемо $i = i+1$, $D_i^* = D_i' \cap D_{i-1}^*$. Якщо $i \le k$, перейдемо до п. 6, в іншому випадку одержаний розв'язок для $f_k(x)$ є розв'язком задачі, оскільки задовольняє всі попередні допустимі поступки.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ТА ЇХНІЙ АНАЛІЗ

Розглянемо такий приклад.

Приклад 3. Нехай маємо X — множину евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок з повтореннями із елементів $A = \{1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11\}$. Потрібно знайти такі значення $x^* \in X$, які є оптимальними для функцій

$$f_1(x) = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5 + x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 6x_{10} \to \max,$$

$$f_2(x) = 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 8x_5 + 11x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 7x_9 + x_{10} \to \max,$$

$$f_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 19x_5 + 29x_6 + 22x_7 + 11x_8 + 4x_9 + 7x_{10} \to \max$$

за обмежень

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 19x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 3x_{10} \le 300; \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 2x_7 + 7x_8 + 3x_9 + x_{10} \le 240; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 5x_7 + 6x_8 + x_9 + 3x_{10} \le 220; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + x_7 + 5x_8 + 7x_9 + 2x_{10} \le 200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 5x_8 + 2x_9 + 4x_{10} \le 250. \end{array}\right\}$$

Розв'язання.

Згідно з першим етапом двоетапного методу визначимо пріоритетність функцій: нехай виконується умова $f_1 \succ f_2 \succ f_3$.

Для виконання другого етапу, тобто для роботи з алгоритмом горизонтального методу впорядкуємо коефіцієнти першого обмеження за зростанням. Отримаємо функцію

$$g_1'(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 19x_{10}.$$

Покладемо $h=1$, тобто закріпимо одну координату. Оскільки множина A має сім різних елементів, одержимо сім підмножин таких, що $x_7^1 = 11$, $x_7^2 = 9$, $x_7^3 = 8$, $x_7^4 = 7$, $x_7^5 = 4$, $x_7^6 = 2$, $x_7^7 = 1$.

Маємо відповідно сім пар вершин x_i^0 та x_i^{st}:

$$\begin{array}{ll} x_1^0 = (9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 11), & x_1^{st} = (1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11), \\ x_2^0 = (11, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 9), & x_2^{st} = (1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 11, 9), \\ x_3^0 = (11, 9, 9, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 8), & x_3^{st} = (1, 2, 2, 4, 4, 7, 9, 9, 11, 8), \\ x_4^0 = (11, 9, 9, 8, 4, 4, 2, 2, 1, 7), & x_4^{st} = (1, 2, 2, 4, 4, 8, 9, 9, 11, 7), \\ x_5^0 = (11, 9, 9, 8, 7, 4, 2, 2, 1, 4), & x_5^{st} = (1, 2, 2, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 4), \\ x_6^0 = (11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 1, 2), & x_6^{st} = (1, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 2), \\ x_7^0 = (11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1), & x_7^{st} = (2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 1). \end{array}$$

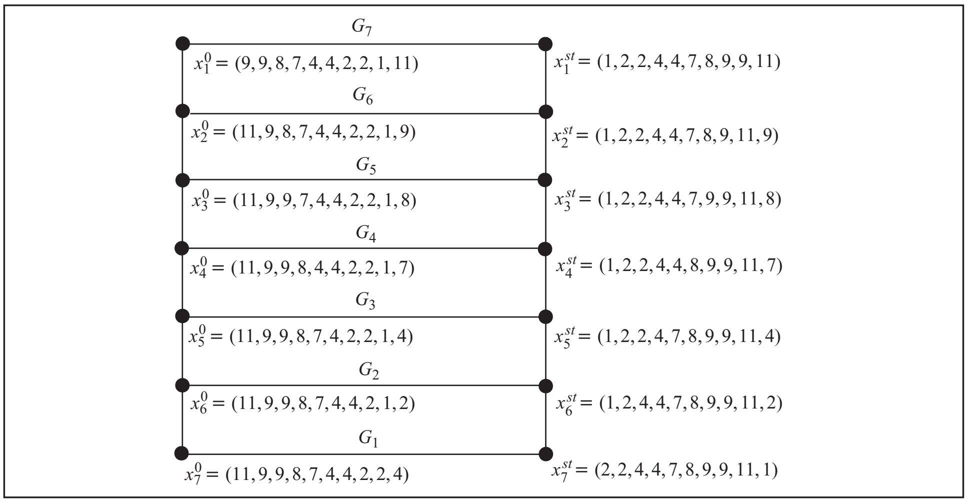

Рис. 4. Структурний граф $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 1)$

