УДК 004.827+519.87

Є.В. ІВОХІН

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ВПЛИВУ НЕЧІТКОГО ОПИСУ ВІДЛІКУ ЧАСУ НА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ ЧАСОВОГО РЕСУРСУ

Анотація. Розглянуто підхід до побудови нечітких структурованих числових множин, в основу якого покладено принцип формування нечіткого оригіналу з наступною реплікацією його на числовій осі. Формалізація нечіткого оригіналу полягає у визначенні нечіткого трикутного числа з відповідним носієм. Розглянуто варіант формування нечітких числових множин, які формалізують «швидкий» та «повільний» плин часу. Запропоновано методику, що дозволяє формалізувати задачу нечіткого опису та враховувати динаміку відліку часу для розв'язування різних оптимізаційних задач. Розглянуто приклади застосування нечіткого плину часу для різних постановок задач, що виникають під час визначення послідовності виконання сукупності завдань в межах заданого часового проміжку з урахуванням або без урахування додаткових обмежень на процес виконання. Запропоновано підхід до корекції початкових планів часового розподілу, що враховує різні темпи відліку часу. Сформульовано спосіб побудови допустимих розв'язків на основі жадібних евристик.

Ключові слова: розподіл ресурсів, нечіткі часові параметри, задача про рюкзак.

ВСТУП

Поведінка людей суттєво залежить від їхнього емоційного стану. Емоції у людини виконують функцію локального критерію керування, заданого деякою цільовою функцією, яка залежить від конкретних чинників впливу на емоції. Останні можуть «запускати» відповідну до певної ситуації поведінку, яка необов'язково є оптимальною, але такою, що дає змогу уникнути (можливо, з втратами) суттєвих наслідків перевищення деякого важливого (наприклад, часового) ресурсу [1].

Зазначимо, що поштовхом до побудови і розвитку теоретико-множинних підходів у моделюванні поведінки людини завжди було бажання адаптувати математичні моделі до реального життя, отримати можливість органічно поєднувати потенціал обчислювальних методів зі специфікою людського мислення [2]. Такі завдання є характерними для реалізації методів та алгоритмів штучного інтелекту, для розроблення засобів підтримки прийняття рішень, розв'язування задач розподілу ресурсів з урахуванням впливу людського фактору тощо.

Як було зазначено, одним із важливих ресурсів, що розглядають у процесах за участю людини, є час. Поняття величини проміжку часу є необхідним для описування часових інтервалів, точні межі яких у цьому разі можуть бути невідомими до моменту настання конкретного стану процесу. Як наслідок, кожний проміжок часу визначається деяким інтервалом, межі якого на поточний момент не встановлено, але їх можна наближено описати з урахуванням особливостей плину часу. Це можливо за умови, що вважається доступною інформація про межі гарантованого розміщення заданого інтервалу на часовій шкалі, до того ж межі інтервалу можуть бути згодом конкретизовані. Вимірювання часових проміжків можна також навести у вигляді лінгвістичних термів, які визначають швидкість відліку часового ресурсу, наприклад «швидке реагування», «звичайний часовий відлік» або «довге очікування». Відповідно під час розв'язання задач, коли необхідно реалізувати вербальні терми для описування часового відліку, треба враховувати нерівномірність плину часу. Також, вочевидь, на сприйняття темпів часового відліку в різних процесах за участю людини суттєво впливають емоції.

Одним із підходів для формалізації подання часових інтервалів, що визначають різні темпи відліку часу, є задання меж проміжку часу двох типів: точної та гарантованої, для чого застосовуються спеціальні предикати [3]. У [4] зроблено спробу описати плин часу у формі нечітких величин спеціального вигляду. Подання нечітких термів визначається за допомогою конкретних функцій належності деяких нечітких чисел, які будуються на базі сукупності знань, отриманих зі сховища або на основі результатів оброблення експертної інформації.

Серед задач, в яких для пошуку оптимального або ефективного розв'язку потрібно враховувати фактори впливу на емоційний стан людини і, як наслідок, на темп сприйняття часового відліку, необхідно виділити задачі розподілу ресурсів, календарного планування тощо. У даній роботі пропонується розглянути подальшу деталізацію методики формалізації процесу плину часу на основі нечітких чисел та її застосування для розв'язання окремих нечітких оптимізаційних задач часового розподілу з урахуванням невизначеності, пов'язаної з впливом неоднорідних темпів відліку часу.

ФОРМАЛІЗАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОПИСУ ЧАСОВОГО ВІДЛІКУ

Означення 1 [5]. Нечіткою множиною $\widetilde{A}$ в універсальному просторі X називається сукупність пар вигляду $\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\widetilde{A}}(x): X \to [0, 1]$ — функція належності нечіткої множини $\widetilde{A}$.

