УДК 517.954:532.546

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИОННО-КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В РАМКАХ ДРОБНО-ФРАКТАЛЬНОГО ПОДХОДА

Аннотация. Построены дробно-фрактальная математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации грунтовой среды, модель динамики процесса фильтрационной консолидации массивов фрактальной структуры с учетом ползучести грунтового скелета (прямая и обратная ретроспективная задачи), а также дробно-фрактальная математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами грунтовых сред. В рамках указанных моделей выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых одномерных по геометрической переменной краевых задач о консолидации водонасыщенных грунтовых массивов фрактальной структуры в условиях временнóй нелокальности процесса уплотнения.

Ключевые слова: математическое моделирование, фильтрационно-консолидационные процессы, неклассические модели, грунтовые среды фрактальной структуры, динамика, дробно-фрактальный подход, прямые и обратные задачи, замкнутые решения.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка методов математического моделирования динамики процессов деформирования и консолидации насыщенных геопористых сред является актуальной задачей в связи с проблемами охраны окружающей среды, в частности безопасного функционирования накопителей промышленных и бытовых стоков. В математическом аспекте исследование динамики таких сред сводится к решению краевых задач для соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных и выполнялось, например, в [1–8]. Однако в указанных и многих других работах при постановке различных консолидационных задач предполагалось наличие стандартных условий, касающихся структуры насыщенных геопористых сред [9–12], что нередко приводит к заметному сужению области применения полученных результатов. Настоящая статья посвящена задачам математического моделирования аномальных процессов фильтрационно-консолидационной динамики водонасыщенных геопористых (грунтовых) сред. Используемый дробно-фрактальный подход [13] при моделировании динамики формирования полей избыточных напоров в процессе фильтрационной консолидации позволяет учесть в математических моделях временнýю нелокальность динамики консолидационных процессов для грунтовых сред фрактальной структуры.

С учетом понятия производной Хаусдорфа по пространству [14, 15] далее рассматриваются такие задачи:

— математическое моделирование фильтрационной консолидации насыщенных грунтовых сред фрактальной структуры;

— дробно-фрактальная математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации грунтовой среды;

— математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации массивов фрактальной структуры с учетом ползучести грунтового скелета (прямая и обратная ретроспективная задачи);

— дробно-фрактальная математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами грунтовых сред.

ПРОСТЕЙШАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ НАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И КОНСОЛИДАЦИОННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Для деформируемых водонасыщенных грунтовых сред фрактальной структуры постулируем выполнение условия неразрывности фильтрационного потока в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{1}$$

где n — пористость среды, u_x — скорость фильтрации, $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ — оператор фрактальной производной, $\alpha>0$ — фрактальная размерность [13–15]. При этом в качестве фрактального аналога классического фильтрационного закона Дарси примем согласно [14] соотношение

$$u_x=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}, \tag{2}$$

где k — коэффициент фильтрации, γ — удельный вес жидкости, $p(x,t)$ — избыточное поровое давление [9–12].

Поскольку для деформируемой под действием приложенной нагрузки интенсивности q полностью водонасыщенной грунтовой среды справедливо соотношение [9, 10, 12]

$$\frac{\partial n}{\partial t}\approx\frac{1}{1+\bar{e}}\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{3}$$

где e — коэффициент пористости, $\bar{e}$ — среднее значение коэффициента пористости, то с учетом соотношения для одномерной задачи [10–12] $\sigma=q-p$ (σ — сумма главных напряжений в грунтовом скелете в условиях компрессии, q — приложенная нагрузка) и линейного соотношения обычной компрессионной зависимости [12] $e=-a\sigma+\text{const}$ (a — коэффициент уплотнения) имеем

$$\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{\partial e}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=a\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4}$$

Тогда из (1)–(4) получаем уравнение для избыточного напора, описывающее динамику одномерного процесса фильтрационной консолидации грунтового массива фрактальной структуры под действием мгновенно приложенной к его поверхности нагрузки интенсивности $q=\text{const}$:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=C_v\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{5}$$

где C_v — коэффициент консолидации [9–12], определяемый соотношением

$$C_v=\frac{k(1+\bar{e})}{\gamma a}. \tag{6}$$

Из соотношения (5), в частности при $\alpha=1$, получаем классическое уравнение консолидации К. Терцаги [9–12]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=C_v\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

где C_v определяется согласно (6).

В рамках консолидационной математической модели, базирующейся на уравнении вида (5), рассмотрим задачу фильтрационной консолидации (под действием нагрузки заданной интенсивности q) водонасыщенного грунтового массива фрактальной структуры, имеющего конечную мощность и полностью проницаемые грани $x=1$ и $x=l\,(l>1)$.

В математической постановке данная задача сводится к решению в области $(1, l)\times(0, +\infty)$ следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=C_v\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{7}$$

$$p(1, t)=0, \quad p(l, t)=0, \tag{8}$$

$$p(x, 0)=q, \tag{9}$$

где $l-1>0$ — мощность рассматриваемого слоя грунтового массива.