Таблиця 1. Максимальні та мінімальні значення функції $g(x)$

Фіксована остання координата	$x_{\max}$	$g_{1\,\max}^i$	$x_{\min}$	$g_{1\,\min}^i$
11	1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11	488	9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 11	370
9	1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 11, 9	468	11, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 9	227
8	1, 2, 2, 4, 4, 7, 9, 9, 11, 8	456	11, 9, 9, 7, 4, 4, 2, 2, 1, 8	228
7	1, 2, 2, 4, 4, 8, 9, 9, 11, 7	441	11, 9, 9, 8, 4, 4, 2, 2, 1, 7	230
4	1, 2, 2, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 4	396	11, 9, 9, 8, 7, 4, 2, 2, 1, 4	236
2	1, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 2	364	11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 1, 2	248
1	2, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 1	347	11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 2, 1	265

На рис. 4 наведено граф $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 1)$, на якому позначено вершини та рівні структурного графу G_7, G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1, номери яких відповідають закріпленим координатам.

Для кожної вершини знайдемо максимальні та мінімальні значення функції $g_1(x)$, тобто $g_{1\max}^i$ та $g_{1\min}^i$, де i — рівень структурного графу. Результати наведено у табл. 1.

Як видно, цільова функція монотонно зростає під час руху від витоку (верхньої лівої вершини графу) до стоку (правої нижньої вершини).

Покладемо $h = 2$, тобто закріпимо дві останні координати. Враховуючи унікальні елементи множини X, одержимо таку множину пар координат:

$$\{(11, 9), (11, 8), (11, 7), (11, 4), (11, 2), (11, 1), (9, 11), (9, 8), (9, 7), (9, 4), (9, 2),\\ (9, 1), (8, 11), (8, 9), (8, 7), (8, 4), (8, 2), (8, 1), (7, 11), (7, 9), (7, 8), (7, 4), (7, 2),\\ (7, 1), (4, 11), (4, 9), (4, 8), (4, 7), (4, 2), (4, 1), (2, 11), (2, 9), (2, 8), (2, 7), (2, 4),\\ (2, 1), (1, 11), (1, 9), (1, 8), (1, 7), (1, 4), (1, 2)\}.$$

Отже, одержано 42 рівні структурного графу та відповідну кількість пар вершин x_i^0 та x_i^{st}. Позначимо їх вибірково на рис. 5.

Для кожної вершини знайдемо максимальні та мінімальні значення функції $g_1'(x)$, тобто $g_{1\max}^{i,j}$ та $g_{1\min}^{i,j}$, де i, j — рівні структурного графу, що визначаються закріпленими координатами. Дані, отримані в результаті обчислень для рівня з останньою координатою 2, наведено в табл. 2.