Величина функції належності $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ для довільного елемента $x \in X$ визначає ступінь належності x до нечіткої множини $\widetilde{A}$. Якщо в якості універсального простору X розглядається підмножина дійсних чисел $X \subseteq R^1$, нечітка множина $\widetilde{A}$ містить сукупність пар, складених з двох скалярних значень: $x \in R^1$ та $\mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Означення 2 [6]. Нечітким трикутним числом $\widetilde{b}$ називають впорядковану трійку чисел $\widetilde{b} = \{(a, b, c)\}$, $a \le b \le c$, для якої визначено функцію належності

$$\mu_{\widetilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, \ x \in [a, b]; \ \mu_{\widetilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, \ x \in [b, c]; \ \mu_{\widetilde{b}}(x) = 0, x \notin [a, c].$$

Нечітке трикутне число вигляду (a, b, b), що називається лівим нечітким трикутним числом [6], визначається функцією належності

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x < a; \ \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \ \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x > b,$$

а нечітке трикутне число вигляду (b, b, c), що називається правим нечітким трикутним числом, визначається функцією належності

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x < b; \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c]; \ \mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x > c.$$

Для нечіткого числа $\widetilde{b}$ носієм $\operatorname{supp} \widetilde{b} = \{x \in X : \mu_{\widetilde{b}}(x) > 0\}$ є інтервал [6]. До того ж для нечіткого трикутного числа $\widetilde{b} = (a, b, c)$ носієм буде інтервал (a, c), для правого нечіткого трикутного числа — інтервал $[b, c)$, для лівого нечіткого трикутного числа — інтервал $(a, b]$.

Над нечіткими множинами визначено всі операції, характерні для традиційної теорії точних множин, але зазвичай зі своєю специфікою, що задається сутністю нечітких множин. Операції перетину, об'єднання, доповнення та інші для нечітких множин визначаються відомими співвідношеннями [5], але не можуть повністю забезпечити низку корисних властивостей нечітких чисел, що узагальнюють і розширюють операції з чіткими числами.

Означення 3. Довільне нечітке трикутне число $\widetilde{E}(u, v)$, носієм якого є числовий інтервал (u, v), $u < v$, називатимемо нечітким оригіналом.

Нечіткий оригінал $\widetilde{E}(u,v]$ будемо називати лівим, якщо носій відповідного нечіткого числа задається інтервалом $(u,v]$, а нечіткий оригінал $\widetilde{E}[u,v)$ — правим, якщо носій задається інтервалом $[u,v)$.

Вочевидь, довільне праве нечітке трикутне число (b,b,c) можна розглядати як правий нечіткий оригінал з відповідними значеннями $u=b, v=c$, а ліве нечітке трикутне число (a,b,b) — як лівий нечіткий оригінал з $u=a$, $v=b$.

Якщо покласти $u=0$, $v=1$, тоді нечіткий оригінал $\widetilde{E}(0,1)=\widetilde{E}$ будемо називати нечітким одиничним оригіналом і відповідно $\widetilde{E}(0,1]$ — лівим нечітким одиничним оригіналом, а $\widetilde{E}[0,1)$ — правим нечітким одиничним оригіналом. Нечіткий оригінал $\widetilde{E}(0,v)$, $v>0$, з носієм $(0,v)$ називатимемо початковим.

Назва введеного поняття пояснюється тим, що за допомогою заданого нечіткого оригіналу можна сформулювати нечіткі множини спеціального вигляду з деякими характерними властивостями.

Означення 4. Нечітка числова множина $\widetilde{R}(s,t)$ з носієм, що задається числовим інтервалом (s,t), $s<t$, є реплікацією нечіткого оригіналу (або нечіткою реплікацією) $\widetilde{E}(u,v)$, $u<v$, якщо виконується умова $|v-u|=|t-s|$.

Зауважимо, що функція належності, яка визначена на нечіткому оригіналі, необов'язково має збігатися з функцією належності реплікації $\widetilde{R}(s,t)$. Якщо $|t-s|=1$, множина $\widetilde{R}(s,t)$ є реплікацією нечіткого одиничного оригіналу.

Означення 5. Нечітку числову множину $\widetilde{R}=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{R}_i(s_i,t_i)$, де $\widetilde{R}_i(s_i,t_i)$, $i=\overline{1,n}$, є реплікаціями нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$, $u<v$, з носіями, заданими числовими інтервалами (s_i,t_i), $i=\overline{1,n}$, $\bigcap_{i=1}^{n}(s_i,t_i)=\varnothing$, будемо називати n-кратною реплікацією нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$.

Кратність реплікації може бути нескінченною, таку реплікацію називатимемо реплікацією нечіткого оригіналу нескінченної кратності.

Означення 6. Нечітку числову множину $\widetilde{R}=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{R}_i(s_i,s_{i+1})$, де $\widetilde{R}_i(s_i,s_{i+1})$, $i=\overline{1,n}$, є реплікаціями нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$, $u<v$, з носіями, заданими числовими інтервалами (s_i,s_{i+1}), $i=\overline{1,n}$, будемо називати n-кратною послідовною реплікацією нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$.

Аналогічно можна розглядати випадок реплікацій, для яких величини функцій належності елементів нечіткого оригіналу повністю зберігаються.

Означення 7. Нечітку реплікацію $\widetilde{C}(s,t)$, $s<t$, заданого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$, $u<v$, назвемо копією, якщо для всіх $x=u+\delta$, $y=s+\delta$, $0\le\delta\le\Delta$, $\Delta=v-u=t-s$, виконується умова $\mu_{\widetilde{C}}(y)=\mu_{\widetilde{E}}(x)$.