Переписав исходное уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{C_v}{\alpha^2}\left(x^{2(1-\alpha)}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+(1-\alpha)x^{1-2\alpha}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{10}$$

и применив к задаче (10), (8), (9) конечное интегральное преобразование вида [16]

$$\overline{p}_n(t)=\int_1^l p(x, t)\varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^{1-\alpha}}, \tag{11}$$

получим последовательность задач Коши

$$\frac{d\overline{p}_n(t)}{dt}+C_v\left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha}\right)^2\overline{p}_n(t)=0, \tag{12}$$

$$\overline{p}_n(0)=q\delta_n^{(\alpha)} \quad (n\in N), \tag{13}$$

где

$$\lambda_n^{(\alpha)}=\frac{n\pi\alpha}{l^{\alpha}-1}, \; \delta_n^{(\alpha)}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{\lambda_n^{(\alpha)}}, \; \varphi_n^{(\alpha)}(x)=\sin\left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha}(x^{\alpha}-1)\right) \; (n\in N). \tag{14}$$

Решая задачи (12), (13) и переходя в область оригиналов преобразования (11), получаем решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(x, t)=\frac{4\alpha q}{l^{\alpha}-1}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-C_v\left(\frac{\lambda_{2m-1}^{(\alpha)}}{\alpha}\right)^2 t\right)\frac{\varphi_{2m-1}^{(\alpha)}(x)}{\lambda_{2m-1}^{(\alpha)}}. \tag{15}$$

В частности, из соотношения (15) (при $\alpha=1$) получаем решение соответствующей задачи теории фильтрационной консолидации для массива конечной мощности в рамках классической модели К. Терцаги [9, 12]

$$p(x, t)=\frac{4q}{l-1}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-C_v\lambda_{2m-1}^2 t}\,\frac{\sin(\lambda_{2m-1}(x-1))}{\lambda_{2m-1}},$$

где $\lambda_{2m-1}=\pi(2m-1)/(l-1)$.

ДРОБНО-ФРАКТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Распространяя фрактальный аналог соотношения Дарси (2) на случай учета нелокальных временных эффектов (например, эффектов памяти), можно записать

$$u_x=-\frac{k}{\gamma}D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{16}$$

где $D_t^{1-\beta}$ — оператор производной Римана–Лиувилля [17–20] порядка $1-\beta$ $(0<\beta\le 1)$.

С учетом (16) соотношение (5) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}=C_v D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right)\right)$$

или

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = C_v \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \right), \tag{17}$$

где $D_t^{(\beta)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова порядка β [17–19].

Соотношение (17) лежит в основе дробно-фрактальной математической модели процесса фильтрационной консолидации.

В рамках данной дробно-фрактальной модели рассмотрим следующую простейшую (одномерную по геометрической переменной) краевую задачу консолидации, моделирующую динамику процесса уплотнения грунтового массива конечной мощности с проницаемыми верхней $x = 1$ и нижней $x = l$ $(l > 1)$ гранями:

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = C_v \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \right) \quad ((x, t) \in (1, l) \times (0, +\infty),\ 0 < \beta \le 1,\ \alpha > 0), \tag{18}$$

$$p(1, t) = 0, \quad p(l, t) = 0, \tag{19}$$

$$p(x, 0) = q = \text{const}. \tag{20}$$

Методика решения данной задачи аналогична изложенной выше при решении краевой задачи (7)–(9). В образах преобразования (11) задача (18)–(20) сводится к решению задач Коши вида

$$D_t^{(\beta)} \bar{p}_n(t) + C_v \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 \bar{p}_n(t) = 0, \tag{21}$$

$$\bar{p}_n(0) = q \delta_n^{(\alpha)} \quad (n \in N), \tag{22}$$

где $\lambda_n^{(\alpha)}, \delta_n^{(\alpha)}$ определяются согласно (14).

Решения задач (21), (22) записываются в виде

$$\bar{p}_n(t) = q \delta_n^{(\alpha)} E_\beta \left(-C_v \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) \quad (n \in N), \tag{23}$$

где $E_\beta(\cdot)$ — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера [21].

С учетом (23) и формулы обращения преобразования (11) [16] находим

$$p(x, t) = \frac{4\alpha q}{l^\alpha - 1} \sum_{m=1}^{\infty} E_\beta \left(-C_v \left(\frac{\lambda_{2m-1}^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) \frac{\varphi_{2m-1}^{(\alpha)}(x)}{\lambda_{2m-1}^{(\alpha)}}. \tag{24}$$

Отметим, что, в частности, при $\beta = 1$ из соотношения (24) очевидно получаем соотношение (15).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ МАССИВОВ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТОВОГО СКЕЛЕТА

В случае одномерного уплотнения водонасыщенного грунтового слоя под действием мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q в предположениях основной расчетной модели В.А. Флорина имеет место соотношение [9–12]

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_0 \frac{\partial p}{\partial t} + a_1 \gamma_1 \int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau} e^{-\gamma_1 (t-\tau)} d\tau, \tag{25}$$

где $e(t)$ — коэффициент пористости деформируемого под действием приложенной нагрузки грунтового массива, a_0 — параметр мгновенной деформации, a_1, γ_1 — параметры ползучести, определяемые экспериментальным путем (γ_1 — скорость нарастания деформаций ползучести [10, 12]), p — поровое давление. Основное уравнение фильтрационной консолидации трехфазной грунтовой среды фрактальной структуры с учетом изложенного выше запишем в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\beta(1+\bar{e})\frac{\partial p}{\partial t}-(1+\bar{e})\frac{\partial u_x}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{26}$$

где β — коэффициент объемной сжимаемости газовой компоненты, $\bar{e}$ — среднее значение коэффициента пористости, u_x — скорость фильтрации. Тогда из (26) с учетом (25) и обобщенного соотношения Дарси (2) получаем уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{a_1\gamma_1}{a+\beta(1+\bar{e})}\int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau}e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau = C_v\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{27}$$

где $C_v=\dfrac{k(1+\bar{e})}{\gamma(a+\beta(1+\bar{e}))}$ — коэффициент консолидации [10, 12], $a=a_0+a_1$.