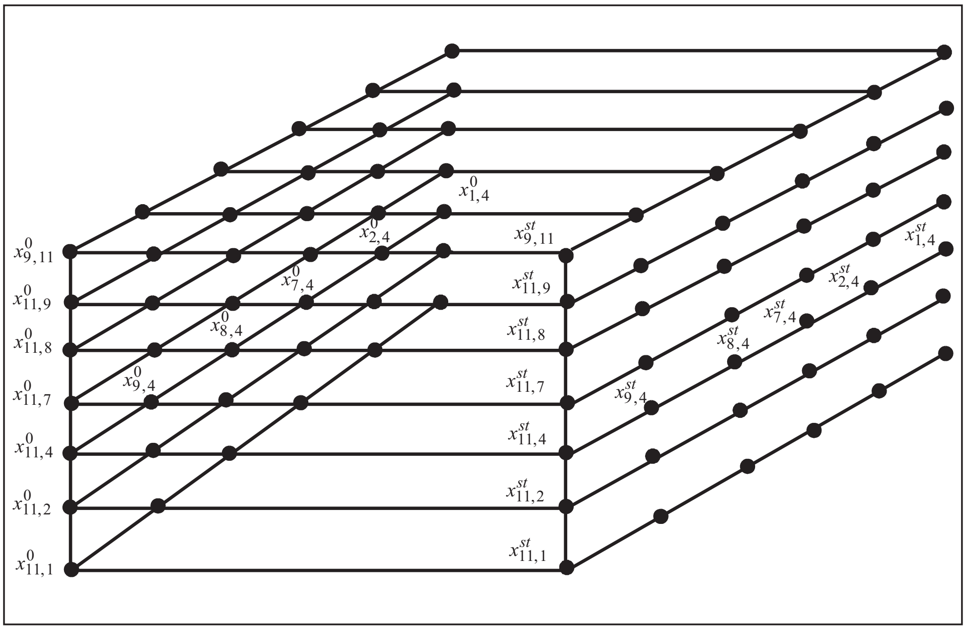

Рис. 5. Структурний граф $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 2)$

Т а б л и ц я 2. Максимальні та мінімальні значення функції $g_1'(x)$ для $G_S^X(\widetilde{V}, \widetilde{U}, 2)$

Фіксована остання координата	$x_{\max}$	$g_{1\ \max}^{i,j}$	$x_{\min}$	$g_{1\ \min}^{i,j}$
11, 2	1, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 2	364	9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 1, 11, 2	281
9, 2	1, 2, 4, 4, 7, 8, 9, 11, 9, 2	362	11, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 1, 9, 2	267
8, 2	1, 2, 4, 4, 7, 9, 9, 11, 8, 2	357	11, 9, 9, 7, 4, 4, 2, 1, 8, 2	261
7, 2	1, 2, 4, 4, 8, 9, 9, 11, 7, 2	352	11, 9, 9, 8, 4, 4, 2, 1, 7, 2	255
4, 2	1, 2, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 4, 2	334	11, 9, 9, 8, 7, 4, 2, 1, 4, 2	240
2, 2	1, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11, 2, 2	322	11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 1, 2, 2	236
1, 2	2, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 11 ,1, 2	315	11, 9, 9, 8, 7, 4, 4, 2, 1 ,2	235

Аналогічно виконуємо обрахунки для кожного обмеження. У результаті отримаємо масив перестановок, що задовольняють умови усіх обмежень, та позначимо його D^*.

Згідно з визначеним порядком пріоритетності функцій $f_1 \succ f_2 \succ f_3$ на множині D^* знайдемо максимальне значення для функції f_1, тобто розв'яжемо задачу (1): знайти

$$f_1(x) \to \max,\ x \in D^*.$$

Після проведення обрахунків отримаємо такі результати: $f_{1\max}(x) = 304$ в перестановці $(2, 8, 7, 2, 4, 1, 11, 4, 9, 9)$. Зробимо поступку $\Delta_1 = 30{,}4$. Сформуємо додаткове обмеження для задачі 2:

$$f_1 \geq 304 - \Delta_1,$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5 + x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 6x_{10} \geq 273{,}4.$$

Для нового обмеження виконаємо процедуру горизонтального методу. В результаті одержимо множину D_1', $D_1' \cap D^* = D_1^*$.

Розв'яжемо задачу (2): знайти

$$f_2(x) \to \max,\ x \in D_1^*.$$

Після проведення обрахунків отримаємо такі результати: $f_{2\max}(x) = 351$ у точці (4, 2, 9, 2, 8, 4, 9, 1, 11, 7). Ця конфігурація задовольняє обмеження додаткової задачі (1), оскільки $f_1 = 278 \geq 273{,}4$.

Зробимо поступку $\Delta_2 = 35{,}1$. Сформуємо додаткове обмеження для задачі (3):

$$f_2 \geq 351 - \Delta_2,$$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 8x_5 + 11x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 7x_9 + x_{10} \geq 315{,}9.$$

Для нового обмеження виконаємо процедуру горизонтального методу. В результаті одержимо множину D_2', $D_2' \cap D_1^* = D_2^*$.

На множині D_2^* знайдемо максимальне значення для третьої функції, тобто розв'яжемо задачу (3): знайти

$$f_3(x) \to \max, \; x \in D_2^*.$$

Після проведення обрахунків отримаємо такі результати: $f_{3_{\max}}(x) = 759$ у точці $(1, 4, 7, 2, 11, 4, 9, 2, 8, 9)$.

Згідно із пропонованим методом саме розв'язок допоміжної задачі (3) і буде розв'язком початкової задачі.

Відповідь: розв'язком буде евклідова комбінаторна конфігурація перестановок $x^* = (1, 4, 7, 2, 11, 4, 9, 2, 8, 9)$, у якій значення критеріїв оптимальності дорівнює відповідно $f_1(x^*) = 280$, $f_2(x^*) = 334$, $f_3(x^*) = 759$.