Означення 8. Нечітку реплікацію $\widetilde{C}=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i(s_i,t_i)$, де $\widetilde{C}_i(s_i,t_i)$, $i=\overline{1,n}$, є копіями нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$, $u<v$, з носіями, заданими числовими інтервалами (s_i,t_i), $i=\overline{1,n}$, $\bigcap_{i=1}^{n}(s_i,t_i)=\varnothing$, будемо називати n-кратною копією нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u,v)$.

Означення 9. Нечітку реплікацію $\widetilde{C}=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i(s_i, s_{i+1})$, де $\widetilde{C}_i(s_i, s_{i+1})$, $i=\overline{1, n}$, є копіями нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u, v)$, $u< v$, з носіями, заданими числовими інтервалами (s_i, s_{i+1}), $i=\overline{1, n}$, будемо називати n-кратною послідовною копією нечіткого оригіналу $\widetilde{E}(u, v)$.

Як і у випадку реплікацій нескінченної кратності, копії називатимемо копіями нечіткого оригіналу нескінченної кратності. Зрозуміло, що означення правих та лівих реплікацій і копій нечіткого оригіналу будуть аналогічними.

Використаємо формалізовані нечіткі структуровані числові множини для описування невизначеності у вимірюванні відліку часу. Тривалість часових інтервалів, наведених у лінгвістичній формі, є відображенням суб'єктом сприйняття інтервалів часу під впливом специфічних умов, що пов'язані з режимом спостереження часу. Відомо, що дефіцит часу, який виникає у випадках оперативного прийняття рішень, швидкісного тестування, змагань з обмеженим часом, призводить до «прискорення» плину часу. Відповідно за наявності надлишку часу і відсутності процесів, що його «споживають» (в умовах очікування подій, тривалої бездіяльності тощо), плин часу сповільнюється. Інакше кажучи, вимірювання відліку часу в різних ситуаціях визначається суб'єктивною оцінкою, яку можна описати нечіткою величиною трикутного вигляду.

Припустимо, що вимірювання часу відбувається за допомогою інтервалів однієї тривалості (такими інтервалами можна вважати будь-яку одиницю часу, наприклад, 1 с, 1 добу або 1 рік в залежності від темпів процесу). Для спостереження за нечітким відліком часу будемо інтуїтивно оцінювати проміжок, який залишається до завершення кожного інтервалу часу. У цьому разі «швидкий» плин одиниці часу може бути заданий правим нечітким трикутним числом із носієм, довжина якого менша за тривалість часового інтервалу, а «повільний» — такого ж вигляду нечітким числом із носієм, довжина якого більша за тривалість інтервалу. Вочевидь, якщо плин часу природній, величина носія даного нечіткого числа за довжиною збігається з величиною одиничного часового інтервалу.

Таким чином, маючи зразок відліку вимірювання інтервалу часу у вигляді правого початкового оригіналу $\widetilde{E}[0, v)$, можна визначити нечітку n-кратну послідовну копію на його основі, яка буде описувати зміни часу на заданому часовому проміжку.

Нехай $\widetilde{E}^{Q}[0, v_Q)$ — правий нечіткий оригінал у формі трикутного числа з лінійною спадною функцією належності, який визначає «швидкий» одиничний проміжок часу ($v_Q<1$), а $\widetilde{E}^{D}[0, v_D)$ — аналогічний нечіткий оригінал, що визначає «повільний» одиничний проміжок ($v_D>1$). Визначимо $\widetilde{C}^{Q}=\bigcup_{i_Q=1}^{n_Q}\widetilde{C}_{i_Q}^{Q}[s_{i_Q}, s_{i_Q+1})$ — нечітку n_Q-кратну послідовну копію оригіналу $\widetilde{E}^{Q}[0, v_Q)$, що описує швидку зміну часу на проміжку $[s_1, s_{n_Q+1})$, і $\widetilde{C}^{D}=\bigcup_{i_D=1}^{n_D}\widetilde{C}_{i_D}^{D}[s_{n_Q+i_D}, s_{n_Q+i_D+1})$ — нечітку n_D-кратну послідовну копію оригіналу $\widetilde{E}^{D}[0, v_D)$, яка характеризує повільну зміну часу на проміжку $[s_{n_Q+1}, s_{n_Q+n_D+1})$. Тут $\widetilde{C}_{i_Q}^{Q}[s_{i_Q}, s_{i_Q+1})$, $i_Q=\overline{1, n_Q}$, $\widetilde{C}_{i_D}^{D}[s_{n_Q+i_D}, s_{n_Q+i_D+1})$, $i_D=\overline{1, n_D}$ — копії правих нечітких оригіналів $\widetilde{E}^{Q}[0, v_Q)$ і $\widetilde{E}^{D}[0, v_D)$ відповідно з носіями, заданими числовими інтервалами заданої довжини v_Q і v_D.