Введя обозначения $\mu=\dfrac{\gamma_1}{1+\gamma_1}$, $\varsigma_{\mu}=\dfrac{a_1\mu}{a+\beta(1+\bar{e})}$, перепишем уравнение (27) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\varsigma_{\mu}\,{}^{CF}D_t^{\mu}\,p(x,t)=C_v\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{28}$$

где ${}^{CF}D_t^{\mu}$ — известный оператор производной Капуто–Фабрицио [22], определяемый соотношением

$$ {}^{CF}D_t^{\mu}\,p(x,t)=\frac{1}{1-\mu}\int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau}\exp\left(-\frac{\mu}{1-\mu}(t-\tau)\right)d\tau. \tag{29}$$

Уравнение (28) — это уравнение неклассической математической модели, описывающей динамику фильтрационно-консолидационного процесса для уплотняемого (под действием мгновенно приложенной нагрузки заданной интенсивности) водонасыщенного грунтового массива фрактальной структуры с учетом явления ползучести его скелета. При $\alpha\to 1$ из уравнения (28) получаем классическое уравнение фильтрационной консолидации массива в условиях ползучести грунтового скелета в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\varsigma_{\mu}\,{}^{CF}D_t^{\mu}\,p(x,t)=C_v\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Таким образом, классическое уравнение фильтрационной консолидации водонасыщенных грунтовых массивов в условиях ползучести грунтового скелета можно записать [6] и в виде соответствующего интегро-дифференциального уравнения, содержащего дробную производную Капуто–Фабрицио с несингулярным ядром вида (29).

В рамках математической консолидационной модели, базирующейся на уравнении (28), рассмотрим краевую задачу о фильтрационном уплотнении под действием мгновенно приложенной нагрузки геомассива конечной мощности фрактальной структуры с учетом свойств ползучести грунтового скелета. Предполагая грани массива, например, полностью проницаемыми, в математической постановке данную задачу сводим к решению в области $(1,l)\times(0,+\infty)$ краевой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\varsigma_{\mu}\,{}^{CF}D_t^{\mu}\,p(x,t)=C_v\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right)+f(x,t)\ \ (0<\mu<1,\ \alpha>0), \tag{30}$$

$$p(1,t)=0,\ \ p(l,t)=0, \tag{31}$$

$$p(x,0)=h(x), \tag{32}$$

где $h(x)$ — заданное начальное распределение порового давления в массиве, $f(x,t)$ — функция источника.

Для получения замкнутого решения краевой задачи (30)–(32) сначала применим к ней конечное интегральное преобразование вида (11) (см. [16]). В результате имеем задачу

$$\frac{d\bar{p}_n(t)}{dt} + \varsigma_\mu {}^{CF}D_t^\mu \bar{p}_n(t) + C_v \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha}\right)^2 \bar{p}_n(t) = \bar{f}_n(t), \tag{33}$$

$$\bar{p}_n(0) = \bar{h}_n \quad (n \in N), \tag{34}$$

где

$$\bar{f}_n(t) = \int_1^l f(x,t)\varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^{1-\alpha}}, \quad \bar{h}_n = \int_1^l h(x)\varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^{1-\alpha}} \quad (n \in N), \tag{35}$$

а $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$, $\lambda_n^{(\alpha)}$ определяются соотношениями (14).

Обозначим $\hat{\bar{F}}(s) = \mathcal{L}(\bar{F}(t))$ образ Лапласа функции $\bar{F}(t)$, s — параметр данного преобразования Лапласа. Применяя к задаче (33), (34) преобразование Лапласа по временно́й переменной, получаем

$$\hat{\bar{p}}_n(s) = \hat{\bar{f}}_n(s)A_n(s) + \bar{h}_n B_n(s), \tag{36}$$

где

$$A_n(s) = \frac{\frac{\mu}{1-\mu} + s}{Q_n(s)}, \quad B_n(s) = \frac{\theta_\mu + s}{Q_n(s)}, \quad Q_n(s) = s^2 + (\theta_\mu + \eta_n^{(\alpha)})s + \frac{\mu}{1-\mu}\eta_n^{(\alpha)},$$
$$\theta_\mu = \frac{\mu + \varsigma_\mu}{1-\mu}, \quad \eta_n^{(\alpha)} = C_v \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha}\right)^2 \quad (n \in N). \tag{37}$$

Поскольку $Q_n(s) = (s + \nu_n^{(1)})(s + \nu_n^{(2)})$, где

$$\nu_n^{(1,2)} = \frac{\theta_\mu + \eta_n^{(\alpha)} \mp \sqrt{\Delta_n}}{2}, \quad \Delta_n = (\eta_n^{(\alpha)} - \theta_\mu)^2 + \frac{4\varsigma_\mu}{1-\mu}\eta_n^{(\alpha)} > 0 \ (\forall n \in N), \tag{38}$$