Слід зазначити, що запропонований двоетапний метод розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях перестановок дає можливість за скінченну кількість кроків знайти ефективні розв'язки задачі. Метод послідовних поступок не завжди призводить до отримання лише ефективних розв'язків, але серед цих точок завжди є хоча б одна ефективна точка. При цьому процедура горизонтального методу завжди закінчить свою роботу, оскільки виконується пошук комбінаторного розв'язку на підграфах комбінаторних конфігурацій, а їхня кількість є скінченною.

ВИСНОВКИ

У цій роботі представлено математичну модель задачі векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації перестановок. Описано властивості комбінаторних конфігурацій та їхнє використання під час розв'язання запропонованої задачі. Представлено двоетапний метод для розв'язання задачі векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації перестановок з повтореннями та розглянуто приклад реалізації цього методу.

Напрямом подальшого розвитку проведеного дослідження є розширення реалізованого методу на інші класи задач, зокрема для інших комбінаторних конфігурацій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Jahn J. Vector optimization: theory, applications and extensions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 400 p.
2. Emelichev V., Kuzmin K., Nikulin Y. Stability analysis of the Pareto optimal solutions for some vector boolean optimization problem. *Optimization*. 2005. Vol. 54, N 6. P. 545–561.
3. Engau A., Sigler D. Pareto solutions in multicriteria optimization under uncertainty. *European Journal of Operational Research.* 2020. Vol. 281, N 2. P. 357–368.
4. Ehrgott M., Wiecek M. Mutiobjective programming. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (Eds). New York: Springer, 2005. P. 667–708.
5. Podinovski V.V. Decision making under uncertainty with unknown utility function and rank-ordered probabilities. *European Journal of Operational Research*. 2014. Vol. 239, N 2. P. 537–541.
6. Kuzmin K., Nikulin Y., Mäkelä M. On necessary and sufficient conditions of stability and quasistability in combinatorial multicriteria optimization. *Control and Cybernetics*. 2017. Vol. 46, N 4. P. 361–382.
7. Emelichev V., Nikulin Yu. On a quasistability radius for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 949–957. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00205-9.

8. Сергиенко И.В., Перепелица В.А. Полиномиальные и NP-полные многокритериальные задачи перечисления альтернатив. *Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации.* Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1989. С. 58–69.
9. Studniarski M., Koliechkina K., Dvernaya E. Solving a combinatorial multiobjective optimization problem by genetic algorithm. *Contemporary Computational Science.* Kulczycki P., Kowalski P., Łukasik Sz. (Eds). *Proc. 3rd Conference on Information Technology, Systems Research and Computational Physics, Contemporary Computational Science* (2–5 July 2018, Cracow, Poland). Cracow, 2018, P. 188–200.
10. Петров Э.Г., Крючковский В.В., Петров К.Э. Нормативная формализация процесса принятия решений в условиях многокритериальности и интервальной неопределенности. *Проблеми інформаційних технологій*. 2014. № 1. С. 7–13.
11. Sergienko I.V., Shilo V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 1. P. 15–24.
12. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв’язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
13. Koliechkina L.N., Pichugina O. Multiobjective optimization on permutations with applications. *DEStech Transactions on Computer Science and Engineering.* 2018. P. 61–75. https://doi.org/10.12783/dtcse/optim2018/27922.
14. Koliechkina L., Pichugina O., Yakovlev S. A Graph-theoretic approach to multiobjective permutation-based optimization. In: *Optimization and Applications.* Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (Eds.). *Proc. 10th International Conference (OPTIMA 2019)* (30 September–4 October, 2019, Petrovac, Montenegro). Cham: Springer International Publishing, 2020. P. 383–400.
15. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of permutations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2008. Vol. 40, N 12. P. 67–80.
16. Semenova N.V., Kolechkina L.N. A polyhedral approach to solving multicriterion combinatorial optimization problems over sets of polyarrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 3. P. 438–445. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9110-8.
17. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. On approach to solving vector problems with fractionally linear functions of the criteria on the combinatorial set of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2010. Vol. 42, N 2. P. 67–80.
18. Koliechkina L., Dvirna O.A., Nahirna A.N. Construction of a mathematical model of multiobjective optimization on permutations. *Control Systems and Computers*. 2020. N 2 (286). P. 23–29.
19. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Theory and methods of Euclidian combinatorial optimization: current status and prospects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 366–379. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00253-6.
20. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Pichugina O.S. The Euclidean combinatorial configurations. Kharkiv: Constanta, 2017. 268 p.
21. Yakovlev S.V. Formalization of spatial configuration optimization problems with a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 581–589. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00167-y.
22. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2018. 698 p.
23. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer-Verlag, 2013. 3409 p.
24. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola (NY): Dover Publications, 2013. 528 p.
25. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. Optimization methods and applications: in honor of Ivan V. Sergienko’s 80th birthday. New York: Springer International Publishing, 2017. 639 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0.
26. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. In: *Optimization Methods and Applications.* Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds.). New York: Springer International Publishing, 2017. P. 239–250.
27. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
28. Koliechkina L., Pichugina O. A horizontal method of localizing values of a linear function in permutation-based optimization. In: *Optimization of Complex Systems: Theory, Models, Algorithms and Applications.* Le Thi H.A., Le H.M., Pham Dinh T. (Eds.). Cham: Springer International Publishing, 2020. P. 355–364.