Тоді нечітка числова множина вигляду $\widetilde{C}^Q \cup \widetilde{C}^D$ буде описувати відлік часу на проміжку $[s_1, s_{n_Q+n_D+1}]$. Цей відлік складається з двох фаз: швидкої зміни часу на $[s_1, s_{n_Q+1}]$ і повільної — на $[s_{n_Q+1}, s_{n_Q+n_D+1}]$. Вочевидь, змінюючи характер відліку часу на проміжках та об'єднуючи отримані нечіткі копії, можна будувати нечітку числову множину, яка відображає нечіткість сприйняття плину часу на довільному часовому проміжку. Крім цього, отримана нечітка числова множина може бути доповнена копією одиничного оригіналу $\widetilde{E}$, який визначає природній відлік часу.

Зазначимо, що швидкий або повільний відлік часу притаманний не лише сприйняттю людини, але й різним процесам у технічних системах. Швидкість функціонування технічного пристрою часто визначається частотою (кількістю в одиницю часу) тактових імпульсів, що подаються на вхід. Збільшення або зменшення частоти в межах допустимого інтервалу дозволяє виконати ту саму роботу швидше або повільніше. Інакше кажучи, тактова частота фактично визначає швидкий і повільний плин часу. Таким чином, це доводить, що нечітке оцінювання швидкості зміни відліку часу можна отримати на основі базового нечіткого оригіналу, який описує вербальний терм «залишок до завершення одиниці часу».

НЕЧІТКІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ЇХНЬОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглянемо проблему формалізації впливу суб'єктивного сприйняття часового відліку в процесах за участю людини на прикладі задач математичного програмування з параметричною невизначеністю.

Наведемо типову постановку задачі лінійного програмування. Припустимо, що в рамках деякого виробничого процесу планується випуск різноманітних виробів обсягом $x_1, \ldots, x_n$. Позначимо c_j очікуваний прибуток на одиницю реалізованої продукції типу j, $j = \overline{1, n}$. Для виготовлення будь-якого виробу використовують ресурси $b_1, \ldots, b_m$ — виробничі потужності фірми, причому питомі витрати i-го ресурсу, $i = \overline{1, m}$, для вироблення одиниці продукції типу j, $j = \overline{1, n}$, складають a_{ij} одиниць. Необхідно знайти такий раціональний план випуску виробів кожного типу, що забезпечить виробнику максимальний прибуток. Математична модель даної задачі за фіксованих відомих значень параметрів c_j, a_{ij}, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, аналогічна стандартній задачі лінійного програмування [7]:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x \ge 0, \; x \in R^n.$$

Якщо множина допустимих розв'язків, яка визначається системою обмежень, є скінченою або зліченою, то отримуємо клас задач дискретного лінійного програмування [7], до якого належить задача булівського програмування (1), (2) з додатковими обмеженнями на змінні у вигляді $x_j = \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n}$.

До однієї з найбільш відомих задач булівського програмування належить задача про рюкзак, яка полягає в оптимальному розміщенні у рюкзаку заданої місткості набору із заданою кількістю предметів за умови, що для кожного з них існують два параметри: об'єм і цінність.

Припустимо, що об'єм рюкзака дорівнює V, кожен з n предметів має об'єм v_j та цінність c_j, $j = \overline{1, n}$, до того ж усі характеристики задаються додатними числами. Одна з постановок задачі про рюкзак полягає у визначенні набору предметів, що розміщено у ньому, сумарна цінність яких є максимальною з урахуванням обмеження на об'єм рюкзака [7], що записується у вигляді

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le V,$$

де $x_j = \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n}$.

На практиці параметри оптимізаційних задач часто невідомі або для них можна визначити лише інтервали можливих значень. Задачі такого типу називають задачами з багатозначними коефіцієнтами. У такому разі деталізація та уточнення параметрів математичних моделей можливі на основі описування коефіцієнтів у формі нечітких чисел. У модель вноситься додаткова інформація у вигляді функцій належності нечітких величин. Ці функції можна розглядати як спосіб наближеного відображення експертом неформалізованого уявлення щодо реальної величини конкретного параметра. Значення функцій належності — це вагові коефіцієнти, які експерти присвоюють різним можливим значенням кожного параметра задачі.

Розглянемо формалізацію такого уточнення на прикладі постановки загальної задачі нечіткого математичного програмування [8], аналогічної стандартній задачі лінійного програмування (1), (2). У цьому разі вважається, що задано лінійну цільову функцію

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \to \max, \tag{3}$$

в якій значення коефіцієнтів $\tilde{c}_j$ наведено у вигляді нечітких чисел та задано обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i, \; i = \overline{1, m}, \; x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n},$$

де значення коефіцієнтів $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ також описано у формі відповідних нечітких чисел. Необхідно здійснити раціональний вибір розв'язку $x \in R^n$, який в певному розумінні максимізує задану нечітку лінійну форму (3).