на основании (37) имеют место соотношения

$$A_n(s) = \frac{\frac{\mu}{1-\mu} + s}{(s+\nu_n^{(1)})(s+\nu_n^{(2)})}, \quad B_n(s) = \frac{\theta_\mu + s}{(s+\nu_n^{(1)})(s+\nu_n^{(2)})} \quad (n \in N).$$

Разлагая $A_n(s), B_n(s)$ на элементарные дроби, с учетом таблиц обратного преобразования Лапласа [23] находим

$$A_n(t) = \frac{1}{\nu_n^{(2)} - \nu_n^{(1)}}\left[\left(\frac{\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(1)}\right)e^{-\nu_n^{(1)}t} - \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(2)}\right)e^{-\nu_n^{(2)}t}\right], \tag{39}$$

$$B_n(t) = \frac{1}{\nu_n^{(2)} - \nu_n^{(1)}}\left[\left(\frac{\mu+\varsigma_\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(1)}\right)e^{-\nu_n^{(1)}t} - \left(\frac{\mu+\varsigma_\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(2)}\right)e^{-\nu_n^{(2)}t}\right]. \tag{40}$$

Возвращаясь в соотношениях (36) в область оригиналов преобразования Лапласа, на основании соотношений (39), (40) получаем

$$\bar{p}_n(t) = \frac{1}{\nu_n^{(2)} - \nu_n^{(1)}}\left\{\int_0^t \left[\left(\frac{\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(1)}\right)e^{-\nu_n^{(1)}(t-\tau)} - \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(2)}\right)e^{-\nu_n^{(2)}(t-\tau)}\right]\bar{f}_n(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \bar{h}_n\left[\left(\frac{\mu+\varsigma_\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(1)}\right)e^{-\nu_n^{(1)}t} - \left(\frac{\mu+\varsigma_\mu}{1-\mu} - \nu_n^{(2)}\right)e^{-\nu_n^{(2)}t}\right]\right\} \quad (n \in N), \tag{41}$$

где $\bar{h}_n$, $\bar{f}_n$ определяются соотношениями (35).

Переходя в область оригиналов преобразования вида (11), с учетом результатов [16] находим решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(x,t)=\frac{2\alpha}{l^{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{p}_n(t)\,\varphi_n^{(\alpha)}(x),$$

где $\bar{p}_n(t), \varphi_n^{(\alpha)}(x)$ определяются соотношениями (41) и (14) соответственно. В частности, при $\alpha\to 1$ найденное решение определяет решение соответствующей задачи теории консолидации массивов с учетом ползучести грунтового скелета в классической постановке [9–12].

ОБРАТНАЯ РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛИ КОНСОЛИДАЦИИ МАССИВОВ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТОВОГО СКЕЛЕТА

Отметим, что интегро-дифференциальное уравнение неклассической модели консолидации (28) можно преобразовать в дифференциальное аналогично случаю классической консолидационной модели [1, 2, 9–12]. Действительно, дифференцируя (28) по переменной t и складывая полученный результат с уравнением (28), предварительно умноженным на коэффициент $\mu/(1-\mu)$, получаем искомое дифференциальное уравнение консолидации массивов фрактальной структуры с учетом ползучести грунтового скелета в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\theta_{\mu}\frac{\partial p}{\partial t}=C_v\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\mu}{1-\mu}p\right)\right)\ (0<\mu<1,\ \alpha>0), \tag{42}$$

где θ_{μ} определяется согласно (37).

Приняв во внимание (42), рассмотрим в области $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$ задачу восстановления начальной функции поля $p(x,0)$ по заданному ее конечному значению $p(x,T)$ при условиях

$$p(1,t)=0,\ \ p(l,t)=0, \tag{43}$$

$$p(x,T)=g(x),\ \ p'_t(x,0)=0, \tag{44}$$

где $\Omega=(1,l)$, $g(x)$ — заданная функция, $g(x)\in L^2(\Omega)$.

Применяя к (42)–(44) конечное интегральное преобразование по геометрической переменной x вида (11), получаем задачу Коши

$$\frac{d^2\bar{p}_n(t)}{dt^2}+(\theta_{\mu}+\eta_n^{(\alpha)})\frac{d\bar{p}_n(t)}{dt}+\frac{\mu}{1-\mu}\eta_n^{(\alpha)}\bar{p}_n(t)=0, \tag{45}$$

$$\bar{p}_n(T)=g_n,\ \ \bar{p}'_n(0)=0, \tag{46}$$

где

$$g_n=\int_1^l g(x)\varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^{1-\alpha}},\quad \eta_n^{(\alpha)}=C_v\left(\frac{n\pi}{l^{\alpha}-1}\right)^2\ \ (n\in N). \tag{47}$$

Решение задачи (45), (46) запишем в виде

$$\bar{p}_n(t)=g_n e^{\nu_n^{(2)}(T-t)}\xi_n(t)\ \ (n\in N), \tag{48}$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi_n(t)=\frac{\varsigma_n(t)}{\varsigma_n(T)},\ \varsigma_n(t)=\nu_n^{(2)}e^{(\nu_n^{(2)}-\nu_n^{(1)})t}-\nu_n^{(1)}\ \ (n\in N) \tag{49}$$

($\nu_n^{(1,2)}$ определяются соотношениями (38)).