29. Koliechkina L.N., Dvernaya O.A., Nagornaya A.N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 4. P. 620–626. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9650-4.
30. Yakovlev S., Pichugina O., Koliechkina L. A lower bound for optimization of arbitrary function on permutations. *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making. Proc. International Scientific Conference "Intellectual Systems of Decision Making and Problem of Computational Intelligence"* (ISDMCI 2020) (25–29 May, 2020, Zalizniy Port, Ukraine). Zalizniy Port, 2020. P. 195–212.
31. Donets G.P., Koliechkina L.N., Nahirna A.N. A method to solve conditional optimization problems with quadratic objective functions on the set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 2. P. 278-288. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00243-8.
32. Koliechkina L.N., Nahirna A.N. Solutions of the combinatorial problem with a quadratic fractional objective function on the set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 455–465. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00261-6.
33. Koliechkina L.N., Dvirna O.A. Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 4. P. 590–599. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9961-3.
34. Koliechkina L.N., Nagornaya A.N., Semenov V.V. Method of solving problem of conditional optimization on combinatorial set of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, N 8. P. 31–42.
35. Yemelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K. Polytopes, graphs and optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. 243 p.

Надійшла до редакції 06.08.2020

Л.Н. Колечкина, Е.А. Дверная, С.В. Ховбень

ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОНФИГУРАЦИИ ПЕРЕСТАНОВОК

Аннотация. Рассмотрен класс задач векторной евклидовой комбинаторной оптимизации как задач дискретной оптимизации на множестве комбинаторных конфигураций, отображенном в евклидово пространство. Приведены свойства графов комбинаторных конфигураций, которые используются для изложения нового метода. Предложен двухэтапный метод решения задач векторной евклидовой комбинаторной оптимизации на комбинаторных конфигурациях перестановок. Представлены результаты численного эксперимента и их анализ.

Ключевые слова: векторная задача, многокритериальная оптимизация, комбинаторная конфигурация, евклидовы комбинаторные множества, векторный критерий, евклидовы модели.

L.N. Koliechkina, O.A. Dvirna, S.V. Khovben

TWO-STEP SOLUTION METHOD FOR VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS ON PERMUTATION CONFIGURATION

Abstract. A class of problems of vector Euclidean combinatorial optimization is considered as problems of discrete optimization on the set of combinatorial configurations mapped into the Euclidean space. The properties of the graphs of combinatorial configurations are given, which are used to describe the new method. A two-stage method for solving problems of vector Euclidean combinatorial optimization on combinatorial configurations of permutations is proposed. The results of a numerical experiment and their analysis are presented.

Keywords: vector problem, multiobjective optimization, combinatorial configuration, Euclidean combinatorial sets, vector criterion, Euclidean models.

Колєчкіна Людмила Миколаївна,
докторка фіз.-мат. наук, професорка Лодзинського університету, Польща,
e-mail: lkoliechkina@gmail.com.

Двірна Олена Анатоліївна,
кандидатка фіз.-мат. наук, провідна наукова співробітниця Навчально-наукового центру забезпечення якості вищої освіти Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», e-mail: lenadvirna@gmail.com.

Ховбень Сергій Васильович,
аспірант Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», e-mail: hovben1996@gmail.com.