Загальна постановка нечіткої задачі оптимізації дає змогу окреслити окремі її варіанти, що характеризуються наявністю невизначеності лише у частині параметрів. У разі нечіткої задачі лінійного математичного програмування з нечіткими технологічними коефіцієнтами отримуємо задачу оптимізації цільової функції (1) за умов

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{4}$$
$$x \ge 0, \, x \in R^n.$$

Тут $\tilde{a}_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — технологічні коефіцієнти задачі, які задаються у вигляді правих нечітких чисел $(a_{ij}, a_{ij}, a_{ij} + d_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, з функціями належності

$$\mu_{a_{ij}} = \begin{cases} 1, & s = a_{ij}, \\ (a_{ij} + d_{ij} - s) / d_{ij}, & a_{ij} < s < a_{ij} + d_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ 0, & s \ge a_{ij}, + d_{ij}, s < a_{ij}, \end{cases} \tag{5}$$

де $d_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Для знаходження розв'зків нечіткої задачі (1), (4), (5) потрібно провести її дефазифікацію. Для цього обчислюємо оптимальні значення рівнів цільової функції (1) Z_l і Z_u шляхом розв'язання двох задач лінійного програмування [7]:

$$Z_l = \max_x \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \; x \ge 0, x \in R^n,$$

та

$$Z_u = \max_x \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \le b_i , i = \overline{1, m}, \; x \ge 0, x \in R^n .$$

Припускаючи, що обидві задачі мають розв'язок, отримуємо, що оптимальне значення цільової функції (1) лежатиме між значеннями Z_l і Z_u за умови розміщення технологічних коефіцієнтів між значеннями a_{ij} та $a_{ij} + d_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Нехай $L = \min(Z_l, Z_u)$, $U = \max(Z_l, Z_u)$. Обчислені значення L і U будуть відповідно нижньою і верхньою межами оптимальних значень цільової функції.

Нечітка величина оптимальних значень (позначимо її $\widetilde{G}$), задана в просторі R^n, описується функцією належності вигляду

$$\mu_{\widetilde{G}}(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le L, \\ (U - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j) / (U - L), & L < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < U, \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge U. \end{cases} \quad (6)$$

Нечіткі обмеження ($\widetilde{F}_i$, $i = \overline{1, m}$) з (3) визначаються функціями належності

$$\mu_{\widetilde{F}_i}(x) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i , \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j - y}{\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j}, & y = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \alpha_{ij}) x_j \le b_i , 0 \le \alpha_{ij} \le d_{ij} , \exists k 0 < \alpha_{ik} < d_{ik} , \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \le b_i , \end{cases} \quad (7)$$

де $d_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Використовуючи означення нечіткого розв'язку в розумінні Белмана–Заде [6], записуємо нечітку задачу лінійного програмування (1), (4), (5) у формі чіткої оптимізаційної задачі

$$\max_x \lambda$$

$$\mu_{\widetilde{G}}(x) \ge \lambda,$$

$$\mu_{\widetilde{F}_i}(x) \ge \lambda, i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$x \ge 0.$$

Підставляючи (6) і (7) у (8), отримуємо остаточний вигляд цієї задачі

$$
\begin{gathered}
\max_x \lambda, \\
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda (U - L) \le U, \\
\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda d_{ij}) \, x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \\
x \ge 0, \; 0 \le \lambda \le 1.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Зазначимо, що обмеження задачі (9) містять добуток λx_j, $j = \overline{1, n}$, і тому не є опуклими. У цьому разі для знаходження розв’язку задачі (9) потрібно застосовувати методи, призначені для пошуку розв’язків неопуклих оптимізаційних задач.

НЕЧІТКА ЗАДАЧА ПРО РЮКЗАК ЯК ЗАСІБ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ЧАСОВОГО РЕСУРСУ З НЕЧІТКО ЗАДАНИМИ ТЕРМІНАМИ ВИКОНАННЯ

Однією з важливих оптимізаційних задач, що допускають нечітке формулювання на основі нечітких технологічних коефіцієнтів, є задача розподілу часового ресурсу, яку можна формалізувати у вигляді задачі про рюкзак.

Припустимо, що треба виконати N задач (або завдань) Z_i, $i = \overline{1, N}$, кожна з яких характеризується часом розв’язання T_i, $i = \overline{1, N}$. Можливо, що для переключення з одного завдання на інше необхідним є часовий проміжок (час для переналагодження) π_{ij}, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, $i \ne j$. Вважається, що є один виконавець завдання, а час виконання усіх завдань обмежено деякою величиною $\overline{T}$, $\sum_{i=1}^{N} T_i \ge \overline{T}$.

Нехай розв’язання кожного завдання оцінюють відповідною кількістю балів B_i, $i = \overline{1, N}$. Для визначення робіт, виконання яких забезпечує максимальну оцінку в балах за умови, що інтервали часу для переналагодження завдань не враховують, можна сформулювати задачу найбільш ефективного використання часового ресурсу у вигляді задачі про рюкзак

$$
W = \sum_{i=1}^{N} B_i x_i \to \max, \tag{10}
$$

$$
\sum_{i=1}^{N} T_i x_i \le \overline{T}, \tag{11}
$$

$$
x_i \in \{0, 1\}, \; i = \overline{1, N},
$$

де $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, N}$, — булівські змінні, в яких 1 відповідає тому, що завдання виконано, а 0 — тому, що не виконано.