Возвращаясь в соотношениях (48) к оригиналам конечного интегрального преобразования по геометрической переменной (11), получаем решение задачи (45), (46) в виде

$$p(x, t)=\frac{2\alpha}{l^{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\, e^{\nu_n^{(2)}(T-t)}\xi_n(t)\varphi_n^{(\alpha)}(x), \tag{50}$$

где g_n, $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$ определяются соответственно соотношениями (47), (14), а $\xi_n(t)$ — соотношениями (49).

Из соотношений (48) при условии $\lim\limits_{n\to\infty} g_n \neq 0$ непосредственно следует соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{p}_n(0)=\infty$, т.е. задача отыскания $p(x, 0)$ некорректна по Адамару [24]. Ниже построим регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи, базируясь на методах регуляризации [24, 25].

Рассматривая соответствующую данной задаче регуляризованную задачу, заменяем условия (44) условиями вида

$$p(x, T)+\beta p(x, 0)=g(x), \;\; p_t'(x, 0)=0, \tag{51}$$

где $\beta>0$ — параметр регуляризации [24, 25].

Аналогично изложенному выше для решения задачи (42), (43), (51) получаем соотношение

$$p(x, t)=\frac{2\alpha}{l^{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{e^{\nu_n^{(2)}(T-t)}\xi_n(0)}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}\varphi_n^{(\alpha)}(x). \tag{52}$$

Пусть $p_\beta(x, t)$, $u_\beta(x, t)$ — два решения регуляризованной задачи, соответствующие конечным значениям $g(x)$ и $h(x)$. Тогда имеем

$$\| p_\beta(x,0)-u_\beta(x,0)\|^2=\left\| \frac{2\alpha}{l^{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g_n-h_n)e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}\varphi_n^{(\alpha)}(x)\right\|^2 \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}\right)^2 (g_n-h_n)^2 \le \left(\sup_{n\in N} G(n)\right)^2 \| g-h\|^2,$$

где $G(n)=\dfrac{e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}$, $\| g\| := \| g\|_{L^2(\Omega)}$.

Отсюда получаем

$$\| p_\beta(x,0)-u_\beta(x,0)\| \le \frac{\| g-h\|}{\beta}. \tag{53}$$

Далее найдем оценку отклонения решения регуляризованной задачи от соответствующего решения исходной задачи. Вводя в рассмотрение пространство $L^2(\Omega)$ и пространство Соболева $H^{\ell}(\Omega)$ [26, 27], с учетом соотношений (50), (52) находим

$$\| p(\cdot,0)-p_\beta(\cdot,0)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n \frac{\beta e^{2\nu_n^{(2)}T}\xi_n^2(0)}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)}\varphi_n^{(\alpha)}(x)\right)^2 \le$$

$$\le \left(\sup_{n\in N} R(n)\right)^2 \| g\|^2_{H^2(\Omega)}, \tag{54}$$

где

$$R(n)=\frac{\beta e^{2\nu_n^{(2)}T}\xi_n^2(0)}{\eta_n^{(\alpha)}(1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0))}. \tag{55}$$

Поскольку при $n>1$ справедливо соотношение $\eta_n^{(\alpha)} > \eta_1^{(\alpha)}$, из (55) получаем

$$R(n) \le \frac{\beta}{\eta_1^{(\alpha)}} \frac{(e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0))^2}{1+\beta e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0)} \le \frac{\beta}{\eta_1^{(\alpha)}} (e^{\nu_n^{(2)}T}\xi_n(0))^2 \le$$

$$\le \frac{\beta}{\eta_1^{(\alpha)}} \exp\left(\frac{2\mu T}{1-\mu}\right) = \beta M_1(\alpha, \mu), \qquad (56)$$

где $M_1(\alpha,\mu) = \frac{1}{\eta_1^{(\alpha)}} \exp\left(\frac{2\mu T}{1-\mu}\right)$. Таким образом, с учетом неравенства (56) соотношение (54) принимает вид

$$|| \, p(\,\cdot\,, 0) - p_\beta(\,\cdot\,, 0) \, || \le \beta M_1(\alpha, \mu) \, || \, g \, ||_{H^2(\Omega)}, \qquad (57)$$

или в предположении $|| \, p(x,0) \, ||_{H^2(\Omega)} \le E$ $(E = \mathrm{const} > 0)$ из (57) получаем оценку

$$|| \, p(\,\cdot\,, 0) - p_\beta(\,\cdot\,, 0) \, || \le \beta M_1(\alpha, \mu) E. \qquad (58)$$

С учетом приведенных оценок нетрудно получить соответствующие оценки в случае неточных исходных данных задачи. Действительно, пусть $P_\beta(x, t)$ — решение регуляризованной задачи, соответствующее зашумленным данным $g^\delta(x)$, и $p_\beta(x, t)$ — соответствующее решение в случае точных данных $g(x)$. Предположим, что $|| \, g^\delta(x) - g(x) \, || \le \delta$, где $\delta > 0$ — уровень шума. Тогда, исходя из неравенства треугольника

$$|| \, P_\beta(x, 0) - p(x, 0) \, || \le || \, P_\beta(x, 0) - p_\beta(x, 0) \, || + || \, p_\beta(x, 0) - p(x, 0) \, ||,$$

получаем с учетом соотношений (53), (58)

$$|| \, P_\beta(x,0) - p(x,0) \, || \le \frac{1}{\beta} || \, g^\delta - g \, || + \beta M_1(\alpha, \mu) E \le \frac{\delta}{\beta} + \beta M_1(\alpha, \mu) E. \qquad (59)$$

Если, например, положить $\beta = \sqrt{\delta / E}$, то из (59) получаем оценку вида

$$|| \, P_\beta(x, 0) - p(x, 0) \, || \le (1 + M_1(\alpha, \mu)) \sqrt{\delta E}.$$

ДРОБНО-ФРАКТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НЕЛОКАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ НАСЫЩЕННОЙ СОЛЕВЫМ РАСТВОРОМ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

Рассматривая изотермический нелокальный во времени фильтрационно-консолидационный процесс в насыщенной солевым раствором грунтовой среде фрактальной структуры, будем исходить из следующего обобщения законов Дарси и Фика:

$$u_x = D_t^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-kH + \nu C), \qquad (60)$$

$$q_C = D_t^{1-\beta} \left(-d_* \frac{\partial C}{\partial x^\alpha} + C J_t^{1-\beta} u_x + \gamma d_u \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \right), \qquad (61)$$

где u_x — скорость геофильтрации, $H(x, t) = p / \gamma$ — избыточный напор, p — поровое давление, γ — удельный вес жидкости, $C(x, t)$ — концентрация солей в жидкой фазе, ν — коэффициент химического осмоса [28], k — коэффициент фильтрации, q_C — диффузионный поток, d_* — коэффициент конвективной диффузии [28], d_u — коэффициент ультрафильтрации, $J_t^{1-\beta}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\beta$ $(0 < \beta \le 1)$, $D_t^{1-\beta}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля того же порядка по переменной t [17, 19].

С учетом (60), (61) и обобщенного уравнения неразрывности фильтрационного потока в условиях линейного закона уплотнения

$$\frac{\partial u_x}{\partial x^\alpha}+\frac{k}{C_v}\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

получаем уравнение

$$D_t^{(\beta)}H=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(C_v H-\mu C)\right), \qquad (62)$$

где C_v — коэффициент консолидации, определяемый согласно соотношению (6), $\mu=\nu C_v/k$, $D_t^{(\beta)}$ — оператор регуляризованной дробной производной Капуто–Герасимова порядка β по переменной t [17, 19].

Аналогично из обобщенного соотношения баланса солей в жидкой фазе получаем уравнение для определения концентрации соли в потоке в виде

$$\sigma D_t^{(\beta)}C=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(d_*\frac{\partial C}{\partial x^\alpha}+C\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(kH-\nu C)-\gamma d_u\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right), \qquad (63)$$

где σ — пористость геосреды [28].

Соотношения (62), (63) являются основой новой дробно-фрактальной математической модели динамики процесса фильтрационной консолидации насыщенной солевым раствором грунтовой среды в условиях временно́й нелокальности с учетом фрактальных свойств среды. В частном случае $\alpha=1$ отсюда получаем уравнения дробно-дифференциальной математической консолидационной модели насыщенных солевыми растворами грунтовых сред, предложенной в [3].

Отметим, что в случае фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенном солевым раствором глинистом геомассиве ввиду малости соответствующих фильтрационных скоростей можно в первом приближении линеаризовать уравнение для концентрации, пренебрегая вторым слагаемым в правой части (63). В результате получим систему уравнений математической модели нелокального во времени консолидационного процесса в насыщенной солевым раствором глинистом геопористом массиве с учетом осмотических явлений и фрактальных свойств среды в виде

$$D_t^{(\beta)}H=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(C_v H-\mu C)\right), \qquad (64)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)}C=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(d_* C-\gamma d_u H)\right). \qquad (65)$$

В рамках данной модели задача моделирования аномальной динамики процесса фильтрационной консолидации массива конечной мощности с проницаемыми верхней $x=1$ и нижней $x=l\,(l>1)$ гранями сводится к решению в области $(1<x<l)\times(0<t<+\infty)$ системы уравнений (64), (65) при следующих условиях:

$$H(1,t)=0,\;\; H(l,t)=0,\;\; H(x,0)=H_0, \qquad (66)$$

$$C(1,t)=C_0,\;\; C(l,t)=0,\;\; C(x,0)=0, \qquad (67)$$

где H_0 — начальное значение избыточного напора в массиве, C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Методика решения данной краевой задачи кратко состоит в следующем. Умножив уравнение (64) на неопределенный действительный коэффициент q и сложив полученный результат с (65), получим

$$D_t^{(\beta)}(qH+\sigma C)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}((qC_v-\gamma d_u)H+(d_*-\mu q)C)\right). \qquad (68)$$

Положим в (68)

$$qC_v - \gamma d_u = qr,\ d_* - \mu q = \sigma r, \tag{69}$$

где r — некоторая действительная постоянная, определяемая ниже. Из соотношений (69) имеем квадратное уравнение для определения r

$$\sigma r^2 - (d_* + \sigma C_v)r + C_v d_* - \mu\gamma d_u = 0, \tag{70}$$

откуда

$$r_{1,2} = \frac{1}{2\sigma}(d_* + \sigma C_v \pm \sqrt{\Delta}),\ \Delta = (d_* - \sigma C_v)^2 + 4\sigma\mu\gamma d_u > 0. \tag{71}$$