Для формалізації нечіткої задачі розподілу часового ресурсу вважатимемо, що терміни виконання робіт відомі лише наближено. Запишемо параметри часу, який необхідний для проведення робіт, у вигляді нечітких трикутних чисел $\widetilde{T}_i = (T_i, T_i, T_i + \Delta_i)$, $i = \overline{1, N}$, де $\Delta_i \ge 0$, $i = \overline{1, N}$, — допустимі затримки у проведенні робіт, що залежать від умов виконання завдання.

Тоді нечітку задачу найбільш ефективного використання часового ресурсу можна записати у вигляді нечіткої задачі про рюкзак з цільовою функцією (10) та формально записаним обмеженням

$$
\sum_{i=1}^{N} \widetilde{T}_i x_i \le \overline{T}, \tag{12}
$$

$$
x_i \in \{0, 1\}, \; i = \overline{1, N},
$$

з нечітко заданими термінами виконання окремих завдань (інтерпретація нерівності (12) передбачає, що додавання та порівняння нечітких чисел здійснюється за відомими правилами дій з нечіткими величинами [5]).

Сформульована задача є задачею математичного програмування з нечіткими технологічними коефіцієнтами. Найкраща підсумкова оцінка (у балах) визначатиметься значенням $W^0 = W(x^0, \lambda^0)$ цільової функції (10) на оптимальному нечіткому розв'язку Белмана–Заде (x^0, λ^0) оптимізаційної задачі (9).

Якщо під час переключення з однієї роботи на іншу враховувати час для переналагодження, стає важливою послідовність виконання робіт. Це призводить до необхідності застосування методів комбінаторної оптимізації. Розв'язком задачі оптимального використання часу $\overline{T}$ буде переставлення із номерів завдань $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $m \le N$, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, m}$, яке визначає послідовність виконання робіт і є розв'язком оптимізаційної задачі, аналогічної (10), (12):

$$W = \sum_{i=1}^{m} B_{p_i} y_{p_i} \to \max, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{N} (\widetilde{T}_i + \pi_{ij}) \, x_{ij} \le \overline{T}, \tag{14}$$

де $x_{ij} \in \{0, 1\}$ — змінні, що характеризують послідовність виконання робіт (1, якщо робота i виконується безпосередньо перед роботою j, і 0 у решті випадків),

$$i, j = \overline{1, N}, \; i \ne j, \; y_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_{ij} = 1, \\ 0 \text{ інакше}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Прикладами наведених постановок є звичайні ситуації оцінювання знань студентів за результатами виконання тестових завдань з різних дисциплін на модульних контрольних роботах або підсумкових семестрових заліках та іспитах, коли необхідно виконати низку завдань зі встановленим регламентом часу для кожного з них і всієї сукупності завдань.

Зрозуміло також, що формулювання задачі розподілу часового ресурсу з нечітко заданими термінами виконання пов'язані не лише з неможливістю оцінювання часу проведення робіт, а й з намаганням урахувати вплив суб'єктивних факторів сприйняття часового відліку на швидкість виконання завдань.

Якщо стан виконавця (суб'єкта чи об'єкта) впливає на виконання завдань визначеної сукупності робіт (наприклад, своєчасне виконання окремих завдань позитивно впливає, а невиконання або затримка завершення робіт сповільнює розв'язування всієї сукупності завдань), виникають оптимізаційні задачі ефективного використання часу $\overline{T}$ у вигляді (10), (11), (10)–(12) і (13), (14) з урахуванням нечіткого відліку часу для термінів виконання окремих завдань.

Будемо вважати, що швидкий плин одиниці часу на i-му інтервалі, $i = \overline{1, N}$, описується правим нечітким трикутним числом $\widetilde{E}^Q[0, \upsilon_i)$, $i = \overline{1, N}$, з носієм, довжина якого менша за тривалість одиничного інтервалу ($\upsilon_i < 1$), а повільний — нечітким числом $\widetilde{E}^D[0, \upsilon_i)$, $i = \overline{1, N}$, з носієм, довжина якого більша за тривалість одиничного інтервалу ($\upsilon_i > 1$). Виконання кожного завдання здійснюється у відповідному швидкісному режимі, який не змінюється протягом часового інтервалу виконання конкретного завдання.

Нехай отримано розв'язок задачі оптимального використання часу $\overline{T}$ (10), (11), (10)–(12) або (13), (14) у вигляді переставлення із номерів завдань $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $m \le N$, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, m}$, елементи якої задають послідовність виконання робіт. Тоді значення T_{p_i}, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, m}$, визначають номінальний

Таблиця 1. Результати розв'язання задачі оптимізації (10), (12) з урахуванням зміни темпів плину часу.