Корням $r = r_i\ (i = 1, 2)$ уравнения (70), определяемым согласно соотношениям (71), соответствуют два значения q:

$$q_i = \frac{d_* - \sigma r_i}{\mu}\ \ (i = 1, 2).$$

Положим

$$\psi_i(x, t) = q_i H(x, t) + \sigma C(x, t)\ \ (i = 1, 2). \tag{72}$$

С учетом (68), (69), (72) получаем для отыскания неизвестных функций $\psi_i\ (i = 1, 2)$ совокупность уравнений

$$D_t^{(\beta)}\psi_i = r_i \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi_i(x, t)\right)\ (i = 1, 2). \tag{73}$$

Принимая во внимание (66), (67), находим соответствующие краевые условия для функций $\psi_i\ \ (i = 1, 2)$ в виде

$$\psi_i(1, t) = \sigma C_0,\ \psi_i(l, t) = 0,\ \psi_i(x, 0) = q_i H_0\ \ (i = 1, 2). \tag{74}$$

(Отметим, что для физической корректности рассматриваемых задач необходимо выполнение условий $r_i > 0\ (i = 1, 2)$. Неравенство $r_1 > 0$ очевидно выполнено, а неравенство $r_2 > 0$ имеет место при $\mu\gamma d_u < d_* C_v$.)

Переходя в задачах (73), (74) к однородным граничным условиям с помощью подстановок

$$\Psi_i(x, t) = \psi_i(x, t) - \frac{\sigma C_0}{l - 1}(l - x)\ \ (i = 1, 2),$$

получаем для определения функций $\Psi_i(x, t)\ \ (i = 1, 2)$ такие краевые задачи:

$$D_t^{(\beta)}\Psi_i = r_i \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Psi_i(x, t)\right) - F_i(x)\ \ (i = 1, 2), \tag{75}$$

$$\Psi_i(1, t) = 0,\ \Psi_i(l, t) = 0,\ \Psi_i(x, 0) = f_i(x)\ \ (i = 1, 2), \tag{76}$$

где

$$F_i(x) = r_i \frac{\sigma C_0}{l - 1}\frac{1 - \alpha}{\alpha^2}x^{1 - 2\alpha},\ f_i(x) = q_i H_0 - \frac{\sigma C_0}{l - 1}(l - x)\ \ (i = 1, 2).$$

Введя в рассмотрение конечное интегральное преобразование вида (11), поставим в соответствие задачам (75), (76) следующие задачи Коши:

$$D_t^{(\beta)}\overline{\Psi}_i^{(n)}(t) + r_i\left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha}\right)^2\overline{\Psi}_i^{(n)}(t) = \varsigma_i^{(n)}\ \ (i = 1, 2;\ n \in N), \tag{77}$$

$$\overline{\Psi}_i^{(n)}(0) = \chi_i^{(n)}\ \ (i = 1, 2;\ n \in N), \tag{78}$$

где

$$\overline{\Psi}_i^{(n)}(t) = \int_1^l \Psi_i(x, t)\varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^{1-\alpha}},\ \varsigma_i^{(n)} = r_i\frac{\sigma C_0(1 - \alpha)}{(l - 1)\alpha^2}\int_1^l \varphi_n^{(\alpha)}(x)\frac{dx}{x^\alpha},$$

$$\chi_i^{(n)} = \int_1^l \left(q_i H_0 - \frac{\sigma C_0}{l-1}(l-x) \right) \varphi_n^{(\alpha)}(x) \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \quad (i=1,2;\ n \in N).$$

Решая задачи (77), (78), получаем

$$\overline{\Psi}_i^{(n)}(t) = \chi_i^{(n)} E_{\beta,1}\left(-r_i \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) + \varsigma_i^{(n)} t^\beta E_{\beta,\beta+1}\left(-r_i \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) \tag{79}$$

$$(i=1,2;\ n \in N),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [21].

Возвращаясь в соотношениях (79) в область оригиналов по геометрической переменной, находим

$$\Psi_i(x,t) = \frac{2\alpha}{l^\alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\chi_i^{(n)} E_{\beta,1}\left(-r_i \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) + \right.$$

$$\left. + \varsigma_i^{(n)} t^\beta E_{\beta,\beta+1}\left(-r_i \left(\frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{\alpha} \right)^2 t^\beta \right) \right) \varphi_n^{(\alpha)}(x) \quad (i=1,2), \tag{80}$$

где $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$ определяется соотношением (14). При этом переход к функциям напора и концентрации осуществляется по формулам

$$H = \frac{\psi_1 - \psi_2}{q_1 - q_2}, \quad C = \frac{q_1 \psi_2 - q_2 \psi_1}{\sigma(q_1 - q_2)},$$

$$\psi_i(x,t) = \Psi_i(x,t) + \frac{\sigma C_0}{l-1}(l-x) \quad (i=1,2),$$

где функции $\Psi_i(x,t)$ $(i=1,2)$ определяются соотношениями (80).

Отметим, что из приведенных соотношений при $\alpha \to 1$ как частный случай получаем решение [3] соответствующей консолидационной задачи в дробно-дифференциальной постановке без учета фрактальных свойств среды. При $\alpha, \beta \to 1$ из полученного решения также следует решение соответствующей консолидационной задачи в классической постановке [29].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены задачи математического моделирования некоторых аномальных процессов фильтрационно-консолидационной динамики водонасыщенных грунтовых сред под действием приложенной внешней нагрузки. Для моделировании особенностей формирования полей избыточных напоров в процессе фильтрационной консолидации используется дробно-фрактальный подход [13], позволяющий учесть в математических моделях временну́ю нелокальность динамики консолидационных процессов для грунтовых сред фрактальной структуры.