Заданий час виконання $\overline{T}$, од.	Час виконання без урахування корекції темпів плину часу, од.	Час виконання з урахуванням корекції темпів плину часу, од.	Модифікований час $\overline{T}$ у момент припинення виконання, од.	Послідовність розв'язання завдань (нерозв'язані завдання)
60	50.173122	53.173122	60.362801	5,1,10,3,9,7,8 (2,4,6)
70	46.825626	60.825623	69.501183	1,6,8,10,5,9,7 (2,3,4)
80	69.113754	77.113754	80.177444	10,2,8,3,5,4,9,6 (1,7)
90	82.915001	87.915001	90.501381	3,10,5,9,2,7,4,1,8 (6)
100	79.567497	91.567497	99.338676	6,8,9,4,10,1,7,2,5 (3)

(плановий) час виконання кожного завдання, а величини $T_{p_i}^r = T_{p_i} \cdot \upsilon_{p_i}$, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, m}$, будуть задавати час, реально витрачений на виконання поточного завдання з урахуванням швидкого або повільного його виконання.

За таких умов зрозуміло, що результатом швидкого виконання завдання є залишок часу, який можна надалі використовувати для розв'язання інших завдань, а повільне виконання навпаки призводить до дефіциту часу, надолужити який можна за рахунок часових ресурсів, відведених для виконання подальших завдань. Така корекція часу виконання може призвести до зміни розв'язків, отриманих під час розв'язування оптимізаційних задач, а саме до переліку може бути приєднано завдання, що не увійшло до початкового плану, або для виконання усього отриманого плану не вистачить часу з наявного ресурсу $\overline{T}$.

Для моделювання та демонстрації впливу динаміки відліку часу для розв'язання задачі оптимального використання часу $\overline{T}$ проведено низку чисельних експериментів. Формалізацію нечіткого оцінювання відліку часу здійснювали за спрощеною схемою. Результат виконання або невиконання поточного завдання моделювався випадковим чином. До того ж виконання завдання сповільнювало темп зменшення часу, а невиконання навпаки прискорювало його. Зміну швидкості у процесі обчислень фіксували у вигляді відповідних модифікацій виділеного для виконання усіх завдань часу $\overline{T}$: величина збільшувалась пропорційно часу виконаного поточного завдання (ефект сповільнення темпу плину часу) і зменшувалась, якщо поточне завдання не виконувалося (ефект прискорення). Результати чисельних розрахунків розподілів часового ресурсу для виконання сукупності завдань у випадку нечітко заданих термінів виконання наведено у табл. 1 (результати розв'язання задачі (10), (12) наведено для таких параметрів: $M = 10$, $\overline{T} = 100$, T_i, $i = \overline{1, 10}$: 20.0, 20.0, 12.885, 12.741875, 9.53875, 9.5375, 3.33875, 2.635, 1.134375, 0.64125).

РЕАЛІЗАЦІЯ ЖАДІБНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКИХ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ ЧАСОВОГО РЕСУРСУ

Одним із варіантів реалізації наближених алгоритмів розв'язання задач часового розподілу може бути алгоритм, створений на основі жадібного підходу. Традиційні схеми жадібних алгоритмів ґрунтуються на введенні додаткових умов, які й визначають послідовність вибору розв'язку [7], а основу цих алгоритмів складають так звані «жадібні» евристики. Незважаючи на відсутність строгого доведення, такий підхід дозволяє отримати розв'язки, які є достатньо близькими до оптимальних.

За схемою жадібного евристичного алгоритму розв'язання нечіткої задачі про рюкзак (10), (11) припустимо, що вибір робіт (завдань) для виконання впорядковано на основі послідовності відношень оцінок у балах до необхідного часового ресурсу

$$\frac{B_{p_1}}{T_{p_1}} \geq \frac{B_{p_2}}{T_{p_2}} \geq \ldots \geq \frac{B_{p_N}}{T_{p_N}},$$

а у задачі (10), (12) — на основі послідовності відношень оцінок у балах до необхідного часового ресурсу з урахуванням максимальної затримки виконання

$$\frac{B_{p_1}}{\overline{T}_{p_1}} \ge \frac{B_{p_2}}{\overline{T}_{p_2}} \ge \ldots \ge \frac{B_{p_N}}{\overline{T}_{p_N}}.$$

Тут $p_1, \ldots, p_N$, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, N}$, — номери завдань, за якими визначається послідовність виконання, $\overline{T}_i = T_i + \Delta_i$, $i = \overline{1, N}$, — максимально можливий час виконання *i*-го завдання, а величини відношень B_i / T_i, $B_i / \overline{T}_i$, $i = \overline{1, N}$, визначають питому вагу кількості балів за одиницю часу для виконання *i*-го завдання без використання часу для переналагодження або з урахуванням часу для переналагодження відповідно.

В умовах задачі про розподіл часового ресурсу (13), (14) можна сформулювати аналогічну схему жадібної евристики. Задача пошуку переставлення із номерів завдань $p = (p_1, \ldots, p_N)$, $p_i \in \overline{1, N}$, $i = \overline{1, m}$, яка визначає послідовність виконання робіт, може бути розв'язана за допомогою застосування принципу впорядкування робіт у вигляді

$$\frac{B_{p_1}}{\overline{\overline{T}}_{p_1}} \ge \frac{B_{p_2}}{\overline{\overline{T}}_{p_2}} \ge \ldots \ge \frac{B_{p_N}}{\overline{\overline{T}}_{p_N}},$$

де $\overline{\overline{T}}_i = T_i + \Delta_i + \max\limits_{j \ne i} \pi_{ij}$, $i \in \overline{1, N}$.