Освещены вопросы построения дробно-фрактальной математической модели динамики процесса фильтрационной консолидации грунтовой среды, модели динамики процесса фильтрационной консолидации массивов фрактальной структуры с учетом ползучести грунтового скелета (прямая и обратная ретроспективная задачи), а также дробно-фрактальной математической модели динамики процесса фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами грунтовых сред.

В рамках указанных моделей выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых одномерных краевых задач о консолидации грунтовых массивов фрактальной структуры в условиях временно́й нелокальности процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. К.: Наук. думка, 2005. 283 с.
2. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. 211 с.
3. Bulavatsky V.M., Kryvonos Iu.G. The numerically analytical solutions of some geomigratory problems within the framework of fractional-differential mathematical models. *Journal of Automation and Information Science.* 2014. Vol. 46, N 2. P. 1–11.
4. Bulavatsky V.M. Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 1. P. 81–89.
5. Bulavatsky V.M. Some modelling problems of fractional-differential geofiltrational dynamics within the framework of generalized mathematical models. *Journal of Automation and Information Science.* 2016. Vol. 48, N 5. P. 27–41.
6. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Numerical simulation of fractional- differential filtration-consolidation dynamics within the framework of models with non-singular kernel. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 2. P. 193–204.
7. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Timoshenko A.A., Lyashko N.I., Bondar E.S. Optimal control of intensity of water point sources in unsaturated porous medium. *Journal of Automation and Information Science*. 2019. Vol. 51, N 7. P. 24–33.
8. Bomba A.Ya., Hladka O.M. Methods of complex analysis of parameters identification of quasiideal processes in nonlinear doubly-layered porous pools. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46, N 11. P. 50–62.
9. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Москва: Госстройиздат, 1961. Т. 2. 544 с.
10. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. Москва: Наука, 1967. 543 с.
11. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. 390 с.
12. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Москва: Высш. шк., 1991. 447 с.
13. Allwright A., Atangana A. Fractal advection-dispersion equation for groundwater transport in fractured aquifers with self-similarities. *The European Physical Journal Plus*. 2018. Vol. 133, Iss. 2. Article number: 48. https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-11885-3.
14. Chen W. Time-space fabric underlying anomalous diffusion. *Chaos, Soliton. Fract.* 2006. Vol. 28, Iss. 4. P. 923–929.
15. Cai W., Chen W., Wang F. Three-dimensional Hausdorff derivative diffusion model for isotropic/anisotropic fractal porous media. *Thermal Science*. 2018. Vol. 22, Suppl. 1. P. S1–S6.
16. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1986. 304 с.
17. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
18. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 350 p.
19. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
20. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
21. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
22. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fractional Differentiation and Applications*. 2015. Vol. 1, N 2. P. 73–85.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва: Наука, 1969. 344 с.
24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.
25. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problem. New-York: Springer-Verlag, 1996. 307 p.
26. Ting Wei, Jun-Gang Wang. A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2014. Vol. 48, N 2. P. 603–621.

27. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2011. Vol. 382. P. 426–447.

28. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.

29. Kaczmarek M., Huekel T. Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem. *Transport in Porous Media.* 1998. Vol. 32. P. 49–74.

Надійшла до редакції 25.09.2020

В.М. Булавацький

ЗАМКНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЙНО-КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В РАМКАХ ДРОБОВО-ФРАКТАЛЬНОГО ПІДХОДУ

Анотація. Побудовано дробово-фрактальну математичну модель динаміки процесу фільтраційної консолідації ґрунтового середовища, модель динаміки процесу фільтраційної консолідації масивів фрактальної структури з урахуванням повзучості грунтового скелета (пряма і обернена ретроспективна завдачі), а також дробово-фрактальну математичну модель динаміки процесу фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових середовищ. У рамках зазначених моделей виконано постановки і отримано замкнені розв'язки деяких одновимірних за геометричною змінною крайових задач про консолідацію водонасичених ґрунтових масивів фрактальної структури в умовах часової нелокальності процесу ущільнення.

Ключові слова: математичне моделювання, фільтраційно-консолідаційні процеси, некласичні моделі, ґрунтові середовища фрактальної структури, динаміка, дробово-фрактальний підхід, прямі та обернені задачі, замкнені розв'язки.

V.M. Bulavatsky

CLOSED SOLUTIONS OF SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FILTRATION-CONSOLIDATION DYNAMICS WITHIN FRACTIONAL-FRACTAL APPROACH

Abstract. The autor constructs a fractional-fractal mathematical model of the dynamics of the process of filtration consolidation of a soil media, a model of the dynamics of the process of filtration consolidation of massifs of fractal structure, taking into account the creep of the soil skeleton (direct and inverse retrospective problems) and a fractional-fractal mathematical model of the dynamics of the process of filtration consolidation of saturated saline solutions of soil media. Within the framework of these models, statements have been made and closed solutions have been obtained for some boundary-value problems, one-dimensional with respect to the geometric variable, on the consolidation of water-saturated soil massifs of fractal structure under time nonlocality of the consolidation process.

Keywords: mathematical modeling, filtration-consolidation processes, non-classical models, soil media of fractal structure, dynamics, fractional-fractal approach, direct and inverse problems, closed solutions.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.