Упорядкування процесів виконання робіт за даними схемами передбачає наявність апріорної інформації щодо оцінки часу виконання завдань, часу для переналагодження (за необхідності) та відповідні оцінки у балах. До того ж, як показують приклади, можна побудувати допустимі розв'язки (переставлення), сумарна кількість балів для яких близька до оптимальної.

ВИСНОВКИ

У статті наведено конструктивний спосіб побудови нечіткої множини, яка описує зміни швидкості (темпу) плину часу. Для формалізації нечіткого оцінювання відліку часу використано поняття трикутних нечітких чисел з лінійною функцією належності. Підхід є логічно та математично обґрунтованим. Сформульовано та досліджено задачі оптимізації, що оперують часовим ресурсом, розв'язок яких залежить від урахування швидкості відліку часу. Застосування такого підходу дає змогу розв'язувати практичні задачі розподілу часового ресурсу, враховуючи вплив виконання або невиконання окремих завдань для пошуку ефективних розв'язків задач.

Подальше дослідження розглянутої тематики пов'язане з аналізом нечітких оптимізаційних задач, область допустимих розв'язків в яких описують нечіткою множиною індексів [9], з розробкою інших евристик жадібної схеми для наближеного розв'язання задач ефективного використання часового ресурсу [10] та з дослідженням можливості узагальнення опису нечіткого відліку часу за допомогою інших способів формалізації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голицын Г.А., Петров В.М. Информация — поведение – творчество. Москва: Наука, 1991. 223 с.
2. Golitsyn G.A., Petrov V.M. Information and creation: Integrating the «Two Cultures». Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1995. 186 p.
3. Разин В.В., Тузовский А.Ф. Представление знаний о времени с учетом неопределенности в онтологиях Semantic Web. *Доклады ТУСУР*. 2013. № 2 (28). С. 157–162.

4. Ивохин Е.В., Махно М.Ф. О подходе к построению структурированных нечетких множеств и их использовании для описания нечеткого отсчета времени. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 5. С. 147–156.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. Москва: Наука, 1981. 206 с.
6. Bablu J., Tapan K.R. Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*. 2005. Vol. 21, N 2. P. 243–268.
7. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Київ: Слово, 2006. 815 с.
8. Zimmermman H. J. Application of fuzzy set theory to mathematical programming. *Information Sciences*, 1985. Vol. 36, Iss. 1–2. P. 25–58.
9. Mashchenko S.O. A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 1. P. 62–68. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9485-4.
10. Івохін Є.В., Навродський В.О. Про одну оптимізаційну задачу розподілу часового ресурсу в умовах невизначеності. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка.* Сер. ФМН. 2017. № 2. С. 59–61.

Надійшла до редакції 17.12.2019

Е.В. Ивохин

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ВЛИЯНИЯ НЕЧЕТКОГО ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ВРЕМЕНИ НА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО РЕСУРСА

Аннотация. Рассмотрен подход к построению нечетких структурированных числовых множеств, в основу которого положен принцип формирования нечеткого оригинала с последующей репликацией его на числовой оси. Формализация нечеткого оригинала состоит в определении нечеткого треугольного числа с соответствующим носителем. Рассмотрен вариант формирования нечетких числовых множеств, которые формализуют «быстрое» и «медленное» течение времени. Предложенная методика позволяет формализовать задачу нечеткого описания и учета динамики отсчета времени при решении различных оптимизационных задач. Рассмотрены примеры применения нечеткого течения времени для различных постановок задач, возникающих при определении последовательности выполнения совокупности заданий в пределах заданного временного промежутка с учетом или без учета дополнительных ограничений на процесс выполнения. Предложен подход для коррекции начальных планов временного распределения, учитывающий разные темпы отсчета времени. Сформулирован способ построения допустимых решений на основе жадных эвристик.

Ключевые слова: распределение ресурсов, нечеткие временные параметры, задача о рюкзаке.

E.V. Ivohin

FORMALIZING THE PROCESSES OF THE INFLUENCE OF FUZZY TIME FLOW ON THE SOLUTIONS OF TIME RESOURCE DISTRIBUTION PROBLEMS

Abstract. The paper considers an approach to constructing fuzzy structured numerical sets, which is based on the principle of generating a fuzzy original with its subsequent replication on the numerical axis. The formalization of a fuzzy original consists in determining a fuzzy triangular number with an appropriate support. The option of generating fuzzy number sets that formalize the «fast» and «slow» flow of time is considered. The proposed technique allows us to formalize the problem of fuzzy description and taking into account the dynamics of the time frame when solving various optimization problems. Examples of the use of fuzzy flow of time for different statements of problems that arise when determining the order of the set of tasks within a given time interval with or without additional constraints on the execution process are considered. An approach is proposed for the correction of the initial time distribution plans, taking into account different rates of time counting. A method for constructing feasible solutions based on greedy heuristics is formulated.

Keywords: resource allocation, fuzzy time parameters, knapsack problem.

Івохін Євген Вікторович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua.